數學歸納法教學一二

葉東進

數學的教學有形式與實質之分, 形式上的邏輯推導較容易交待, 而實質所包含的脈絡的析釋則是頗費心思的, 前者可以是科學, 後者則富含藝術。

一般課堂上對數學歸納法的教學, 往往只及形式層面, 也就是對一個已知的目標命題進行檢驗及推廣的邏輯演示, 至於這個目標命題何以產生、爲何存在的來龍去脈的探索, 此種實質性的工作, 則殊少觸及, 在教學上而言, 不無遺憾。

本文藉幾個問題的處理爲例, 說明個人對數學歸納法在實質教學上的淺見。

數學歸納法的意義有兩個層面, 一是實質層面: 從少數的事例中摸索出規律; 一是形式層面: 從理論上證明該規律的一般性。以往教科書的編寫以及課堂的教學大多只及後一層面而忽略了前一層面, 現行的高中基礎數學教材注意到了這項缺失而作了部分補正, 但是仍有可議之處。

我們知道, 在有關整數的級數求和問題上, 級數 $1+2+3+\cdots+n$, $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$, $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$, $1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$等扮演著基本而重要的模式角色, 運用它們, 可以計算像是 $1\times2+2\times3+\cdots+99\times100$ 或是 $1\times3\times5+3\times5\times7+\cdots+(2n-1)(2n+1)(2n+3)$ 的求和等諸如此類的問題。如果教學目標是設定在解決此類問題上面的話, 那麼找出一個方便而具一般性的方法以計算上述基本模式的求和公式便是要緊的事。教材上提到了下面方法:

比如已經知道 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, 想找出 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 求和的計算公式。由

$$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$$

令 $k=1,2,\cdots,n$, 則得

$$\begin{cases} 2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1 \\ 3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1 \\ \quad\vdots \\ (n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1 \end{cases}$$

上述n個等式相加, 得

$$(n+1)^3-1^3 = 3\sum_{k-1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+n$$

所以 $$3\sum_{k=1}^{n}k^2 = (n+1)^3-1^3-3\sum_{k=1}^{n}k-n = n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$

即$1^2+2^2+3^3 + \cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

仿上面方法, 可以得到

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}\text{等。}$$

但是, 如果教學目標是放在數學歸納法的意義及方法上, 上面的處理方式看來就顯得唐突而不自然, 理由是這樣的方式跟數學歸納法的兩個層面都扯不上什麼關係。要特別指出的是, 上面的處理方式正是載在現行教材的數學歸納法單元裡的部分。這是可議處之一。

從數學歸納法的觀點著眼, 如下的安排是否較爲妥當:

(1) $1+2+3+\cdots+n$ 這個級數和公式 $\frac{n(n+1)}{2}$ 已經在教材的前一節有關等差級數的求和中得到, 此處不必再理。

(2) 對

$$\begin{aligned}1^3&=1\\1^3+2^3&=9\\1^3+2^3+3^3&=36\\1^3+2^3+3^3+4^3&=100\end{aligned}$$

諸式的仔細觀察, 我們發現如下的規律:

$$\begin{aligned}1^3&=1^2\\1^3+2^3&=(1+2)^2\\1^3+2^3+3^3&=(1+2+3)^2\\1^3+2^3+3^3+4^3&=(1+2+3+4)^2\end{aligned}$$

因而猜測一般的規律是:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$
$$=(1+2+3+\cdots+n)^2$$

或 $$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

利用數學歸納法證明這個規律具有一般性。

(3) 提醒學生注意:

(i) 形式上, 我們已有 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 及 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, 因此, 對於級數 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$, 甚至 $1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$ 的求和公式的存在與否及其存在形式甚感興趣。

(ii) 實質上, $1+2+3+\cdots+n$, $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$, $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$, $1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$ 的求和公式在計算有關整數的級數求和上是重要而基本的模式。

(iii) 能不能從已知

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\qquad(\mathrm{S}_1)$$

及

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\qquad(\mathrm{S}_2)$$

的形式上, 經由仔細觀察而猜測$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$的求和的可能公式? 提示學生注意:

[1] 級數(S_1)的單項是n的一次式, 和是n的二次式; 級數 (S_2) 的單項是 n 的三次式, 和是 n 的四次式; 猜測: $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 的和會是 n 的三次式!?

[2] 級數 (S_1) 的和 $\frac{n(n+1)}{2}$ 型如分數、分母爲 2; 級數 (S_2) 的和 $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ 型如分數、分母爲 4; 猜測: $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 的和型如分數、分母爲3!?

[3] 級數(S_1)的和 $\frac{n(n+1)}{2}$ 是n的二次多項式, 有因式 n 及 $n+1$; 級數 (S_2) 的和 $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ 是 n 的四次多項式, 有因式 n 及 $n+1$; 猜測: $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 的和是 n 的三次多項式, 也有因式 n 及 $n+1$!?

根據以上三個猜測, 我們可以這樣表示:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(n+a)}{3}$$

接著問: a 是多少?

取 n 的值爲 1, 比較得到 $a=\frac{1}{2}$

也就是說, 我們猜測:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(n+\frac{1}{2})}{3}$$

這個猜測正確嗎? 把數學歸納法的證明搬出來用看看。

(iv) 進一步要求學生猜猜看, $1^4+2^4+3^4+\cdot+n^4$ 的和公式會是怎麼個樣子? 並用數學歸納法證明它。

以上的處理方式, 是不是較爲切合數學歸納法的意義及精神!?

此外, 教材上另一可議處是它列舉的一個例子:

「試證明: 不論 n 爲任何正整數, $10^n+3\cdot 4^n+5$ 都可被 9 整除。」這種方式的提問, 只能及於數學歸納法的形式層面, 沒有觸及它的實質層面, 不是嗎? 有些學生會問: 9 是怎麼事先知道的? 更深刻些的話會問: 怎麼知道 $10^n+3\cdot 4^n+5$ 這樣一個式子 的? 乾脆明白些問: 這個問題是怎樣製造出來的?

當然, 回答學生的問題要達到什麼程度, 得看他們能夠接受的程度以及教學的目標是放在哪個層面上。從啓發的教學觀點來看, 只求形式上的邏輯證明是不夠而且也不是最要緊的, 把一個問題的來龍去脈交代淸楚不僅會引起學生更大的學習興趣, 而且常常也是導引他們學習其它題材的很好的動機。以上面的例子來說, 回答第一個問題是比較容易的:

令

$$f(n) = 10^n+3\cdot 4^n+5$$

則

$$\begin{aligned} f(1) &= 27 = 9\times 3 \\ f(2) &= 153 = 9\times 17 \\ f(3) &= 1197 = 9\times 133 \end{aligned}$$

由於 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 有最大公因數 9, 便猜測 $f(4)$, $f(5)$, $\cdots$, $f(n)$ 都有因數 9。

要回答第二個問題, 我們得換個角度來看才會方便:

首先, $10^n+3\cdot 4^n+5$ 可被 9 整除等同於 $10^n+3\cdot 4^n-4$ 可被 9 整除。

其次, 把 9 看成 x^2, 則 $10^n+3\cdot 4^n-4$ 可看成 $(x^2+1)^n+x(x+1)^n-(x+1)$, 因此, $10^n+3\cdot 4^n-4$ 能否被9整除可以轉化成多項式 $f(x)=(x^2+1)^n+x(x+1)^n-(x+1)$ 是否有因式 x^2。

因為

$$f(0)=0 \text{ 及 } f'(0)=0$$

根據多項式的重根定理, 知 x^2 確為 $(x^2+1)^n+x(x+1)^n-(x+1)$ 的因式。

利用上項結論, 把 x 分別看成是 3,4,5,6 等, 則 $f(x)$ 的值便分別等於 $10^n+3\cdot4^n-4$, $17^n+4\cdot5^n-5$, $26^n+5\cdot6^n-6$, $37^n+6\cdot7^n-7$ 等, 因此, 我們可以製造出一大堆的問題如下:

不論n為任何正整數,

$10^n+3\cdot 4^n+5$ 都可被9整除,
$17^n+4\cdot 5^n+11$ 都可被16整除;
$26^n+5\cdot 6^n+19$ 都可被25整除;
$37^n+6\cdot 7^n+29$ 都可被36整除, 等等。

底下再舉一個頗為困擾初學者的例子:

「不論n為任何正整數, $(3+\sqrt{5})^n$ $+(3-\sqrt{5})^n$ 都可被 2^n整除。」

一般書籍的解法是: 令$f(n)=(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$, 先證明 $f(n+2)=6f(n+1)-4f(n)$, 利用此結論再配以數學歸納法的證明。

叫人疑惑的是: 為什麼會想到 $f(n+2)=6f(n+1)-4f(n)$ 這樣一個式子? 試作分析如下:

取 $\alpha=3+\sqrt{5}$, $\beta=3-\sqrt{5}$
以 α、β 為兩根造出個二次方程式 $x^2-6x+4=0$
所以

$$\begin{cases}\alpha^2=6\alpha-4\\ \beta^2=6\beta-4\end{cases}$$

所以 $\begin{cases}\alpha^{n+2}=6\alpha^{n+1}-4\alpha^n\\ \beta^{n+2}=6\beta^{n+1}-4\beta^n\end{cases}$

所以 $\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=6(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-4(\alpha^n+\beta^n)$

令$f(n)=\alpha^n+\beta^n$, 便得到

$$f(n+2)=6f(n+1)-4f(n)$$

以上的分析當然沒有指出這個問題是如何製造的, 但它其實是底下這個問題的反問題:

「 遞迴數列

$$\begin{cases}a_{n+2}=6a_{n+1}-4a_n\\ a_0=2,\ \ a_1=6,\end{cases}$$

求一般項 a_n 的表式。　」

此問題的一般解法是找出 $x^2=6x-4$ 的兩根 α, β。其中

$$\alpha=3+\sqrt{5},\ \ \beta=3-\sqrt{5}。$$

則一般項a_n可表爲

$$a_n = A(3+\sqrt{5})^n+B(3-\sqrt{5})^n,$$

其中A與B待定,

由

$$\begin{cases} a_0=A+B=2 \\ a_1=A(3+\sqrt{5})+B(3-\sqrt{5})=6 \end{cases}$$

得出

$$A=B=1$$

即

$$a_n=(3+\sqrt{5})^n+(3+\sqrt{5})^n$$

行文到這裡, 順便提出一個有趣的問題:

「是先有$\begin{cases} a_{n+2}=6a_{n+1}-4a_n \\ a_0=2, a_1=6 \end{cases}$ 而導致 $a_n=(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ 呢? 抑或是先有 $a_n=(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ 而導致 $a_{n+2}=6a_{n+1}-4a_n$, $a_0=2$, $a_1=6$ 再聯想到 a_n 恆爲 2^n 的倍數呢?」

這很類似雞生蛋, 蛋生雞的問題, 它的答案並不重要, 可注意的是它們在實質上是表示了同一件事情。

参考資料

1. 高中基礎數學第一册。
2. 普通數學教程, 楊維哲、蔡聰明。
3. 數學歸納法, 華羅庚, 九章。

—本文作者任教於科學園區實驗高中—