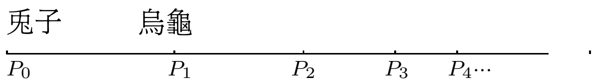
中學數學漫談

由龜兔賽跑談無窮級數求和

洪銈雄

大家一定都聽說過龜兎賽跑的故事: 驕傲的兎子常常嘲笑烏龜說: 看你這個醜傢伙, 爬起路來又笨又慢, 假如我們來作一萬公尺的賽跑, 我讓你先爬一千公尺, 我還是會贏你。烏龜實在嚥不下這口氣, 終於答應跟兎子比賽, 他們請來了猴子當裁判, 起跑前烏龜先爬在前面一千公尺, 然後槍聲一響, 兩者同時出發, 祇見兎子健步如飛, 一下子就趕過烏龜而遙遙領先, 這時兎子驕傲的心理又在作祟了: 現在我已經領先這麼多了, 我姑且在路旁陰涼處休息一陣, 等等烏龜也不遲啊! 說著躺下就睡著了, 一臉神氣狀, 還將屁股朝向烏龜呢! 正當兎子好夢正酣時, 烏龜默默辛苦地爬著, 發揮堅忍不拔的毅力一直爬到終點, 獲得了這場比賽的勝利, 這時兎子還未醒過來呢!

當人們聽了這個故事都在爲烏龜的獲勝兎子的慘敗高興時, 希臘有一位詭辯家齊諾 (Zeno), 卻給大家潑了一盆冷水, 他說: 這個故事是絕對不可能發生的, 因爲當兎子讓烏龜先爬行一段距離時, 兎子就永遠趕不上烏龜了, 因而不會發生兎子睡覺而烏龜得勝的事來, 他的理由是: (參閱下圖)



假如出發時兎子在 P_0 處, 而烏龜在兎子前面 P_1 處, 則當兎子由 P_0 跑到 P_1 時, 烏龜同時也由 P_1 爬到了 P_2, 然後當兎子由 P_1 跑到 P_2 時, 烏龜也同時由 P_2 爬到了 P_3, 如此繼續兎子永遠落後烏龜一段距離, 因而趕不上烏龜。

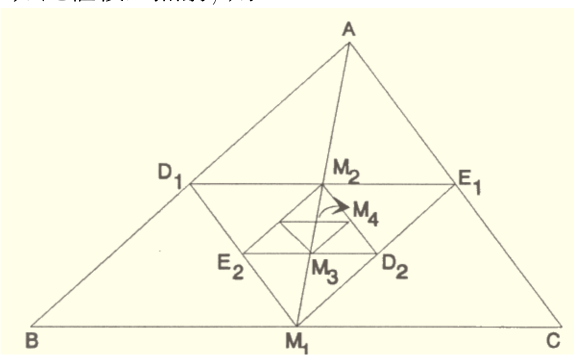
當然, 大家不會相信齊諾的鬼話, 我們可以用無窮級數求和來駁倒他, 爲了說明方便, 我們得假設一些文字數字來計算比較好, 譬如說我們假設 $\overline{P_0P_1}=a$, 而兎子的速度爲每秒 V_1 公尺, 烏龜的速度爲每秒 V_2 公尺 ($V_1>V_2$ 且設兩者均以等速度前進), 則兎子由 P_0 跑到 P_1 的時間爲 a/V_1 (秒), 這也是烏龜由 P_1 爬到 P_2 的時間, 因此烏龜由 P_1 爬到 P_2 的距離 $\overline{P_1P_2}=(\frac{a}{V_1})\times V_2=a(\frac{V_2}{V_1})$ (公尺), 仿此可求得 $\overline{P_2P_3}=a(\frac{V_2}{V_1^2})\times V_2=a(\frac{V_2}{V_1})^2$ (公尺), $\overline{P_3P_4}=a(\frac{V_2}{V_1})^3$ (公尺), 於是 $\overline{P_0P_1}+\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\cdots=a+a(\frac{V_2}{V_1})+a(\frac{V_2}{V_1})^2+a(\frac{V_2}{V_1})^3+\cdots$ 成等

比級數, 藉無窮等比級數求和可得上式之和爲 $\frac{av_1}{v_1-v_2}$ (公尺) 這是兎子趕上烏龜所跑的距離, 由此可求得兎子趕上烏龜所花的時間是 $\frac{a}{v_1-v_2}$ (秒), 這就表示兎了在有限的時間內就能趕上烏龜, 當然過此時間後兎子就超過烏龜了! (註1)

上面 $\overline{P_0P_1}+\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\cdots=a+a(\frac{v_2}{v_1})+a(\frac{v_2}{v_1})^2+a(\frac{v_2}{v_1})^3+\cdots$ 中, 因爲有無窮多項, 所以稱它是一個無窮級數, 它的和是怎麼求出來的呢? 爲了答覆這個問題, 我們先來看一個例子:

例1. 試求 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$ 的和是多少?

解: 這個問題我們可以用圖形來解答它, 如下圖, $\triangle ABC$ 中令 $\overline{AM_1}$ 爲 $\overline{BC}$ 上的中線其長爲1, 取 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 兩邊的中點 D_1, E_1 與 M_1 連成 $\triangle D_1M_1E_1$, 令 $\overline{D_1E_1}$ 交 $\overline{AM_1}$ 於 M_2, 又連 $\overline{D_1M_1}$, $\overline{E_1M_1}$ 之中點 E_2, D_2 所成線段交 $\overline{AM_1}$ 於 M_3, 又連 $\overline{E_2M_2}$, $\overline{D_2M_2}$ 之中點所成線段交 $\overline{AM_1}$ 於 $M_4\cdots$ 如此繼續至無窮, 則



$$\overline{AM_1}=1$$
$$\overline{AM_2}=1-\frac{1}{2}$$
$$\overline{AM_3}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$
$$\overline{AM_4}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$$

所以$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}=\overline{AM_n}$

因 n 越大, M_n 會越接近於 G, 也就是 $\overline{AM_n}$ 會越接近於 $\overline{AG}$(G 爲 $\triangle ABC$ 的重心, 也是 $\triangle D_1M_1E_1$, $\triangle D_2M_2E_2\cdots$ 的重心),

故 $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$$
$$=\overline{AG}=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

上面這是一個無窮多個數 (項) 相加能得一個有限値的例子 (註2), 也就是一個無窮級數有和的例子, 直覺上您會覺得一個無窮級數 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$ 有和的先決條件是: 當 $n=1,2,3\cdots$ 逐次增大時, $|a_n|$ 越來越小, 也就是 a_n 越來越接近於 0(這種接近可到任意所欲之程度), 我們就稱數列 $\langle a_n\rangle$ 的極限爲 0, 記爲 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 或 $a_n\to 0$, 但這祇是一個必要條件, 並非充分條件, 也就是說: 當級數 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$ 有和時, 必 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 時, 級數 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ 未必有和, 爲什麼這樣, 我們等下再談。

那麼一個級數有和時, 我們如何求它的和呢? 除了上面的例1外, 我們再舉一個例子, 希望能由此得出一般求無窮級數之和的方法 (假如它有和的話):

例2. 無窮級數 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+(\frac{1}{2})^n+\cdots$, 它的和是多少?

這個問題我們可以把它看成是長爲“1”的線段, 第一次去掉全長的一半, 第二次去掉第一次所剩下的一半, 第三次去掉第二次所剩下的一半 $\cdots$, 如此繼續無窮多次, 求所去掉之線段長的總和是多少? 很明顯的, 我們可以發現每次去掉前次所剩之一半, 剩下的另一半必越來越小 (當然所去掉的一半也很小), 因此次數多了以後所剩下的應很接近於 0, 因而去掉的線段長總和應很接近很接近於原線段的長“1”, 故我們可以想像無窮多次後, 其總和應爲 1, 我們就稱無窮級數 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+(\frac{1}{2})^n+\cdots$ 其和爲 1。

將以上步驟用數學符號重新表示如下:

令這個級數的第 n 項爲 a_n, 則 $a_n=(\frac{1}{2})^n$, 也就是第 n 次去掉之線段長, 那麼第 1 次到第 n 次所去掉之線段長的總和 (以 S_n 表示) 爲 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+(\frac{1}{2})^n$, 藉等比級數求和可得 $S_n=\frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}=1-(\frac{1}{2})^n$, 因當 $n=1,2,3\cdots$ 逐次增大時, $(\frac{1}{2})^n$ 越來越接近於 0, 故 S_n 越來越接近於 1(即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$), 這個 1 就是無窮級數 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+(\frac{1}{2})^n+\cdots$ 的和。

由上面的討論可知:

對一般無窮等比級數 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$ 來講, 令首 n 項的和爲 S_n(即 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, 亦稱爲 n 項部分和), 當 $n=1,2,3\cdots$ 逐次增大時, 假如 S_n 越來越接近於某一個定數 S, 這個定數就稱爲此無窮級數的和, 即和 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$, 這是說當 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在時, 我們求出 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 的值就是和了; 可是當 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在時, 那當然此級數就沒有和了, 因此一個級數 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$ 有沒有和, 完全取決於 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 是否存在, 存在就有和, 反之則無。有和的級數稱爲收斂級數, 沒有和的級數稱爲發散級數, 舉個例子:

例3.判斷無窮級數 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}+\cdots$ 是否收斂? 若收斂並求其和。

解:

1. 先求 S_n,

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots\\ &\quad+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\\ &= \frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots\\ &\quad+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]\\ &= \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})\end{aligned}$$

2.因爲當 $n=1,2,3\cdots$ 逐次增大時, $\frac{1}{2n+1}$ 越來越接近於 0, 故 $1-\frac{1}{2n+1}$ 越來越接近於 1, 所以$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$ 越來越接近於 $\frac{1}{2}$, 也就是 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$, 故此級數收斂, 其和爲 $\frac{1}{2}$。

我們再回顧例1重新將其列爲例 4. 用求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 的方法求其和於下:

例 4. 求無窮級數 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$ 的和。

解:

1. 先求

$$S_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1[1-(-\frac{1}{2})^n]}{1-(-\frac{1}{2})} \\ &= \frac{2}{3}\left[1-(-\frac{1}{2})^n\right] \end{aligned}$$

2. 當 $n=1,2,3,\cdots$ 逐次增大時, $(-\frac{1}{2})^n$ 越來越接近於 0, 故 $1-(-\frac{1}{2})^n$ 越來越接近於 1, 所以$\frac{2}{3}\left[1-(-\frac{1}{2})^n\right]$ 越來越接近於 $\frac{2}{3}$, 也就是 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{2}{3}$, 故此級數的和為 $\frac{2}{3}$。

例4與例2都是無窮等比級數的例子, 仿照例4的辦法, 我們可以證明:

當 $|r|<1$ 時, 無窮等比級數 $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$ 收斂, 其和為 $\frac{a}{1-r}$, $|r|>1$ 時, 此級數發散, 沒有和。

因為此部分課本上已有詳細討論, 故在此不再贅述, 不過我們可以利用這個結果來說明本文開始時, 龜兔賽跑中兔子追上烏龜所跑的距離 $a+a(\frac{V_2}{V_1})+a(\frac{V_2}{V_1})^2+\cdots=\frac{aV_1}{V_1-V_2}$ 是怎麼求出來的? 因為它是一個無窮等比級數, 公比 $r=\frac{V_2}{V_1}<1$, 首項 a, 故其和 $=\frac{a}{1-\frac{V_2}{V_1}}=\frac{aV_1}{V_1-V_2}$。

最後我們再來說明一下在前面所提: 若無窮級數 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$ 收斂則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, 但反之則未必。我們將證明前者, 並舉反例說明後者:

證明:

1. $a_n=(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq 2)$
2. 因級數 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ 收斂, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1}$ 亦存在且 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1}$(註3)
3. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty} S_n-\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1}=0$(註4)。

反之: 例如無窮級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$, 其 n 項部分和 $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$, 我們考慮 n 為 2 之乘冪時, S_n 之值:

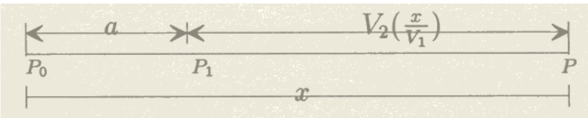
$$\begin{aligned}
\text{當} n=1\text{時}, S_1 &= 1 \\
n=2\text{時}, S_2 &= 1+\frac{1}{2} \\
n=4\text{時}, S_4 &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \\
&> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}\times 2 \\
n=8\text{時}, S_8 &= S_4+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}) \\
&> 1+\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{8}\times 4 \\
&= 1+\frac{1}{2}\times 3 \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \\
n=2^m\text{時}, S_{2^m} &= S_{2^{m-1}} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{2^{m-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^m-1}+\frac{1}{2^m}}_{\text{共}2^{m-1}\text{個}} \\
&> 1+\frac{1}{2}\times(m-1)+\frac{1}{2} \\
&= 1+\frac{1}{2}\times m.
\end{aligned}$$

當然 m 越大, 則 S_{2^m} 也越大, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在, 也就是原級數發散。

從上面這個例子, 我們也可看出一個無窮級數之 n 項部分和 S_n 有時是求不出來的,

因此要求出此級數的和或判斷其發散有時並非易事, 不過當一個無窮級數成等比時, 要求出其和或判斷其發散, 則甚爲容易。

註1. 當然這裡您可以用簡單的代數方程式來求得距離, 不過基本上仍要 “兔子能在有限時間內趕上烏龜” 之前提下才能辦到:



設兔子趕上烏龜所跑的距離共 x 公尺, 則兔子跑此距離所花的時間爲 $\frac{x}{v_1}$ (秒), 在此時間內烏龜共爬了 $v_2(\frac{x}{v_1})$(公尺), 因爲起跑時烏龜是在兔子之前 a 公尺, 故 $x = a + v_2(\frac{x}{v_1})$(參閱上圖), 由此解得 $x = \frac{av_1}{v_1 - v_2}$(公尺)。

註2. 有限多個數相加, 其和當然是定值, 但無窮多個數相加就未必了, 如 $1+2+3+\cdots+n+\cdots$ 與 $1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$ 其和均非定值。

註3. 一般道理我們不講, 祇舉下例讓您 “相信”: 如設 $S_n = \frac{n}{n+1}$ 則 $S_{n-1} = \frac{n-1}{n}$ 於是 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1}$。

註4. 一般若 $\langle a_n\rangle\langle b_n\rangle$ 均收斂則 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$。$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)\cdot(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$。又設 $b_n \neq 0$, $\forall n \in N$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ 則 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$。

—本文作者任教於省立嘉義女子高級中學—