區組設計的迴響

黃克華

一. 楔子

歷年來有多位教授在《數學傳播》裡, 分別談到了“區組設計 (block design)”的問題, 見參考資料 [2]-[5], 深入淺出, 讀來饒有趣味。佩服之餘不禁信手比畫一番, 遂草成本文。我們擬就斯坦納三元系, 柯克曼三元系的構作, 提出淺顯的觀察, 或可收拋磚引玉之效, 藉以吸引更多的年輕朋友們加入組合數學的行列裡來。

二. 再訪斯坦納三元系, 柯克曼三元系

我們先扼要的溫習什麼是斯坦納三元系、柯克曼三元系及其大集。

令 X 爲一個由 v 個元素組成的集合 (通常是由正整數組成), 以 $\binom{X}{3}$ 表示 X 的所有三元素子集合族。若 $\beta \subseteq \binom{X}{3}$ 且 X 的任意兩相異元素恰落在 β 裡的唯一三元素子集合裡, 則稱 (X,β)爲一個斯坦納三元系, 表之爲 $STS(v)$, 稱β裡的三元素子集合爲區組(block)。

設 $x \in X$, 且以 r_x 表示 β 裡包含 x 的區組個數, 考慮集合 $\{(y,B)|y \neq x$ 且 $x,y \in B\}$ 的元素個數, 得 $v-1 = 2\cdot r_x$, 是以 $r_x = \frac{v-1}{2}$ 爲一整數且與 x 的選取無關。再以 b 表 β 裡的區組個數, 考慮集合 $\{(x,B)|x \in X, B \in \beta$ 且 $x \in B\}$ 的元素個數, 得 $v\cdot\frac{(v-1)}{2} = 3\cdot b$, 即 $b = \frac{v(v-1)}{6}$, 亦爲一正整數。綜合 $\frac{v-1}{2}$, $\frac{v(v-1)}{6}$ 分別爲正整數的事實, 可知 $v = 6t+1$ 或 $6t+3$。

尤有進者, 當 $v = 6t+3$, 即 $b = (2t+1)(3t+1)$ 時, 如果 β 可以分割 (Partition) 成 $3t+1$ 個子族, 且該每一子族均爲 X 的一個分割時, 則稱 (X,β) 爲一個 “柯克曼三元系”, 表之爲 $KTS(v)$。如果所有三元素子集合 $\binom{X}{3}$ 可以分割成 $\frac{\binom{6t+3}{3}}{(2t+1)(3t+1)} = v-2$ 個柯克曼三元素, 則稱其構成一組柯克曼大集, 表之爲 $LKTS(v)$。

正如康文 ([4], 頁 35,36) 所言, 由於可分解性所帶來的難度, 關於柯克曼三元系大集, 至今只有一些零星的結果。$LKTS(9)$ 可見康文 ([4] , 頁 36)。關於 $LKTS(15)$ 最早是由 Denniston 於西元 1979 年藉助電子計算機找到一組答案, 見康文 ([4], 頁 32)。同時康教授也利用有限域的協助, 直接構作出一組 $LKTS(15)$, 見康文 ([4], 頁 36)。而當 $v \geq 21$ 時, $LKTS(v)$ 仍混然未解。

前述兩組 $LKTS(15)$, 簡則簡矣, 但初學者若欲窺其堂奧, 實屬不易, 在這篇短文裡, 我們擬以極爲淺顯的角度, 來構作一些 $STS(13)$, $STS(15)$ (見第四節)。同時, 也要以異於 Denniston 及康教授的方法, 提供一組 $LKTS$ (15) (見第五節)。

三.KTS(15)與拈戲的關係

首先, 我們觀察一個 $KTS(15)$ 的例子 β_0 , 見康文 ([4], 頁 32)

	第一組			第二組			第三組			第四組			第五組		
第一日	1	2	3	4	8	12	5	10	15	6	11	13	7	9	14
第二日	1	4	5	2	8	10	3	13	14	6	9	15	7	11	12
第三日	1	6	7	2	9	11	3	12	15	4	10	14	5	8	13
第四日	1	8	9	2	12	14	3	5	6	4	11	15	7	10	13
第五日	1	10	11	2	13	15	3	4	7	5	9	12	6	8	14
第六日	1	12	13	2	4	6	3	9	10	5	11	14	7	8	15
第七日	1	14	15	2	5	7	3	8	11	4	9	13	6	10	12

爲了說明其特殊的架構, 我們先介紹一種運算, 令 a, b 爲正整數, 以 $(a)_2$, $(b)_2$ 分別表其二進位表法 , 以二進位的方式算出 $(a)_2$ 與 $(b)_2$ 之和, 再算出其對應的十進位表法, 以 $a \oplus b$ 表之, 例如: $5 \oplus 7 (= 101 + 111 = 010) = 2$。茲將其在集合 $\{1, 2, 3, 4, \cdots, 14, 15\}$ 上的運算表列如下:

$\oplus$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1		3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
2			1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
3				7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
4					1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
5						3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
6							1	14	15	12	13	10	11	8	9
7								15	14	13	12	11	10	9	8

在不失一般性的情形下, 設$\{1, 2, 3\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{1, 6, 7\}$, $\{1, 8, 9\}$, $\{1, 10, 11\}$, $\{1, 12, 13\}$, $\{1, 14, 15\}$ 等三元素集合作爲各日之第一組, 然後自第一日第二組起按下述程序實施: 就第 i 日言, 設若前面的 $i-1$ 日及該日前 j 組均已給定。令 a 爲尚未出

現於第 i 日的最小正整數, b 爲大於 a, 尙未出現於第 i 日且 $a\oplus b$ 亦尙未出現於第 i 日的最小整數, 考慮三元素集 $\{a,b,a\oplus b\}$, 如果該組已出現過, 則不取, 並取消其前一三元素組, 然後重複前述程序。若不然, 則以 $\{a,b,a\oplus b\}$ 爲第 i 日的第 $j+1$ 組。準此, 就可以得到上述的 $KTS(15)$。

藉助前述的運算表, 略作說明如下: 例如就第二日而言, $\{1,\ 4,\ 5\}$ 已選定, 尙爲出現的最小整數爲2, (即a), 又$2\oplus 3=1$已出現, 3不 取, $4,5$ 已出現在第一組, 不取, 又 $2\oplus 6=4$ 已出現, 6 不取; $2\oplus 7=5$ 已出現, 7 不取; 而 $2\oplus 8=10$, 8 和10 均爲首次出現, 且 $\{2,8,10\}$ 尙未出現過, 是以 $\{2,8,10\}$ 爲第二日的第二組。繼 $\{2,8,10\}$ 之後, 得 $\{3,12,15\}$, 再得 $\{6,11,13\}$, 卻已出現於第一日第四組, 故不取 $\{6,11,13\}$, 並取消 $\{3,12,15\}$, 是以第二日第三組爲 $\{3,13,14\}$ 所取代, 餘類推。值得一提的是 $a\oplus b$ 的演算法也用在"三堆拈戲"的求勝步驟裡。(見 [1], 頁 6,7)。

爲了要搜尋 $LKTS(15)$, 勢必需要一些現成的 $KTS(15)$ 才成。下列引裡, 其理至明, 證明從略。

引理: 若 (X,β), 爲一柯克曼三元系, 且 σ 爲 X 的一個置換, 則 (X,β^σ) 亦爲一柯克曼三元系, 式中 $\beta^\sigma=\{\beta^\sigma|B\in\beta\}$。

設 n 爲一個正整數, 爲方便計, 此後我們以 $\mathbf{N}_n$ 表示集合 $\{1,2,3,\cdots,n-1,n\}$; 對正整數 a,b 而言, 我們約定:

$$a\dotplus b(mod\,n)=\begin{cases}a+b & 如果\ a+b\leq n\\ r & 如果\ a+b=tn+r,\\ & t\geq 0,\ 1\leq r\leq n\end{cases}$$

例: 若 $X=\mathbf{N}_{15}$ 並令

$$\begin{aligned}\sigma_1(x) &= 2x+1\ (mod\,15)\\ \sigma_2(x) &= 7x\quad (mod\,15)\\ \sigma_3(x) &= x+2\ \ (mod\,12),\ 1\leq x\leq 12,\\ &\quad \alpha_3(y)=y,\ \ 13\leq y\leq 15;\\ \sigma_4(y) &= x+1\ \ (mod\,10),\ 1\leq x\leq 10;\\ &\quad \sigma_4(y)=y,\ \ 11\leq y\leq 15\end{aligned}$$

則 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$ 均爲 $\mathbf{N}_{15}$ 的置換。令 $\beta_1=\beta_0^{\sigma_1}$, $\beta_2=\beta_2^{\sigma_1}$, $\beta_3=\beta_1^{\sigma_2}$, $\beta_4=\beta_3^{\sigma_3}$, $\beta_5=\beta_4^{\sigma_4}$, $\beta_6=\beta_5^{\sigma_4}$ (式中 β_0 請見本節之首例), 則 $(X\,,\beta_i)$, $0\leq i\leq 6$, 亦均各爲柯克曼三元系。

如何選取 β 及適當的置換 σ, 使得 β, β^σ 互斥, 實爲一重要且有趣的課題。

四.STS(13),STS(15)的實際構作

在這一節裡, 我們擬實際構作多組 STS (13), $KTS(15)$, 以及 $LKTS(15)$。最根本的構想是在 $\binom{\mathbf{N}_{13}}{3}$ 裡找個三元素集合 A, 在 $i\neq j$ 時合於 $A+i,A+j$ 至多只有一個公共元素的要求, 式中 $A+i=\{x+i(mod\,13)|x\in A\}$, 視 0 與 13 爲相同的元素。

若 $A=\{1,b,c\}$, $1<b<c$, 定義其差集 $d(A)$ 爲 $\{\pm(b-1),\pm(c-b),\pm(c-1)\}$, 式中 $\pm a$ 取其值介於 1 與 7 之間者。下面的引理提供了一個選取的辦法, 其證明甚爲淺顯, 從略。

引理: 若 $A=\{1,b,c\}\in\binom{\mathbf{N}_{13}}{3}$, $1<b<c$, 且 $c-b$, $b-1$, $1-c$ 兩兩互異, 則 $|A+i\cap A+j|\leq 1$, $i\neq j$。

如果 $A=\{1,b,c\}\in\binom{\mathbf{N}_{13}}{3}$ 滿足引理裡的條件, 則 $\widetilde{A}=\{A+i|0\leq i\leq 12\}$ 爲由 $\mathbf{N}_{13}$ 裡 13 個三元素子集合組成 (恰爲 $STS(13)$ 區組數 26 的一半), 並且 $\mathbf{N}_{13}$ 的任意兩相異點至多落在 $\widetilde{A}$ 裡一個三元素子集。因此 $\widetilde{A}$ 裡的三元素集尙不違背斯坦納三元系的要求。是否可在 $\widetilde{A}$ 上添加其他的三元素子集合, 使其構成一個斯坦納三元系, 或甚至於是柯克曼三元系呢? 下面的引理告訴我們只要另外找一個 B, 且 $d(A)$, $d(B)$ 互斥即可。

引理: 若 $A,B\in\binom{\mathbf{N}_{13}}{3}$ 滿足 $|d(A)|=|d(B)|=3$ 及 $d(A)$, $d(B)$ 互斥的條件, 則 $|A+i\cap B+j|\leq 1$ 對 $0\leq i,j\leq 12$ 均能成立。因此, $(\mathbf{N}_{13},\widetilde{A}\cup\widetilde{B})$ 爲一個斯坦納三元系 $STS(13)$, 式中 $\widetilde{A}\cup\widetilde{B}=\{A+i,B+j|0\leq i,\ j\leq 12\}$。

例: 在 $\mathbf{N}_{13}$ 裡, $\{1,2,5\}$, $\{1,2,11\}$ 均以 $\{1,3,4\}$ 爲其差集, 而 $\{1,3,8\}$, $\{1,3,9\}$ 均以 $\{2,5,6\}$ 爲其差集, 且此兩差集 $\{1,3,4\}$ 與 $\{2,5,6\}$ 互斥。根據前述引理, 我們得到四個斯坦納三元系, $\widetilde{\{1,2,5\}}\cup\widetilde{\{1,3,8\}}\cup\widetilde{\{1,2,5\}}\cup\widetilde{\{1,3,9\}}$, $\widetilde{\{1,2,11\}}\cup\widetilde{\{1,3,8\}}$ 和 $\widetilde{\{1,2,11\}}\cup\widetilde{\{1,3,9\}}$。

其次我們考慮斯坦納三元系 $STS(15)$。因爲 $STS(15)$ 的區組數 35, 比 15 的兩倍多 5, 是以仿前述構想造出來的三元素子集族尙不足以構成 $STS(15)$, 然而我們可適當的選取其餘 5 個區組, 使其合併起來後形成 $STS(15)$。

在 $\mathbf{N}_{15}$ 裡, $\{1,2,5\}$, $\{1,2,13\}$ 以 $\{1,3,4\}$ 爲其差集, 而 $\{1,3,9\}$, $\{1,3,10\}$ 以 $\{2,6,7\}$ 爲其差集, 且該兩差集 $\{1,3,4\}$, $\{2,6,7\}$ 互斥, 是以 $\widetilde{\{1,2,5\}}\cup\widetilde{\{1,3,9\}}$ 裡有 30 個三元素子集, 且 $\mathbf{N}_{15}$ 的任意兩相異點至多落於其中的一個。值得注意的是 $\{1,3,4\}\cup\{1,6,7\}$ 與 $\mathbf{N}_{15}$ 的前半 $\{1,2,\cdots,7\}$ 相較, 唯獨漏掉了 5。這項觀察提醒我們以 $\{1,6,11\}$, $\{2,7,12\}$, $\{3,8,13\}$, $\{4,9,14\}$, $\{5,10,15\}$ 補足之。我們可以得到:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \widetilde{\{1,2,5\}}\cup\widetilde{\{1,3,9\}}\cup\widetilde{\{1,6,11\}},\\
\beta_2 &= \widetilde{\{1,2,5\}}\cup\widetilde{\{1,3,10\}}\cup\widetilde{\{1,6,11\}},\\
\beta_3 &= \widetilde{\{1,2,13\}}\cup\widetilde{\{1,3,9\}}\cup\widetilde{\{1,6,11\}},\\
\beta_4 &= \widetilde{\{1,2,13\}}\cup\widetilde{\{1,3,10\}}\cup\widetilde{\{1,6,11\}}
\end{aligned}$$

此等均爲$STS(15)$, 且β_1,β_4更爲$KTS(15)$。

五.$LKTS(15)$ 的一個例子

在康文 ([4], 頁32,36) 裡, 提供兩組$LKTS$ (15), 它們分別藉著電子計算機及有限域的協助而構作出來。在這一節裡, 我們擬再提出一組 $LKTS(15)$, 其構作方法及驗證均極爲淺顯。

承續在上節所考慮的構想, 考慮下列的 $KTS(15)$, 記爲 H_0

1 2 14	3 7 8	4 5 12	6 9 11	10 13 15
1 3 13	2 7 12	4 11 14	5 6 15	8 9 10
1 4 10	2 3 6	5 9 13	7 14 15	8 11 12
1 5 11	2 9 15	3 10 12	4 6 7	8 13 14
1 6 8	2 4 13	3 11 15	5 7 10	9 12 14
1 7 9	2 10 11	3 5 14	4 8 15	6 12 13
1 12 15	2 5 8	3 4 9	6 10 14	7 11 13

我們視 H_0 爲一母體, 透過 $\mathbf{N}_{15}$ 的一個適當置換, 而得一串 $KTS(15)$, 並進而說明其構成一組 $LKTS(15)$。首先我們觀察 H_0 的特點: 在 H_0 的 35 個區組裡,

(1) 恰有一個區組 $\{7,14,15\}$, 同時包含 14, 15。

(2) 有六個區組含 15, 但不含 14; 表之爲 $\{x,y,15\}$, $x<y\le 13$。

(3) 另有六個區組含 14, 但不含 15; 表之爲 $\{x,y,14\}$, $x<y\le 14$。

(4) 有 22 個區組不含 14, 15; 表之爲$\{x,y,z\}$, $x<y<z<14$。

尤有進者, 在 (2) 裡, $y-x$ 兩兩互異, 在 (3) 裡, $y-x$ 兩兩互異, 在 (4) 裡, 序對 $(y-x,z-y)$ 兩兩互異。

其次, 我們考慮 $\mathbf{N}_{15}$ 的一個置換 $\sigma(x)=x+1\ (mod\,13)$, $1\le x\le 13$, $\sigma(14)=14$, $\sigma(15)=15$。易知, $\sigma^i=x+i(mod\,13)$, $\sigma^i(14)=14$, $\sigma^i(15)=15$。根據此等置換, 令 $H_i=H_0^{\sigma^i}$, $1\le i\le 12$。由前述引理知, 每一個 H_i, $0\le i\le 12$ 均爲一組 $KTS(15)$。

因爲$\{7,14,15\}\in H_0$,$\sigma^i(\{7,14,15\})=\{7+i(mod\,13),14,15\}\in H_i$, $1\le i\le 12$, 尤有進者 $H_i\cap H_j=\phi$, $i\ne j$, 是以 $\bigcup_{i=0}^{12} H_i$, 也就佔滿了 $\binom{\mathbf{N}_{15}}{3}$ 的全體, 亦即 $\{H_i|0\le i\le 12\}$ 構成了一組 $LKTS(15)$。表列於下:

$H_0(1)$	1 2 14	3 7 8	4 5 12	6 9 11	10 13 15
(2)	1 3 13	2 7 12	4 11 14	5 6 15	8 9 10
(3)	1 4 10	2 3 6	5 9 13	7 14 15	8 11 12
(4)	1 5 11	2 9 15	3 10 12	4 6 7	8 13 14
(5)	1 6 8	2 4 13	3 11 15	5 7 10	9 12 14
(6)	1 7 9	2 10 11	3 5 14	4 8 15	6 12 13
(7)	1 12 15	2 5 8	3 4 9	6 10 14	7 11 13
$H_1(1)$	2 3 14	4 8 9	5 6 13	7 10 12	1 11 15
(2)	1 2 4	3 8 13	5 12 14	6 7 15	9 10 11
(3)	2 5 11	3 4 7	1 6 10	8 14 15	9 12 13
(4)	2 6 12	3 10 15	4 11 13	5 7 8	1 9 14
(5)	2 7 9	1 3 5	4 12 15	6 8 11	10 13 14
(6)	2 8 10	3 11 12	4 6 14	5 9 15	1 7 13
(7)	2 13 15	3 6 9	4 5 10	7 11 14	1 8 12
$H_2(1)$	3 4 14	5 9 10	1 6 7	8 11 13	2 12 15
(2)	2 3 5	1 4 9	6 13 14	7 8 15	10 11 12
(3)	3 6 12	4 5 8	2 7 11	9 14 15	1 10 13
(4)	3 7 13	4 11 15	1 5 12	6 8 9	2 10 14
(5)	3 8 10	2 4 6	5 13 15	7 9 12	1 11 14
(6)	3 9 11	4 12 13	5 7 14	6 10 15	1 2 8
(7)	1 3 15	4 7 10	5 6 11	8 12 14	2 9 13
$H_3(1)$	4 5 14	6 10 11	2 7 8	1 9 12	3 13 15
(2)	3 4 6	2 5 10	1 7 14	8 9 15	11 12 13
(3)	4 7 13	5 6 9	3 8 12	10 14 15	1 2 11
(4)	1 4 8	5 12 15	2 6 13	7 9 10	3 11 14
(5)	4 9 11	3 5 7	1 6 15	8 10 13	2 12 14
(6)	4 10 12	1 5 13	6 8 14	7 11 15	2 3 9
(7)	2 4 15	5 8 11	6 7 12	9 13 14	1 3 10

$H_4(1)$	5 6 14	7 11 12	3 8 9	2 10 13	1 4 15
(2)	4 5 7	3 6 11	2 8 14	9 10 15	1 12 13
(3)	1 5 8	6 7 10	4 9 13	11 14 15	2 3 12
(4)	2 5 9	6 13 15	1 3 7	8 10 11	4 12 14
(5)	5 10 12	4 6 8	2 7 15	1 9 11	3 13 14
(6)	5 11 13	1 2 6	7 9 14	8 12 15	3 4 10
(7)	3 5 15	6 9 12	7 8 13	1 10 14	2 4 11
$H_5(1)$	6 7 14	8 12 13	4 9 10	1 3 11	2 5 15
(2)	5 6 8	4 7 12	3 9 14	10 11 15	1 2 13
(3)	2 6 9	7 8 11	1 5 10	12 14 15	3 4 13
(4)	3 6 10	1 7 15	2 4 8	9 11 12	5 13 14
(5)	6 11 13	5 7 9	3 8 15	2 10 12	1 4 14
(6)	1 6 12	2 3 7	8 10 14	9 13 15	4 5 11
(7)	4 6 15	7 10 13	1 8 9	2 11 14	3 5 12
$H_6(1)$	7 8 14	1 9 13	5 10 11	2 4 12	3 6 15
(2)	6 7 9	5 8 13	4 10 14	11 12 15	1 2 3
(3)	3 7 10	8 9 12	2 6 11	13 14 15	1 4 5
(4)	4 7 11	2 8 15	3 5 9	10 12 13	1 6 14
(5)	1 7 12	6 8 10	4 9 15	3 11 13	2 5 14
(6)	2 7 13	3 4 8	9 11 14	1 10 15	5 6 12
(7)	5 7 15	1 8 11	2 9 10	3 12 14	4 6 13
$H_7(1)$	8 9 14	1 2 10	6 11 12	3 5 13	4 7 15
(2)	7 8 10	1 6 9	5 11 14	12 13 15	2 3 4
(3)	4 8 11	9 10 13	3 7 12	1 14 15	2 5 6
(4)	5 8 12	3 9 15	4 6 10	1 11 13	2 7 14
(5)	2 8 13	7 9 11	5 10 15	1 4 12	3 6 14
(6)	1 3 8	4 5 9	10 12 14	2 11 15	6 7 13
(7)	6 8 15	2 9 12	3 10 11	4 13 14	1 5 7
$H_8(1)$	9 10 14	2 3 11	7 12 13	1 4 6	5 8 15
(2)	8 9 11	2 7 10	6 12 14	1 13 15	3 4 5
(3)	5 9 12	1 10 11	4 8 13	2 14 15	3 6 7
(4)	6 9 13	4 10 15	5 7 11	1 2 12	3 8 14
(5)	1 3 9	8 10 12	6 11 15	2 5 13	4 7 14
(6)	2 4 9	5 6 10	11 13 14	3 12 15	1 7 8

H_9(1)	10 11 14	3 4 12	1 8 13	2 5 7	6 9 15
(2)	9 10 12	3 8 11	7 13 14	1 2 15	4 5 6
(3)	6 10 13	2 11 12	1 5 9	3 14 15	4 7 8
(4)	1 7 10	5 11 15	6 8 12	2 3 13	4 9 14
(5)	2 4 10	9 11 13	7 12 15	1 3 6	5 8 14
(6)	3 5 10	6 7 11	1 12 14	4 13 15	2 8 9
(7)	8 10 15	1 4 11	5 12 13	2 6 14	3 7 9
H_{10}(1)	11 12 14	4 5 13	1 2 9	3 6 8	7 10 15
(2)	10 11 13	4 9 12	1 8 14	2 3 15	5 6 7
(3)	1 7 11	3 12 13	2 6 10	4 14 15	5 8 9
(4)	2 8 11	6 12 15	7 9 13	1 3 4	5 10 14
(5)	3 5 11	1 10 12	8 13 15	2 4 7	6 9 14
(6)	4 6 11	7 8 12	2 13 14	1 5 15	3 9 10
(7)	9 11 15	2 5 12	1 6 13	3 7 14	4 8 10
H_{11}(1)	12 13 14	1 5 6	2 3 10	4 7 9	8 11 15
(2)	1 11 12	5 10 13	2 9 14	3 4 15	6 7 8
(3)	2 8 12	1 4 13	3 7 11	5 14 15	6 9 10
(4)	3 9 12	7 13 15	1 8 10	2 4 5	6 11 14
(5)	4 6 12	2 11 13	1 9 15	3 5 8	7 10 14
(6)	5 7 12	8 9 13	1 3 14	2 6 15	4 10 11
(7)	10 12 15	3 6 13	1 2 7	4 8 14	5 9 11
H_{12}(1)	1 13 14	2 6 7	3 4 11	5 8 10	9 12 15
(2)	2 12 13	1 6 11	3 10 14	4 5 15	7 8 9
(3)	3 9 13	1 2 5	4 8 12	6 14 15	7 10 11
(4)	4 10 13	1 8 15	2 9 11	3 5 6	7 12 14
(5)	5 7 13	1 3 12	2 10 15	4 6 9	8 11 14
(6)	6 8 13	1 9 10	2 4 14	3 7 15	5 11 12
(7)	11 13 15	1 4 7	2 3 8	5 9 14	6 10 12

本文承蒙黃大原教授協助、指正, 特此銘謝。

參考書目

1. 張鎭華, 拈及其各種變形遊戲, 數學傳播三卷二期 (民 67年11月), 頁6-15。
2. 黃光明, 斯坦納二重奏, 數學傳播十卷一期(民75年3月), 頁2-8。
3. 黃大原, 白雪公主的邀宴, 數學傳播十卷一期(民75年3月), 頁14-32。
4. 康慶德, 從西爾威斯特問題談起, 數學傳播十五卷二期 (民80年6月), 頁32-42。
5. 蕭文強, 有沒有10階影射平面?, 數學傳播十五卷二期 (民80年6月), 頁22-31。

—本文作者任教於中壢市健行工專—