遊戲與數學教學

黃毅英

遊戲與玩耍

鄭肇楨 (1983) 在《遊戲與學習》中云:「以前的人常說:『勤有功, 戲無益。』其實這句話最少後半句是錯的。」事實上, 關於玩耍 (play) 與遊戲 (game) 的理論在不斷發展中。從英國 Spencer 的剩餘精力說與德國 Gross的生活準備說開始, 玩耍最初被看成與工作對立, 乃爲剩餘能量的消耗或鬆弛、宣泄和消遣。它非受食物與性之驅動, 又不同於探究, 所著重的爲手段而非結果卻又與閑蕩不同的行爲。玩耍乃超越生活所追求之自由活動 (劉, 1988)。

近年, 研究者認爲工作與玩耍間並不存在不可逾越的鴻溝。某項活動對於某人是工作, 對於另一人可能則是玩耍。例如 Csikszentmichayli 便提出, 玩耍是一種主觀體驗 (flow)。在現代城市化的環境中, 缺乏戶外的活動場地, 家庭結構之縮小令兒童少了與兄弟姊妹玩耍的機會, 而玩具商精製的玩具加上電視的普及鼓勵兒童獨自留在家中玩耍, 故此有人提倡要「教 (兒童懂得去) 玩」(teaching play) (Papalis 和 Olds, 1975)。

隨著普及教育之推行, 教師所面對的已不是精英年代經過篩選的學生, 而是能力與動機都參差不齊的一群學生。更有不少是對數學恐懼和厭惡者。近人提倡多用遊戲於教學中, 由於遊戲比傳統課堂學習更具吸引力, 也更能令學全心全意的投入 (鄭, 1983)。

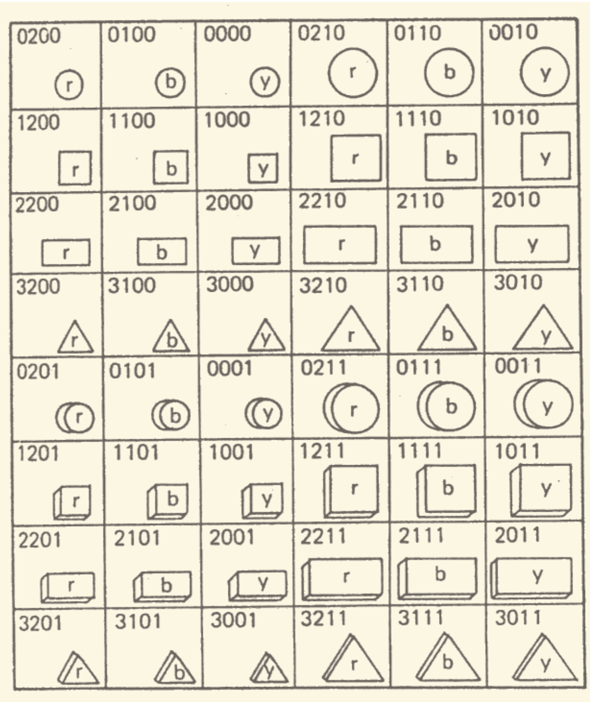
再者, 普及教育的一個重要目的乃爲未來公民作準備。在這觀點下, 學童熟練一大堆公式未必爲最重要者。數學教學理應轉移到解題、自我發現、搜索規律等「過程能力」(process ability)(黃, 1993)。從遊戲中學習, 不只能涉及認知能力、亦涉及情性、官能、社群各區宇。具勝負的遊戲如對奕性遊戲等更能提高參與者的解決難題之能力及從種種觀察與分析, 運用不同策略之能力 (鄭, 1983; 黃, 1992)。

田尼氏的遊戲學習的歷程

田尼氏 (Z. P. Dienes) 根據皮亞傑學習心理學, 建立了一套數學學習歷程的理論。他在《數學的營造》(Dienes, 1981) 一書中提出數學概念的建立可利用遊戲經過六個階段逐步達成。田尼氏更以邏輯的學習爲例:

一. 自由玩耍(free play)。學習者被安排到一個經預先設計的理境中, 使他們能接觸到特定的學習結構。以上面談到的邏輯學

習爲例, 設計者讓學習自由玩耍不同形狀、顏色、大小與厚度的「邏輯木塊」(圖一)。學習者經過了一段時期, 已能留意到其屬性。



圖一. 邏輯木塊

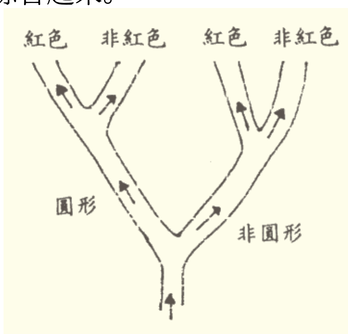
二. 有規律遊戲 (games)。學習者在上一階段受到環境刺激, 對具數學結構的事物作出反應與適應。漸漸, 他們發覺所需的這些反應原來是有規律性的。以上面邏輯學習之例而言, 從讓學習者將木塊分類, 開始分野紅色、非紅色; 圓形、非圓形等。再進一步讓其選出既是紅色又是圓形的木塊、紅色又非圓形木塊等等引入合取、析取、否定等觀念。

三. 找尋共同結構 (searching for commonality) 。再以邏輯木塊爲例, 以圓形, 可有圓而紅、圓而非紅、紅而非圓、既非圓亦非紅四種情況 (圖二)。反覆以三角形、大的、厚的、方形· · ·等, 作分類活動, 學者即能綜合推廣, 知道一般對於 x、y 兩條件, 恆有 x 和 y、x 和非 y、非 x 和 y 及非 x 和非 y 四種可能性了。

	紅色	非紅色
圓形	I	II
非圓形	III	IV

圖二. 兩個條件分成四個可能性

四. 描述和圖示(representation)。上一階段成熟後, 學習者可以用一些圖畫或文字描述上面分類的策略, 如圖三即已把先前的活動綜合起來。



圖三. 分類策略的建立

五. 符號化(symbolization)。再進一步, 開始以符號整理上述描述, 如用 R 表紅色, O 表圓形, 以「R 和 O」表「紅和圓」等。

六. 形式化(formalization)。上面符號的引入, 自然不盡完美。此時可向學習者引入正式的符號, 如∧和∼等。此時, 數學的概念經已建成 (鄭, 1982; Bell, 1978)。

《人皆在乎》(National Research Council, 1989) 中指出「學習數學在於尋

找規律」(search for pattern)。不少數學的思維方式與解難策略, 如排序、分類、對稱之察覺、推廣等均不可以用學生記得定理的數目來衡量。遊戲帶來的利益往往在於其過程中的經歷。這也許並非光是記得定理的命題而不瞭解其內涵意義可比擬的 (鄭, 1980)。

遊戲之運用策略及評鑑

Bell(1978) 中指出, 以遊戲用作教學時最差勁者莫如毫無準備、漫不經意; 利用遊戲作充塞時間用 (如在下課前十分鐘不想開新課題即倉卒跟學生玩遊戲) 或作獎勵用 (如測驗成績好方有玩遊戲之機會)。Bell續指出, 單靠遊戲, 不足以完成學習, 必須加上教師的引導和安排。所以教師準備一課遊戲課, 就如準備一課普通課一樣, 不應認爲可較隨便。此外, 教學用之遊戲必要有明確之認知 (cognitive) 及情性 (affective) 目的。以數學遊戲而言則有特定的數學主題。換言之, 遊戲部份不能喧賓奪主。否則由遊戲轉入認眞學習所形成的「虎頭蛇尾」(anticlimax) 的現象會令學生在比對之下覺得學習枯燥乏味。Bell更加指出, 有些人認爲學生縱使不能達成嚴謹的學習也可透過遊戲感到學習的愉快, 這種論點實爲謬誤的; 因爲學生不覺得愉快是來自學習, 只是來自遊戲吧了。

遊戲本身是種工具, 自然亦有一定的限制。設計者若能注意這些限制, 即可善用這種工具, 達到最佳的效果。譬如太強調勝負會令能力稍遜者怯於參與。一些遊戲規則之複雜程度學之比學習其數學內容更困難。設計遊戲規則若不夠淸楚令參與者於中途花大量時間爭議誰勝誰負 (或某一步是否合法) 而徒令遊戲變得乏然無味。

Bell還指出, 阻礙遊戲學習之施行, 莫如社會對遊戲的觀念。若學生告訴家長課堂上老是玩遊戲, 兩者都會覺得堂上並沒有進行學習。若加上課堂氣氛控制不好, 會導致情緒散漫。噪音滋擾了別班的上課程序亦會帶來反感。太過強調遊戲之好玩會令學生憎厭上傳統課。

若要運用遊戲達至最佳的教學效果, 執行者 (教師) 必須自己將遊戲玩一次, 保證程度與所需時間合適, 規則明確合理 (例如會否太多僥倖成份)。教師亦須計劃如何講解遊戲規則, 並保證參與者淸楚規則, 方讓遊戲開始, 在進行的過程中, 亦須使每個同學均有同等的參與機會,Bell 最後忠告爲:「若遊戲裡並無明顯的數學學習目的, 不有趣和不好玩, 則別用於你的數學課堂內」。文內更舉出評鑑遊戲的準則:

一. 學生淸楚遊戲規則嗎?

二. 學生是否需要大量時間學習遊戲規則?

三. 遊戲規則會否過於複雜以拖慢進度?

四. 該遊戲會否太幼稚或太高深?

五. 是否每個學生都有平均的參與機會?

六. 是否每個學生都可參與整個遊戲的進展(有否中途被淘汰)?

七. 學生對遊戲感興趣嗎?

八. 有否引起紀律性的問題?

九. 學生是否會因過於投入遊戲而忽略學習目的?

十. 在整個遊戲的過程中數學部份有否突顯出來?

十一. 學生能否達至數學認知目的?

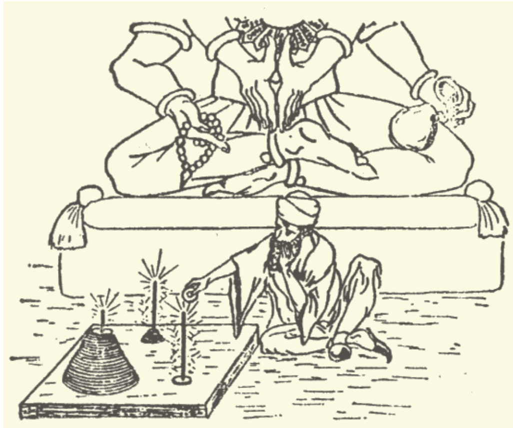
十二. 最重要者, 學生在經過遊戲後, 數學表現(後試 — post-assessment) 是否有改進?

常見的數學遊戲甚多, 如《數學遊戲》一書 (鄭, 1980) 即舉出讓梨、秤量、幻方與魔陣、拓撲、劃鬼脚、火柴、棋盤上的包圍戰、節牌、獨子棋、多方垛片、七巧與十五巧、拉丁方陣和數學歸納等十三大類。本文即欲舉出四類較有特色的數學遊戲以闡示利用遊戲學習之策略。

個例一: 數學歸納

談到數學歸納遊戲, 不少人都會想到河內塔 (Tower of Hanoi) 或梵天塔 (Tower of Brahma)。梵天乃印度教主宰天地萬物之神。雖然這遊戲經常被用於教學用途, 但未必留意到這遊戲在得出$F(n)=2^n-1$外能帶給學習者的學習目的仍多。

梵天塔變爲 Edouard Lucas 之創作故事, 其中謂「梵天創造天地之初, 於世界中心之貝拿勒斯 (Benares) 廟裡, 安放了一個黃銅板, 板上插著三根寶石針, 每根針高約一腕尺, 像蘿菜葉那樣細。在其中一根針上從下到上放了由大到小的六十四片金片, 是謂梵天塔 (圖四)。無論日夜, 都有一值班僧人按梵天所定法則, 將金片移動。法則爲: 一次只能移動一片, 小片永遠在大片上面, 若當所有六十四片都被移到另一根針上時, 世界就會在一聲霹靂中消滅, 梵塔、大廟和衆生都會同歸於盡。」(Ball, 1928)。



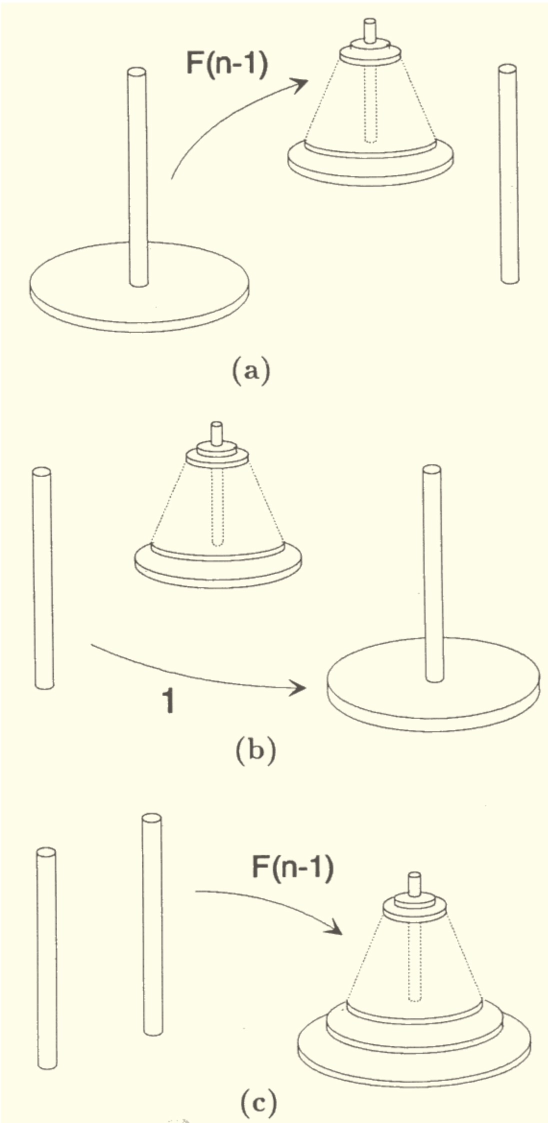
圖四. 梵天塔

設n個金片所需步驟爲$F(n)$, 故有$F(1)=1$。今考慮一般n的情況, 我們首先用$F(n-1)$步將頭$n-1$片移到第二根針 (圖五 a), 再用一步將最大一片移到第三針 (圖五 b), 然後再用$F(n-1)$將頭$n-1$ 片移到最大一片之上 (圖五 c), 於是得出

$$\begin{aligned} F(n) &= F(n-1)+1+F(n-1) \\ &= 2F(n-1)+1 \end{aligned}$$

的循環關係 (recurrance relation)。於是

$$\begin{aligned} F(n) &= 2F(n-1)+1 \\ &= 2(2F(n-2)+1)+1 \\ &= 2^2\,F(n-2)+2+1 \\ &= \cdots \\ &= 2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^2+2+1 \\ &= \frac{2^n-1}{2-1} \\ &= 2^n-1。 \end{aligned}$$

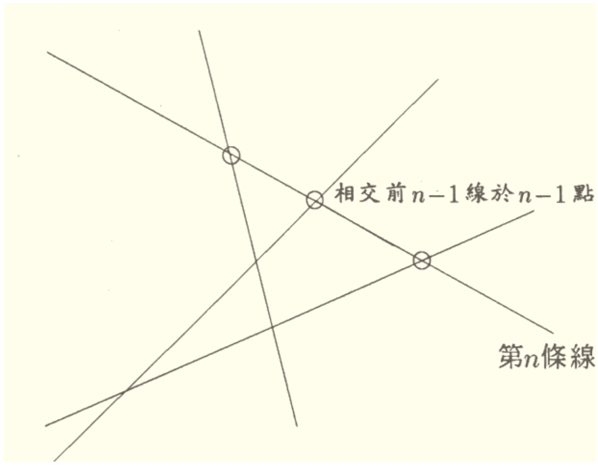


圖五. 梵天塔之解

一些人很著重再將上式 $[F(n) = 2^n - 1)]$ 利用循環關係以數學歸納法嚴格的證一次。其實在這「結果」(product) 之外,「過程」(process) 更爲重要。首先, 上面從循環關係得出 $F(n) = 2^n - 1$ 一式, 裡面實已蘊含數學歸納的精神, 亦即從找 $F(n)$ 的問題轉而找 $F(n)$ 與先前一步 $[F(n-1)]$ 之關係。再嚴謹的證一次只是欲保證沒有誤失吧了。數學歸納中有很多此類例子。例如求 n 不兩兩平行亦無三條共點的直線製造出幾個交點 (又或將平面成多少份) 之問題, 在已有 n 條線上加上一條, 此第 n 條將交原先 $n-1$ 條於 $n-1$ 點, 故有 (圖六)

$$\begin{aligned} F(n) &= F(n-1)+(n-1) \\ &= F(n-2)+(n-2)+(n-1) \\ &= \cdots \\ &= 1+2+\cdots+(n-2)+(n-1) \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

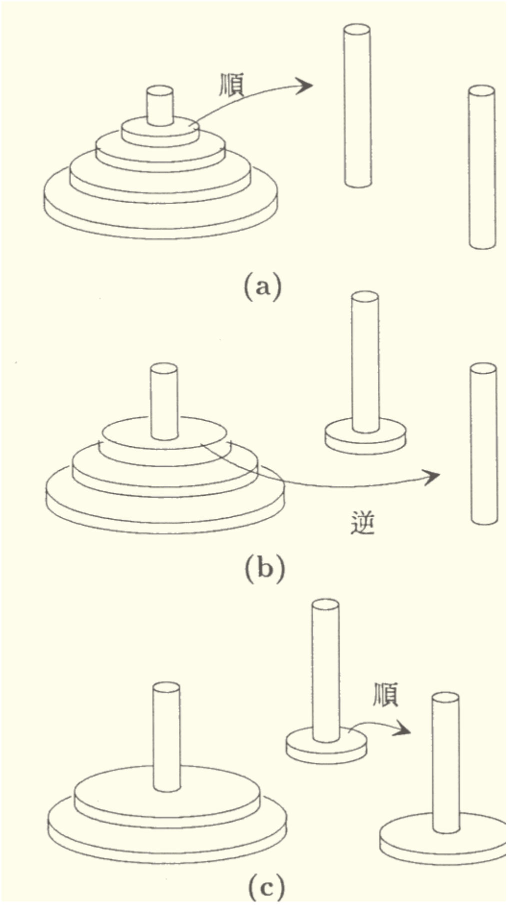
(又或n條中任取兩條均成一交點, 故爲$C_2^n = \frac{n(n-1)}{2}$。) 數學歸納法之原理不待證明已隱藏其中了。



圖六. n條直線之交點

故此, 有人提出學歸納的思維方式 (thinking by mathematical induction)(黃, 1990a)。若以上面的梵天塔爲例, 最重要的可能是學習者透過低數目 ($n = 3, 4$之類) 之探索, 瞭解到移動n金片之過程中完全包括了移動$n-1$金片的程序; 由此即可動手探求$F(n)$和$F(n-1)$的關係。

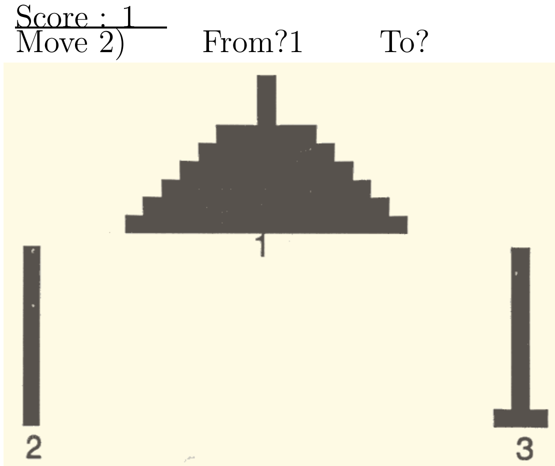
學習者更可探索出一些規律。如圖七所示以四片爲例, 假若第一步將第一片 (最小一片) 往順時針方向移動 (圖七 a), 第二步則爲往逆時針移動 (圖七 b)· · ·單數步 (以不故意反覆循環移動而言) 必爲順時針, 而雙數步逆時針。依據這種規律即能導致問題之解決。再者, 每一片均依同一方向移動。以下面第一片向順時針移動爲例, 下次再移動第一片時, 亦是往順時針移的 (圖七 c)。



圖七. 梵天塔解答的規律

至於世界末日的問題, Gamow (1961) 指出, 若以每秒鐘作一次移動, 移動六十四片共需約58萬億年。按現代宇宙進化論, 恆星、太陽、行星乃約在三十億年前形成的, 而給太陽提供能量的原子燃料還能維持100-150億年, 因此整個宇宙早在金片移動完成之前已毀滅了。

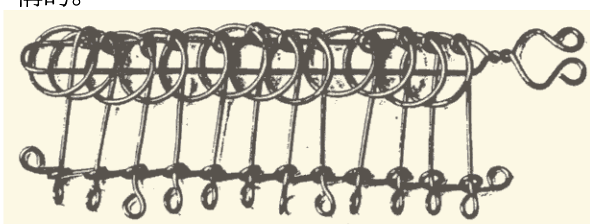
隨著個人電腦之普及化, 市面已有電腦梵天塔遊戲軟件之發售 (圖八)。



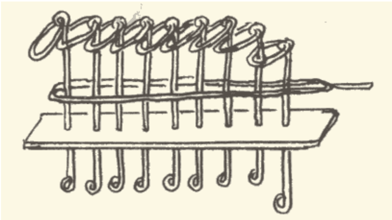
圖八. 梵天塔電腦軟體

梵天塔的解決方法, 在某個意義底下, 是容易的。除了它的步驟不斷的自我重覆 (n個金片的程序完全包含了整個$n-1$個金片的程序) 外, 只要不徘徊循環, 它的解答是唯一的。換言之, 其中沒有岔路 (倪和朱,1986)。

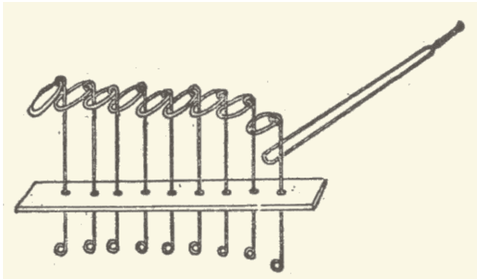
另一個極爲類似的遊戲是九子連環 (圖九)。它據稱是孔明之發明, 又名爲「留客具」。它的任務是從圖十 a 套柄套上各環弄到圖十 b 的解開只套著最後一環。事實上, 倪和朱 (1986) 指出九子連環和梵天塔遊戲是同構的。



圖九. 九子連環



(a)

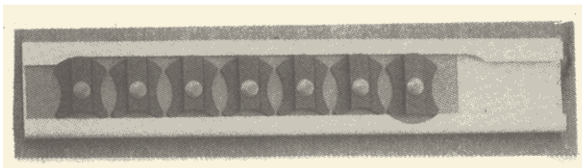


(b)

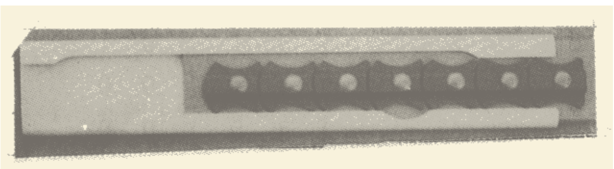
圖十. 九子連環任務

近來市面上流行一個名爲「扭出」(SPIN OUT) 的遊戲, 玩法類似九子連環而較之簡易, 故先以之作探討。

它的構造是由一塊板與一個套組成。板上有七個近似圓形的子, 在不被板套或鄰子所阻擋的情況下, 各子可以圓心爲定點扭動 (圖十一), 現時的任務是由圖十一 a 的情況扭至圖十一 b, 以致整塊板可從套中拉出來。



(a)



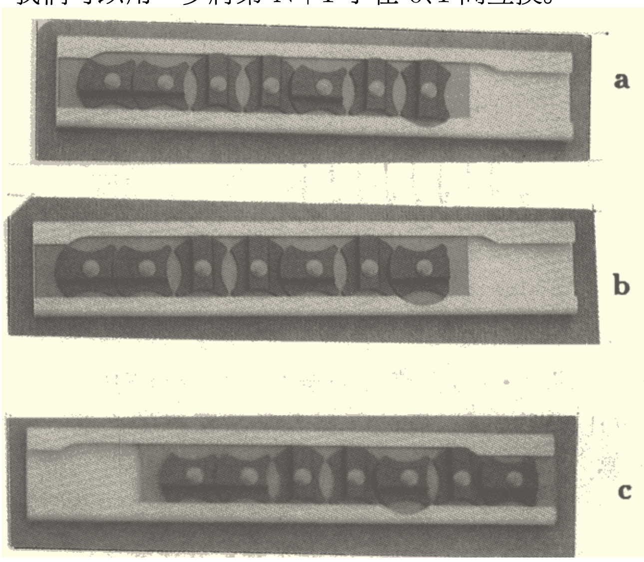
(b)

圖十一. 扭出

我們分別以 0 及 1 表示各子的横直情況。在反覆玩耍後, 我們發覺:

一. 在任何情況下, 最右子只可透過一步 (圖十二 a — c) 在0、1之間互換, 故可不必理會最右子。

二. 若從右向左數, N 爲第一個非 0 子, 我們可以用一步將第 N+1 子在 0、1 間互換。



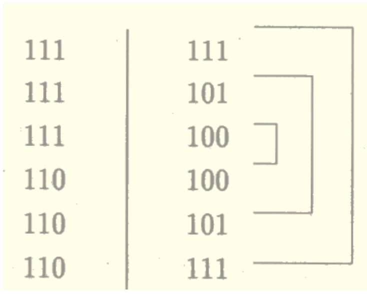
圖十二. 將最右子由 1 變 0

整個解答亦是沒有岔路的。每次均是把板塊拉出至最右, 轉動最左可以轉動的子, 再拉入; 只要不徘徊循環就自然得到解答了, 如下:

步	狀態 (最右子不寫)					
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	0	1
3	1	1	1	1	0	0
4	1	1	0	1	0	0
5	1	1	0	1	0	1
6	1	1	0	1	1	1
7	1	1	0	1	1	0
8	1	1	0	0	1	0
9	1	1	0	0	1	1
10	1	1	0	0	0	1
11	1	1	0	0	0	0
12	0	1	0	0	0	0
13	0	1	0	0	0	1
14	0	1	0	0	1	1
15	0	1	0	0	1	0
16	0	1	0	1	1	0
17	0	1	0	1	1	1
18	0	1	0	1	0	1
19	0	1	0	1	0	0
20	0	1	1	1	0	0
21	0	1	1	1	0	1
22	0	1	1	1	1	1
23	0	1	1	1	1	0
24	0	1	1	0	1	0
25	0	1	1	0	1	1
26	0	1	1	0	0	1
27	0	1	1	0	0	0
28	0	0	1	0	0	0
29	0	0	1	0	0	1
30	0	0	1	0	1	1
31	0	0	1	0	1	0
32	0	0	1	1	1	0
33	0	0	1	1	1	1
34	0	0	1	1	0	1
35	0	0	1	1	0	0
36	0	0	0	1	0	0
37	0	0	0	1	0	1
38	0	0	0	1	1	1
39	0	0	0	1	1	0
40	0	0	0	0	1	0
41	0	0	0	0	1	1
42	0	0	0	0	0	1
43	0	0	0	0	0	0

從上面的解答, 我們可看到幾個現像。首先, 某些步是倒回走的。若把上面 43 個數字看成二位數, 若沒有倒回走的話, 是應該由最大的 111111 單調下降到 000000 的, 事實卻非如此。

第 4 步按上面第二性質令至左 3 位轉成 0 後 (由 111100 變 110100), 接著數步是倒回走的:



111	111
111	101
111	100
110	100
110	101
110	111

此外, 解答中不少是程序是重覆的, 例如我們從 111111 開始, 到第 4 步得出第一次第左 3 位爲 0, 我們又要將上位的右面設法還原爲 1...., 即第 6 步 110111。

於是大致重覆上面的程序使得第左 1 位第一次得 0(第 12 步), 然後又把其右各位變成 1, 即第 22 步 011111 等等。九子連環的情況類似而稍爲複雜。下表即爲其解決程序:

步				狀	態				備 註
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	1	0	0	0	0	0	0	把2-4步倒回走
8	0	0	1	0	0	0	0	0	0
9	0	0	1	1	0	0	0	0	0	把2-8步倒回走
16	0	0	0	1	0	0	0	0	0
17	0	0	0	1	1	0	0	0	0	把2-16步倒回走
32	0	0	0	0	1	0	0	0	0
33	0	0	0	0	1	1	0	0	0	把2-32步倒回走
64	0	0	0	0	0	1	0	0	0
65	0	0	0	0	0	1	1	0	0	把2-64步倒回走
28	0	0	0	0	0	0	1	0	0
129	0	0	0	0	0	0	1	1	0	把2-128步倒回走
256	0	0	0	0	0	0	0	1	0
257	0	0	0	0	0	0	0	1	1	把2-256步倒回走
512	0	0	0	0	0	0	0	0	1

個例二：二進制與十進制互換

以下是一個協助學生熟習二進位數與十進位數互換遊戲之教案。

《預備知識》

學生已懂得如何將二進位數轉成十進位數及如何將十進位數轉成二進位數。

《遊戲目的》

一. 學生能運用二進位數轉十進位數於特定的遊戲情境中。

二. 學生透過上面的應用使上述技巧更熟練。

三. 學生運用十進位數轉二進位數瞭解遊戲的設計原理。

四. 學生透過上面的運用使上述技巧更熟練。

五. 提高學生對二進位數與十進位數互換的興趣與信心。

《預備材料》

六張預先寫上特定數字（圖十三）的卡紙。

32 40 48 56	16 24 48 56	8 24 40 56
33 41 49 57	17 25 49 57	9 25 41 57
34 42 50 58	18 26 50 58	10 26 42 58
35 43 51 59	19 27 51 59	11 27 43 59
36 44 52 60	20 28 52 60	12 28 44 60
37 45 53 61	21 29 53 61	13 29 45 61
38 46 54 62	22 30 54 62	14 30 46 62
39 47 55 63	23 31 55 63	15 31 47 63

4 20 36 52	2 18 34 50	1 17 33 49
5 21 37 53	3 19 35 51	3 19 35 51
6 22 38 54	6 22 38 54	5 21 37 53
7 23 39 55	7 23 39 55	7 23 39 55
12 28 44 60	10 26 42 58	9 25 41 57
13 29 45 61	11 27 43 59	11 27 43 59
14 30 46 62	14 30 46 62	13 29 45 61
15 31 47 63	15 31 47 63	15 31 47 63

圖十三. 遊戲所用的六張卡紙

《運用遊戲的教學策略》

跟學生玩猜數字的遊戲

↓

引導學生發現遊戲與二進位數的關係

↓

溫習二進位數轉十進位數的技巧

↓

探察如何應用二進位數轉十進位數的技巧於遊戲中

↓

探察設計遊戲的原理

↓

溫習十進位數轉二進位數的技巧

↓

探察如何應用十進位數轉二進位數技巧於遊戲的設計中

↓

實際運用二進位數轉十進位數的技巧於遊戲中

《教程》

時間 課堂互動。

(引入)

5分鐘 教師請各同學在心中定出一幸運數字。

教師說能猜出各心中的幸運數字, 但需要一些工具。

教師將預先準備好的六張卡紙張貼在黑板上 (圖十三)。

教師先請一位同學說出哪幾張有他心目中的幸運數字。教師在有幸運數字的卡紙下面畫上「$\surd$」, 在沒有的下面畫上「×」, 於是成功地猜中學生的幸運數字 (圖十四)。

32 40 48 56	16 24 48 56	8 24 40 56
33 41 49 57	17 25 49 57	9 25 41 57
34 42 50 58	18 26 50 58	10 26 42 58
35 43 51 59	19 27 51 59	11 27 43 59
36 44 52 60	20 28 52 60	12 28 44 60
37 45 53 61	21 29 53 61	13 29 45 61
38 46 54 62	22 30 54 62	14 30 46 62
39 47 55 63	23 31 55 63	15 31 47 63
$\surd$	×	×

4 20 36 52	2 18 34 50	1 17 33 49
5 21 37 53	3 19 35 51	3 19 35 51
6 22 38 54	6 22 38 54	5 21 37 53
7 23 39 55	7 23 39 55	7 23 39 55
12 28 44 60	10 26 42 58	9 25 41 57
13 29 45 61	11 27 43 59	11 27 43 59
14 30 46 62	14 30 46 62	13 29 45 61
15 31 47 63	15 31 47 63	15 31 47 63
$\surd$	$\surd$	×(38)

圖十四. 用「$\surd$」、「$\times$」引入二進制

教師再成功地猜中另二位同學幸運數字。

教師用「何以如此呢?」、「用甚麼方法呢?」等說話提高「懸疑性」。

教師再邀請一位同學對他猜幸運數字。

(發展)

5分鐘 教師引導同學觀察猜測的過程中全靠「$\surd$」與「$\times$」的符號而促使同學聯想與二進位數的關係, 於是先與同學溫習十進位數轉二進位數的技巧。

教師先以第一位同學的幸運數字爲例, 將已猜出的十進位數化成二進數。

一位同學於黑板, 以另一幸運數字爲例化成二進數。

5分鐘 老師將上面得出的答案中之0、1與原先的「$\times$」、「$\surd$」比較, 引導同學發現從「$\surd$」、「$\times$」得出幸運數字實二進位數及十進位數的互換過程。

再讓同學 (各自在座位上) 將另一個幸運數化成二進位數再比較, 並藉此再將十進位數轉二進位數的技巧熟習, 此時更將「$\surd$」、「$\times$」形式化爲「1」、「0」。

5分鐘 上面所作是將十進位數化成二進位。按上面的觀察, 從「$\surd$」、「$\times$」猜出幸運數字實爲上面的還原過程, 即將二進位數轉換成十進位數的技巧。

既然如此, 教師此時協助學習溫習數題二進位數轉十進位數的例題。此時, 教師總結一下整個猜幸運數字的方法。

5分鐘 然而此並不足以完全掌握整個遊戲, 因爲仍要知道如何製造所需的六張卡紙。

教師解釋每張卡紙上安放哪些數字的原則。

5分鐘 教師說他自己亦有一個幸運數字, 讓同學去猜。

教師讓同學們互相猜對方的幸運數字。

5分鐘 不少同學希望教師讓他們將每張卡的數字抄下, 於是教師再講解製造各卡的辦法。

教師抽起卡紙, 給出一些數字作例, 問該數字應在哪張卡上, 以保證同學知道卡紙的製造方法。

(閉合)

5分鐘 教師總結全課。

《註釋與評論》

一. 以上爲一初一級的課堂實錄, 班內學生超過四十人, 學生成績升中學時被評估爲該區的最差20%。這些資料可能消除一些人認爲「差學生用遊戲教學無法控制」的顧慮。

二. 此遊戲實包含兩個元素: 遊戲元素與教學元素。本課所定之目標只爲一般性目標而非行爲目標(behavioural objective)。關於 遊戲部份, 一般而言是透過遊戲策略之學習, 學習者會比前「玩得更好」, 即有較大之取勝機會。此即爲行爲目的。後試 (post-assessment) 則要

透過重覆玩若干次, 比較前後之獲勝頻率而成。在本遊戲而言, 行爲目標可寫成 (在此課之後), 只要對方指出其心中的數字存在於哪些卡紙上 (而此數字須在64以下), 學生必能猜出一數字。

三. 至於數學部份, 要注意本課不是學習過程而是溫習過程。換言之, 學生並非透過本課從不懂得位制互換到學會互換技巧。我們只能比較學生在本課前後做此類數題之意欲和成功率。

四. 本課的教學策略是將互相猜測數字作爲高潮放在整課的末後。這是合符推動集體遊戲「由熱身逐漸發展到高潮即收」的原則。但由於製作卡紙的方法較複雜, 亦可考慮先讓學生熟習了猜字的技巧再談製作之方法, 以免將幾個技巧的引入放得太近。

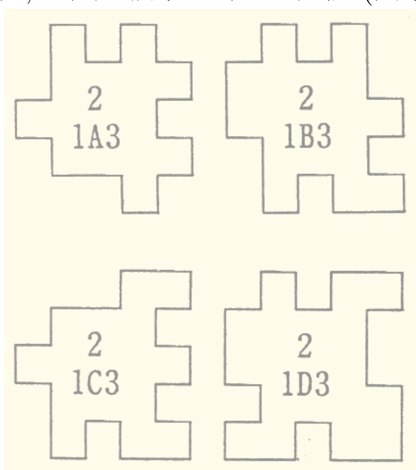
五. 在過程中, 教師應注意各項帶領活動的細節。例如在實例中, 教師說明幸運數字必須在 64 以下; 教師又確定同學已決定哪個數字 (有時學生三心兩意會費時), 並著令其不要說出和不要再改才進下一步。教師又將六張卡紙用六種不同顏色以便易於稱呼。

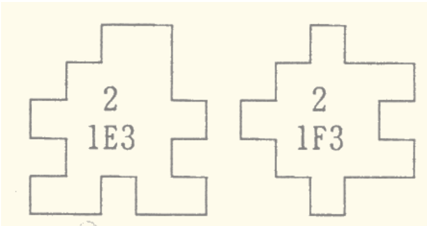
六. 在溫習位制互換過程中多讓學生在黑板上做, 容易探察出常見毛病以便糾正。到後來即會發覺學生掌握猜數技巧之快。

七. 其實上述遊戲與二進位數無必然關係。因爲對每張卡紙有「含」與「不含」兩個可能; 六張卡紙共有$2^6 = 64$個可能 (減去「全無」, 成 63)。每一個可能性配一個數字 (甚或其他東西) 即可出現每一組含與不含的答案足以決定出唯一的答案, 故63個數字大可對調; 不過如此排列則會計算容易。故此遊戲亦可改作猜歲數 (因教師一般約知同學歲數, 可改成猜父親歲數之類)、猜喜愛歌曲、姓氏 (因知同學姓名, 故可猜其母親姓氏之類) 等。

個例三: 立體數學遊戲

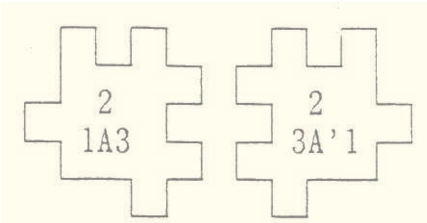
空間想像力爲數學教育中重要目的之一, 透過立體數學遊戲可促進這方面的訓練 (丁, 1984; 黃,1990b)。很多立體數學遊戲如索瑪立方等均能把玩在手, 故更增加了趣味。不少立體數學遊戲亦涉及甚多的解難策略 (黃,1992)。以下一例便是市面近期甚流行的種立體遊戲。其任務是要將六塊有駁位的平面塊, 砌成一個中空的正立方體 (圖十五)。





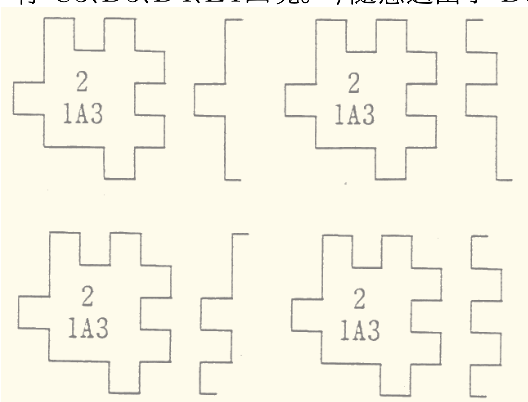
圖十五. 從六個面砌回立體

我們首先將六塊命名爲**A**至**F**, 其方向以 1, 2, 3, 4表示。再者, 每一塊都可反過來, 名之爲 A′至 F′(圖十六)。然而**F**是對稱的, 故 F=F′。



圖十六. 各塊命名

我們當然可窮舉各組合, 但這可能要用上千個猜測。假使選取任一塊出發, 以 A3爲例, 由於頂點 (Vertex) 乃由三塊共有, 而 A3 沒有佔據角位, 接駁 A3的方塊就會有很多可能性 (圖十七)。爲了縮小可能性的範圍, 於是先選一些佔據了角位的方塊出發, 那就只有 C3、D3、D4、E4四塊。今隨意選出了 D3。

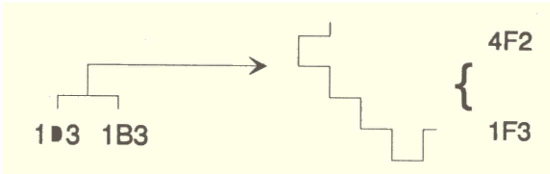


圖十七. 搜索各可能性

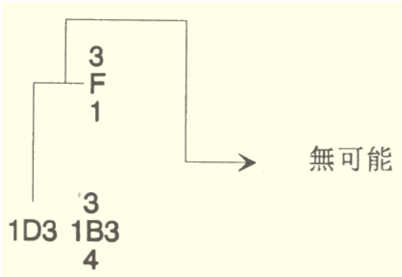
以後的步驟就可簡單地用一個樹形圖表示了。

配合 1D3 的有兩個可能: 2E4 和 1B3。

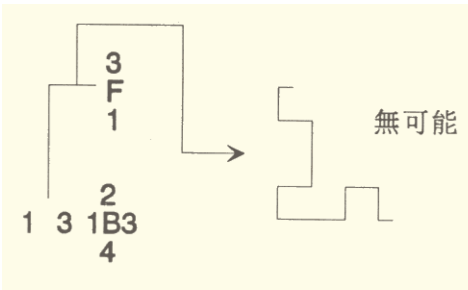
一. 假若選取 1B3:



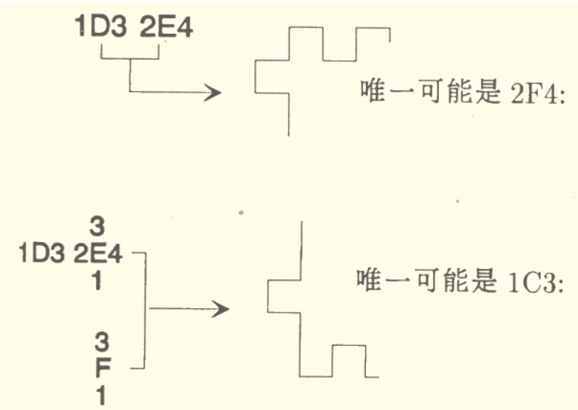
(1) 若選 4F2:

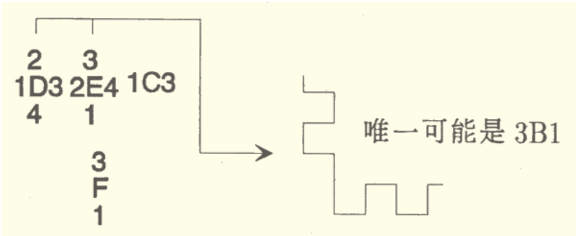


(2) 若選 1F3:



二. 若選 2E4:

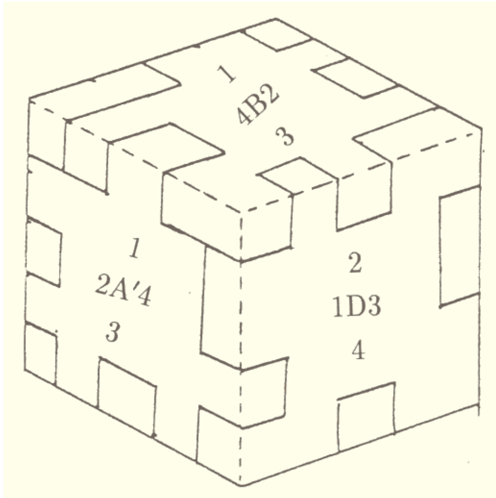




最後答案為

	1 4B2 3		
2 1D3 4	3 2E4 1	2 1C3 4	1 2A′4 3
	3 2F4 1		

(圖十八)。以上, 我們利用了各種可能的考慮 (窮舉), 逐步縮窄直至得到答案, 其中利用平面解決立體問題、考慮對稱性、給以適當的命名、將問題分成細步與排除不可能的情況, 均是導致問題解決之策略。讓學生自己動動手亦可使其尋覓到各種規律來。



圖十八. 完成圖

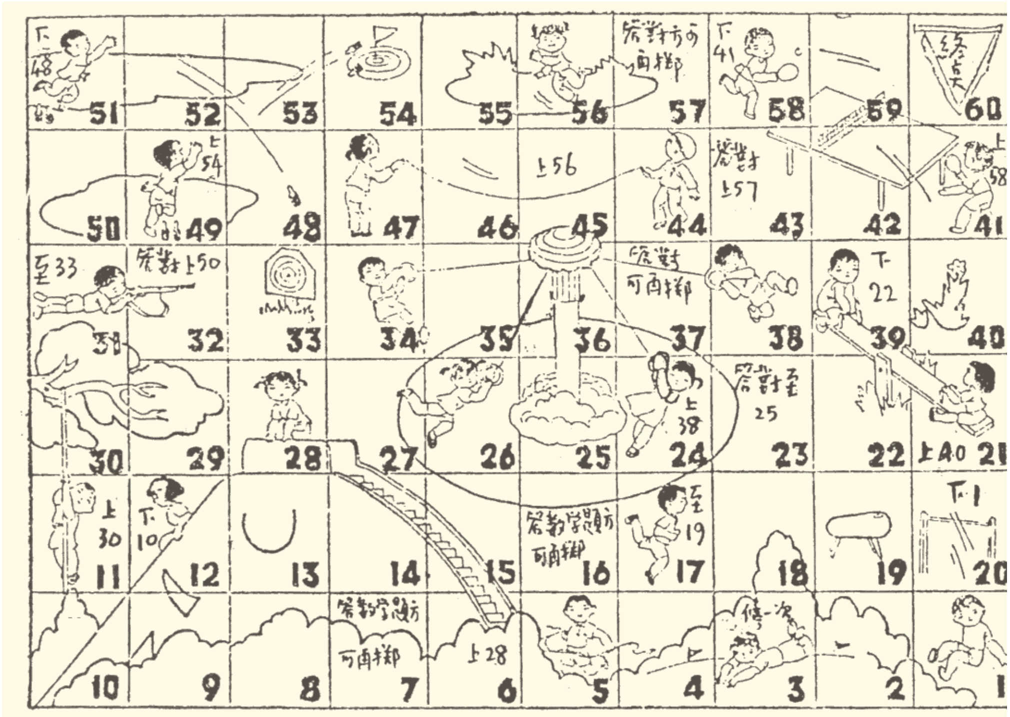
個例四: 另類數學遊戲

不少如以上的遊戲, 都是有明顯的特定數學內容者 (趙, 1981a, 1981b)。參與者透過這些數學物體, 就能探索出數學的性質。然而另一類數學遊戲也是經常被運用的。

兩個人輪流從1至9挑出數字, 誰先得到三個總和爲15者勝, 這就相對於幻方 (圖十九) 上玩井棋; 又數人玩康樂棋 (圖二十), 行至某位置須解答一些數學問題才能過關。有人指出, 上面所玩的並非是數學遊戲, 前者實在是玩井棋, 後者玩康樂棋, 不過是將一些數學的元素 (主菜上的調味品) 放進這些遊戲吧了。

2	9	4
7	5	3
6	1	8

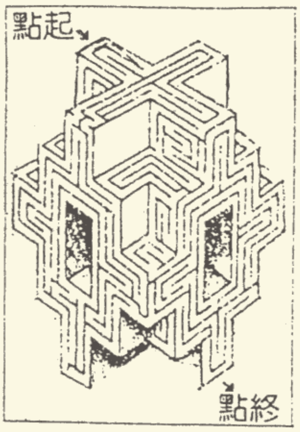
圖十九. 幻方

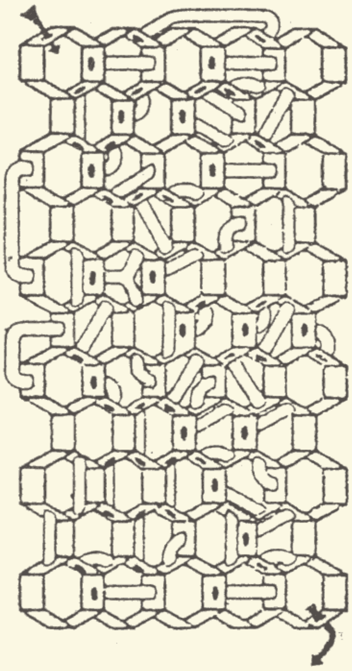


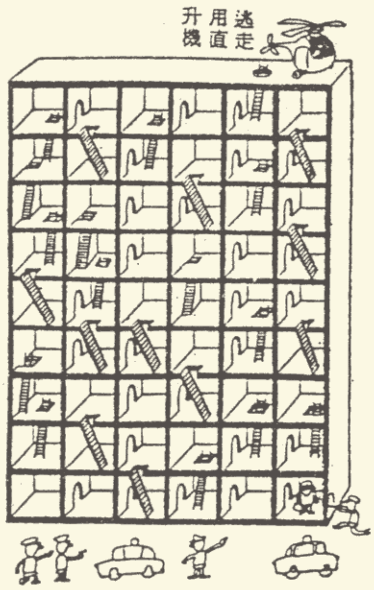
圖二十. 康樂棋

從另一角度, 學生既然喜愛玩這些井棋與康樂棋, 在玩之過程中就不知不覺間做了很多數學的練習, 也達到學習之目的。大部份的電腦數學遊戲軟體均屬此類 (黃, 1991a,1991b)。而這類遊戲的特色在於變化多端, 故此設計者也就可以隨意剪裁以適合參與者的性向與程度。圖廿一中所見便是不同的迷宮遊戲, 足見此遊戲的靈活性。

接龍 (domino) 遊戲的玩法每人抽得一些兩端各有點數的接龍牌 (圖廿二), 輪流打出。每一打出的牌必須有一端的點數與檯面上尾端點數相同。最快打完自己分得的所有牌爲勝。我們可製造一些「因數卡片」(圖廿三) 玩接龍遊戲, 相接的兩個數中其一必須爲另一個數的因數, 這樣的變化是作爲練習法與因數之用。我們又可將接龍牌改成寫上不同公式的卡片 (圖廿四) 以讓學生熟習該等公式。



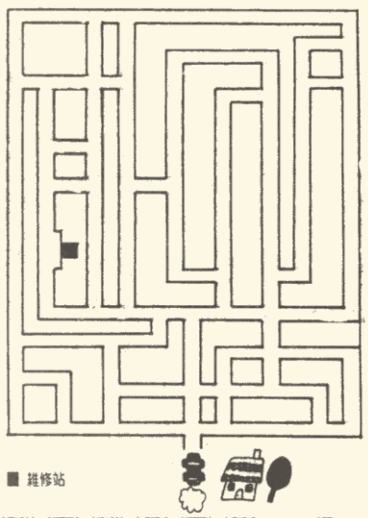




■	朋	肥	把	揍	湊	馮	瑪	瑙	盼	眼
晴	清	海	誨	誰	准	雕	彫	腦	惱	睛
暗	河	玫	說	悅	醃	掩	形	影	情	請
語	江	放	施	恨	醇	淹	刑	利	和	扣
講	池	滂	拖	銀	諄	沒	湮	煙	燒	拉
溝	構	沱	技	根	杷	把	蜂	烽	詠	話
蟻	螞	蛇	枝	酮	釘	打	蛹	游	泳	括
議	森	林	樹	桐	銅	鐵	誦	遊	碟	恬
論	輪	何	河	湯	錫	抓	俑	通	碗	惟
軀	輛	他	訶	楊	捕	捉	促	脹	腕	雕
歐	驅	馳	駒	夠	拘	帳	張	悵	惆	■

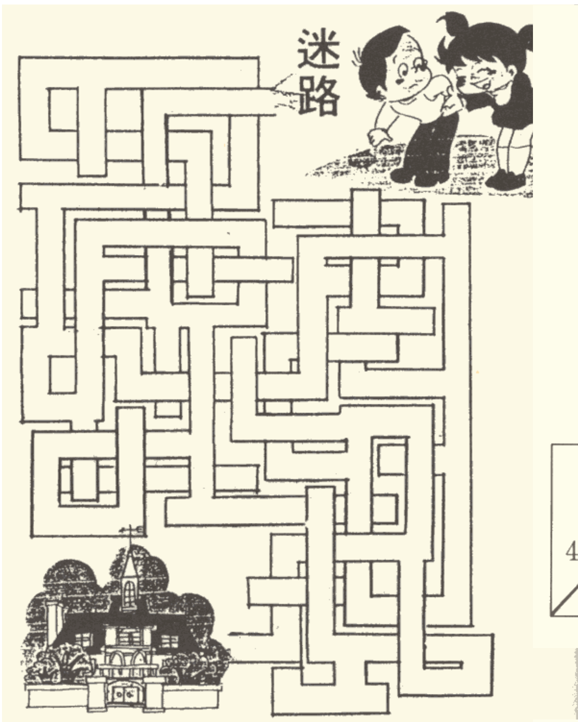
(連接步必須有一部首相同)

(總數最少走完)

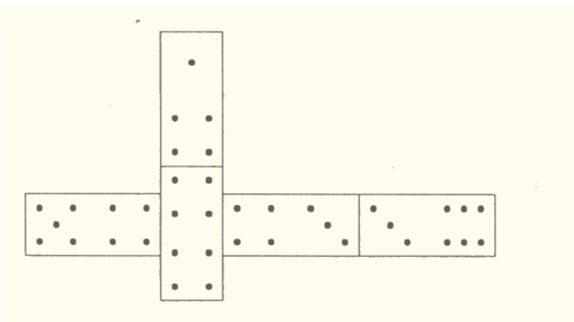


冬 秋 夏 秋 冬 春 冬

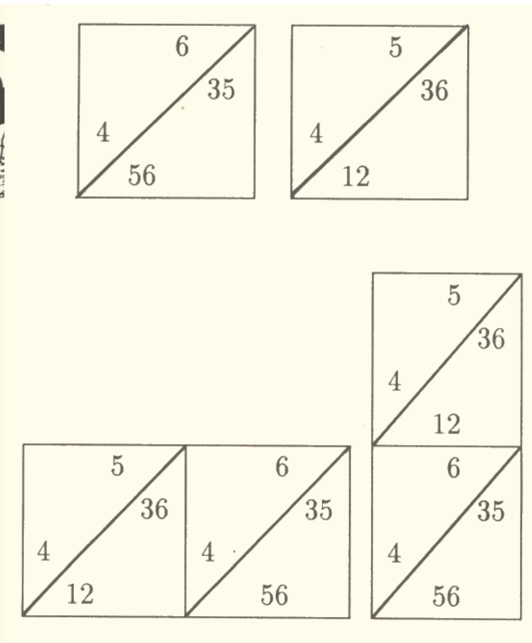
次序走



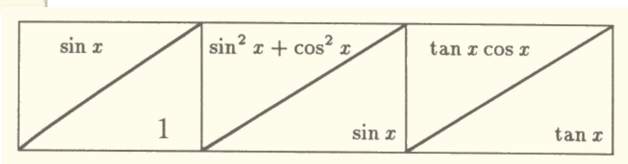
圖廿一. 各類迷宮



圖廿二. 接龍遊戲



圖廿三. 因數卡片

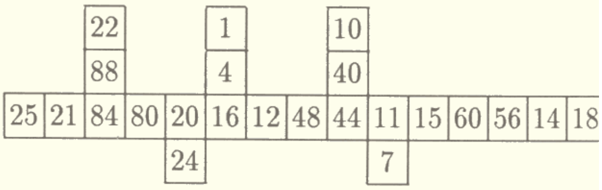


圖廿四. 公式接龍

為了練習四則運算, 我們以4為例 (餘類推), 製造了寫上 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 27, 28, 30, 32, 33, 35, 36, 40, 42, 44, 45, 48, 49, 50, 54, 56, 60, 63, 64, 70, 72, 80, 81, 84, 88, 90, 100 的卡紙亦作輪流出牌, 每一張牌須為上一張牌的$+4$、-4、$\times 4$或$\div 4$ (圖廿五)。這亦可變化成「接樹枝」(圖廿六)。近市面推出之「數學砌字遊戲」(Mathable) 仿效砌字遊戲 (Scrabble), 與「接樹枝」亦甚相近, 不過沒有規限於一個特定的數字 (4)。這些都是接龍遊戲的變化。

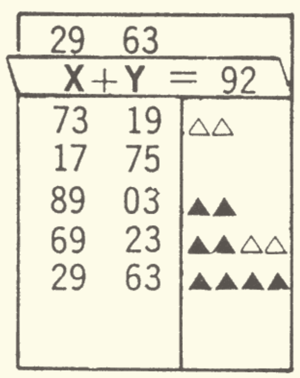
算法		×4		−4		÷4		+4		×4
卡片	12	48	44	11	15	60	56	14	18	22
次序	甲	乙	丙	丁	甲	乙	丙	丁	甲	乙

圖廿五. 四則接龍



圖廿六. 接樹枝

智慧數學盤基本上是一個智力棋遊戲 (master mind), 不過現時要猜的不是四只棋的顏色與位置, 而是四個數字 a,b,x,y。一方給出二位數 a, b 加另一二位數 x, y 的答案 (「加」可改爲「減」、「乘」、「除」等), 由另一方猜出 a,b,x,y 四字來 (圖廿七)。猜的一方若猜中任一數字或同時猜中位置, 對方都要有一定的顯示。這便是智慧數學盤的玩法。



圖廿七. 智慧數學盤

以上便是另類數學遊戲的介紹。

參考書目

1. 丁一 (譯) (1984) (高木茂男)。《立體數學遊戲》。科學普及出版社。
2. 倪進、朱明書 (1986)。《智力游戲中的數學方法》。江蘇教育出版社。
3. 黃毅英 (1990a)。解題與數學教育, 《數學傳播》, 54期, 71-81。
4. 黃毅英 (1990b)。立體數學遊戲與空間想像力之訓練, 《數學傳播》, 56期, 78-96。
5. 黃毅英 (1991a)。高科技對學校數學教學的衝擊 (上), 《數學傳播》, 59期, 103-110。
6. 黃毅英 (1991b)。高科技對學校數學教學的衝擊 (下), 《數學傳播》, 60期, 112-118。
7. 黃毅英 (1992)。立體遊戲中的解難策略, Datum, 32, 1-5。
8. 黃毅英 (1993)。數學教育目的性之轉移, 《數學傳播》(待刊)。
9. 趙文敏 (1981a)。《寓數學於遊戲》第一輯。九章出版社。
10. 趙文敏 (1981b)。《寓數學於遊戲》第二輯。九章出版社。
11. 鄭肇楨 (1980)。《數學遊戲》。商務印書館。
12. 鄭肇楨 (1982)。應用田尼氏數學學習歷程於數學教學, 《數學教學》, 5期, 6-9。
13. 鄭肇楨 (1983)。《教育途徑的拓展》。廣角鏡出版社。

14. 劉焱 (1988)。《兒童遊戲的當代理論與研究》。四川教育出版社。
15. Ball, W. W. R. (1928). *Mathematical Recreations and Essays*. Macmillan Publishers Company.
16. Bell, F. H. (1978). *Teaching and Learning Mathematics in Secondary Schools*. Wm. C. Brown Company.
17. vanDelft, P., and Botermans, J. (1978). *Creative Puzzles of the World*. Harry N. Abrams.
18. Gamow, G. (1961). *One, two, three, ⋯ infinity: facts and speculations of science*. Viking Press.
19. National Research Council (1989). *Everybody Counts*. National Academy Press.
20. Papalis, E. E., and Olds, S. W. (1975). *A Child's World-Infancy through Adolescence*. McGraw Hill Book Co.

—本文作者爲香港中文大學教育學院課程與教學學系講師—