Brown 運動與 Lévy 泛函分析 (下)*

飛田武幸 著

李育嘉

陳明廷 合譯

⊙**摘要**

上兩回吾人談到 Lévy 提倡利用 Brown 運動的說法來解釋 $L^2[0,1]$ 上分析的幾個意味深遠的話題, 相信已深入的認識。吾人討論了廣義白雜訊泛函的分析, 同時也考慮到回轉群的作用, 自然發展出來的成果可以說是隨機調和分析的研究。

這回吾人將對回轉群與 Gauss 型隨機場再作補充, 特別是介紹變分法。順便的在吾人動機之一的物理學上的應用中舉兩個典型的例子, 即 Feymann 積分與無限維 Dirichlet 形式。

看到以上的發展, 再一次順著 Lévy 的步道, 由函數分析到隨機過程, 特別是回顧 Brown 運動, 由溫故知新, 發展出新的數學研究課題。

10. 回轉群與 Laplacian

再次提起上回 9. 所見的 Laplacian 而考慮與 5. 中之無限維回轉群之關係。

爲此, 吾人很簡要的先復習關於有限維回轉群之基本事實, 在三維空間中以原點爲中心之二維球面 S^2 上, 作函數之分析。回轉群 $SO(3)$ 表三維空間中表所有三階回轉矩陣, 作用在 S^2 上, 使 S^2 上圓形之曲面積不變。S^2 本身可表爲

$$S^2 = SO(3)/SO(2) \tag{32}$$

之等質空間。曲面積用全部表面積來除而正規化後可在 S^2 上定義機率測度 σ, S^2 上的函數構成之 Hilbert 空間記作 $L^2(S^2,\sigma)$。設 n 次球面上之調和函數所張成 $L^2(S^2,d\sigma)$ 之部分空間表爲 $\mathcal{H}_n$, 此等部分空間相互直交的直和分解爲

$$L^2(S^2,\sigma) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n. \tag{33}$$

∗ 原文刊登於"數學研討", 第 27 卷, 第 5 期, 82–88 頁 (1980 年), 日本評論社, 東京.

此可得各 $\mathcal{H}_n$ 上 $SO(3)$ 之既約么正表現。此時球面上之 Laplacian Λ 利用球面座標 (φ,θ) 可表爲

$$\Lambda=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \tag{34}$$

此爲 $SO(3)$ 之 Lie 環之二次形式, 在 $\mathcal{H}_n$ 上爲負算子 $-n(n+1)I$ (I 爲恆等算子)。

如此, 回轉群, 等質空間與其上之回轉不變測度, 函數空間, 直和分解與 Laplacian 之間有很優美的相互關係是衆所周知的。

白雜訊測度 μ 是回轉不變的 (5. (11) 式), 又如 6. 所示, μ 之台集可想像爲無限維之球面, 如此則如 S^2 之場合一樣, 其是否可與么正表現或 Laplacian 等自然之對應關係下有互相關連是爲所期待者。

結果是, 雖非如所期待, 但也非完全失望。此外, 此觀點也可爲吾人引入此觀點以上的世界。處理對象是爲無限維的, 下面吾人看看其實情。

1°) 由於球面 S^2 上均匀分配之機率測度 σ 與無限維的白雜訊測度 μ 類似, Hilbert 空間 $L^2(S^2,\sigma)$ 之直和分解 (33) 與 7. 所得 (L^2) 之 Wiener 重積分之分解 (13) 對應。

2°) 無限維回轉群之既約么正表現不難由 (13) 之分解的各 $\mathcal{H}_n$ 上而得, 其實 5 中所考慮的部分群 G_∞ 之表現也對 $\mathcal{H}_n$ 既約, 關於此方向, 更詳細結果可由岡本清鄉與櫻井孝俊兩氏之著作得知。

3°) 關於 Laplacian, (34) 之 Λ 與無限維類似, 若取在 9. 中所給的 $-N$ (N 爲粒子數算子) 而令之爲 $\triangle_\infty$ 時可表爲

$$\triangle_\infty=-\int\partial_t^*\partial_t\,dt\,, \tag{35}$$

此可由部分群 G_∞ 來刻劃。又利用 $L^2(\mathbf{R}^1)$ 之完全正規直交系 $\{\xi_n\}$ 作爲空間 E_1^* 之座標系時, 將 ξ_n 方向微分算子記作 D_n, 則 $\triangle_\infty$ 可表如下式

$$\triangle_\infty=\sum_n(D_n^2-\langle x,\xi_n\rangle D_n). \tag{36}$$

[註] 由於此表現之故 $\triangle_\infty$ 稱爲 Ornstein– Uhlenbeck 算子 (參看 9.)。

對於上述, 請注意 $O(E)$ 之部分群 G_∞, 僅利用有限維回轉近似之部分。此處之構想也是來自 Lévy。

4°) 在 Euclidean 空間上考慮類似無限維的 Laplacian 並不成熟, 此處再利用座標系 $\{\xi_n\}$ 而重新改寫 9. 中所給與之 Lévy Laplacian 時, 吾人可得

$$\triangle_L=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N D_n^2. \tag{37}$$

根據尾毙伸明氏, 此與 5. 之 2) 中所給與之 Lévy 群 g 有密切關係。$\triangle_L$ 之定義域含正規泛函數, 由此可知 $\triangle_L$ 在廣義泛函數空間上有效的作用。由 (37) 式很容易推知 $\triangle_L$ 在 (L^2) 上變爲 0 算子。

上述 3°), 4°) 可圖示如下:

$$\begin{array}{ccccccc}(L^2)^- & = & \bigoplus\mathcal{H}_n^{(-n)} & \leftarrow & g & \rightarrow & \triangle_L\\ & & \cup\!\!\!\!\!\!\;\hat{} & & \cup\!\!\!\!\!\!\;\hat{} & & \\ (L^2) & = & \bigoplus\mathcal{H}_n & \leftarrow & G_\infty & \rightarrow & \triangle_\infty\end{array}$$

5°) 直到目前有關在 5. 之 3) 中所述 $O(E)$ 的第三個部分群$\{g_t\}$之族到底如

何, 對於 Laplacian 之有關問題而言並無答案, 是否該需努力來探討並不知道。

[註] $\{g_t\}$ 的別名稱爲 Whisker。

但是, 若被要求舉些機率論上的有趣之例, 則吾人有以下幾個具體例子。

例 1. 平移 (shift), 習慣上用大寫而寫爲 $\{S_t\}$, 此定義爲

$$(S_t\xi)(u) = \xi(u-t), \qquad \xi \in E.$$

此爲支配時間進行之變換群, 是極重要的例子。

例 2. 延伸 (dilation), 記號爲 $\{\tau_t\}$, 定義爲

$$(\tau_t\xi)(u) = \xi(c^t u)e^{\frac{t}{2}}, \qquad \xi \in E.$$

此爲 (L^2) 且也爲 $(L^2)^-$ 上之單參數變換群。又可定義 Ornstein–Uhlenbeck 過程, 在隨機分析上是很有用的。

特別應注意的是, 此處所言單參數部分群 $\{g_t\}$ 是眞指無限維時, 有限維近似並不被認爲是其特徵。

11. 隨機場

通常, 言及隨機過程時以參數 t 表時間而表成 $\{X(t)\}$, 如 Brown 運動可表爲 $\{B(t)\}$, 白雜訊也用 t 而表爲 $\{\dot{B}(t)\}$。此 t 若成爲多維參數時隨機變數亦稱之爲隨機場, 而仍用 t 或 a 記作 $\{X(t), t \in \mathbf{R}^d\}$ 或 $\{Y(a), a \in S^d\}$。具體之例有很多是 t 爲時空之參數 $t=(s,x)$, $s \in [0,\infty)$, $x \in \mathbf{R}^3$。分佈爲 Gauss 型時稱爲 Gauss 型隨機場。

隨機場 $\{X(t), t \in \mathbf{R}^d\}$, $d \geq 2$ 爲 Gauss 型, $X(t)-X(s)$ 之分佈爲 $N(0, |t-s|)$, 即遵循平均値爲 0, 變異數爲 $|t-s|$ 之 Gauss 分佈時稱之爲 Lévy 之 Brown 運動。此爲 1945年 Lévy 所介紹者, 且是 Gauss 型隨機場中最爲重要的例子。t 若限制在 $\mathbf{R}^d$ 之超平面時仍爲 Lévy 之 Brown 運動。爲使分佈唯一, 多半在 $\mathbf{R}^d$ 之原點 O 令 $X(0)=0$。此時若 t 限制在過原點之直線時變爲普通之 (一維參數) Brown 運動。

樣本函數爲 $\mathbf{R}^d$ 上之廣義函數之場合時, 仍然可考慮 Gauss 型隨機場, 此即白雜訊且如 $d=1$ 時的典型一樣, 吾人記作 $\{W(t), t \in \mathbf{R}^d\}$。爲使 $X(t)$ 爲廣義函數, 以十分平滑之試函數爲對象而考慮

$$X(\xi) \left(= \int X(t)\xi(t)\,dt\right)$$

所成之族。$d=1$ 時爲 $W(t)=\dot{B}(t)$, $d>1$ 時處理 $\{W(t)\}$ 之分佈 μ 與 3. 中之白雜訊測度一樣。μ 即爲 $\mathbf{R}^d$ 上之廣義函數空間上所導出之標準 Gauss 測度。其特徵函數爲 ξ 在 $\mathbf{R}^d$ 上之函數與 (9) 同形。

再舉一個 Gauss 型隨機場之例。此可稱爲 Ornstein–Uhlenbeck 之 Brown 運動, 可表爲 $\{U(t), t \in \mathbf{R}^n\}$, 其特徵函數爲

$$E(\exp[iU(\xi)]) = \exp\left[-\frac{1}{2}\int \frac{|\hat{\xi}(\lambda)|^2}{m^2+|\lambda|^2}\,d^n\lambda\right], \tag{38}$$

$\hat{\xi}$ 爲 ξ 之 Fourier 變換, 以量子論而言, 此表質量 m 之自由粒子之 Euclidean 場。

由此例開始, 對一般的隨機場, Markov 性質, 定常性等, 如單參數場合一樣一般化的有趣機率性質已正被研究中, 那些重要性吾人並不在此作爲討論主題。Lévy 所強調的是

由於參數爲多維時除了增加趣味外且有豐富的從屬性。這些將於下節討論。

12. 由變分法來處理

本節也想限制在 Gauss 型隨機場上進行討論, 平均值都假設爲 0。

對於 Gauss 型隨機場 $\{X(t), t \in \mathbf{R}^d\}$, 參數 t 在 $\mathbf{R}^d$ 內變動時, 所對應之隨機量 $X(t)$ 也跟著變動, 與 t 在 $\mathbf{R}^1$ 內變動之情形不一樣, 在 $\mathbf{R}^d$ 內 t 有種種不同的變動, $X(t)$ 等應分別對應不同的相關關係。此種多樣性刻劃 $\{X(t)\}$ 之性質。欲研究此事, 大體而言, 有如下兩種考慮的方法:

i) 取幾個 t 檢查隨機變數 $X(t)$ 等之共同分佈,

ii) 對於在 $\mathbf{R}^d$ 中某限制領域中之 t, 若 $X(t)$ 爲已知時, 擬觀察其他時間 t 的 $X(t)$ 之條件機率。

i) 之情形是回到 8. 之 (25) 的隨機變分方程式之精神。各時點獨立之白雜訊 $\{W(t)\}$ 之線型泛函 $X(t)$ 若能表現時, 其所表現之函數與所周知的 $\{W(t)\}$ 之性質合起來就可了解所給與之 $\{X(t)\}$ 的從屬性。其想法與 (26) 求 Gauss 過程之表現相同。

由於參數空間爲多維, 以上述之表現作爲基礎之各時點獨立的選擇也有其自由性並非一定限爲 $\{W(t)\}$ 不可。例如超平面之集合, 或更一般的取 $\mathbf{R}^d$ 之部分集合之族 $H = \{h\}$。對各 h 考慮獨立之無限小變量之隨機變數 $Z(h)$ (如同 $\dot{B}(t)$) 所對應之狀況。這些若想作嚴格的定義, 需由積分幾何之知識與定義白雜訊時所需之測度論開始。於是適當的確定與 t 有關之集合 $D(t) \subset H$, 取 H 上之測度系 $\{\nu_t\}$, 由表現

$$X(t) = \int_{D(t)} Z(h)\, d\nu_t(h) \tag{39}$$

而使 $\{X(t)\}$ 之性質更爲明白。

若 $\{X(t)\}$ 爲 Lévy 之 Brown 運動, H 爲超平面之族, 則 ν_t 可爲與 t 無關之測度。此種表現稱爲 Chentsov 表現, Lévy 對此有很高的評價。更一般的論述參看竹中、野田等兩氏之著作 (例如參看文獻 [12] 及其所引用之文獻)。

ii) 之情形, 可考慮如下之狀況。D 爲 $\mathbf{R}^d$ 內之區域, 對於 D 內之 t, 若 $X(t)$ 之值已知時, 擬對 D 外之 t 之值作確定或預測, 然後讓 D 變形時研究其預測值到底如何變化, 此爲多維參數所產生意味深遠之問題。

此問題之模式化本身並非那麼容易, 而簡單的設定也不允許。已知的一種理由是隨機量的相互關係是受到其共同分佈的約束, 與普通函數之情形不一樣的複雜的情形會呈現出來。

以下吾人探討一種非隨機之類似情形, 也就是 Dirichlet 問題。例如在 $\mathbf{R}^2$ 內具有十分平滑邊界 C 之區域 D, 其 Green 函數設爲 $g(x, y)$。此時 g 爲在 D 內爲調和, 而在 $D \cup C$ 爲連續可微分之函數, 且可表爲下式:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\partial g(x,y)}{\partial n} u(y)\, ds, \tag{40}$$

此處 $\partial/\partial n$ 爲對法向量之微分, ds 爲 C 之線測度。注意此 Green 函數與 C 有關。C

(非局部, 而是全體) 作微小變化時 g 之變分滿足下列有名的 Hadamard 方程式

$$\delta g(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\partial g(x,z)}{\partial n}\cdot\frac{\partial g(z,y)}{\partial n}\delta n(s)\,ds, \tag{41}$$

此處又需回到 Lévy 之舊論文。他在論文 [L.5] 中, 取帶電之兩個曲面之電場, 處理曲面微小變化時之電場之變分。此處 Green 函數或 Hadamard 方程式等之變分方程式佔重要角色。變分的方法實質上由此論文開始, 1922 年之函數分析的書及其修訂版於 1951 年所寫的 [L.3] 也仍然在被引用。(雖然如此 [L.5] 仍在 Lévy 全集中被省略實在不可思議。)

曲線或曲面之泛函數及其變分之 Lévy 的方法, 在隨機過程或隨機場之研究於相當時間以後才活躍起來。思考方法是以隨機過程 $X(t)$ 與微小時間 dt 之間變化 $\delta X(t)$ 構成隨機變分方程式, 這在其提倡之時可說已呈現出來, 不過直接以變分來表示的想法被認爲是發表於 1955 年第 3 回 Berkeley 研討會之文中 (文獻 [L.6])。

對於 Lévy 之 Brown 運動 $\{X(t), t\in\mathbf{R}^d\}$, 在以 r 爲半徑之某球面 $S(r)$ 上之各點 t, $X(t)$ 之值已知時, $S(r)$ 之中心 t_0 之值 $X(t_0)$ 之最佳預測值爲條件平均值 $E[X(t_0)|X(t), t\in S(r)]$, 此與 $X(t)$ 之球面 $S(r)$ 上之平均 (= 對均匀分配之機率測度 σ 之積分) 相等, 將此記爲 $M_d(r)$:

$$M_d(r) = \int_{S(r)} X(t)\,d\sigma, \qquad r\ge 0 \tag{42}$$

此處 r 視爲時間時可得 Gauss 過程 $\{M_d(r), r\ge 0\}$。當 $d=2p+1$ 時, 此爲 $(p+1)$ 重 Markov–Gauss 過程。此事實可由球面之半徑作稍許變動時波及中心之值的影響可得若干訊息。Lévy 由球面之近旁 $X(t)$ 之值得知其內部之值的從屬性, 又維數 d 增大時中心之值的預測較容易作種種的研究。如此 [L.6] 一文多半被認爲是記述一些新提出的問題。

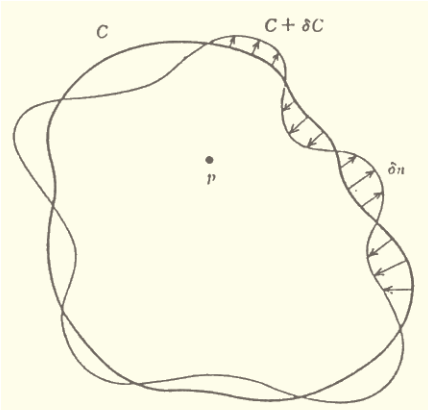
爲使問題易懂起見, 令 $d=2$, 記 $\mathbf{R}^2$ 之原點爲 O, 考慮 $X(0)=0$ 之 Lévy 的 Brown 運動 $\{X(t), t\in\mathbf{R}^2\}$, 當 C 爲過原點 O 之圓周。由 [14] 可知如下之事實。t 限制在 C 上時, 由原點依一定的方向測得弧長爲 s 之點設爲 $t(s)$, 則

$$Z(s) = X(t(s)), \quad s\in[0,T],\ T\text{爲}C\text{之長度},$$

爲以 s 爲參數之 2 重 Markov–Gauss 過程。對 C 所圍圓盤上之一點 p, C 上之各 $t=t(s)$ 若 $X(t(s))=Z(s)$ 已知時 $X(p)$ 之條件平均值可表爲

$$\begin{aligned} &E[X(p)|Z(s), 0\le s\le T] \\ =\ &\int_0^T f(p,s)Z(s)\,ds\,, \end{aligned} \tag{43}$$

$f(p,s)$ 爲與 $|p-t(s)|$ 之立方成反比例的部分及常數項所成。此處, 在某種意味上可看出與前述 Green 函數類似之點。



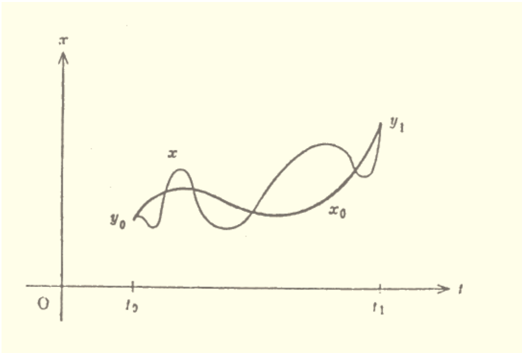
若 C 取一般的 C^∞-曲線, 如上述用弧長 s 定義 $Z(s)=X(t(s))$ 時是否可期待多重 Markov 性, 對於 $\{Z(s)\}$ 用標準表現 (參考 (26)) 可論述 $X(p)$ 之條件平均值。至此是在看 $X(t)$ 之曲線 C 上之值, 及沿 C 之變化, [14] 之第 II 部中是考慮 C 之變動。對於一般的 C, $x(p)$ 之條件平均值寫爲 $Y(p,C)$, C 變化到 $C+\delta C$ 時之變分 $\delta Y(p,C)$ 之性質是對 $\{X(t)\}$ 之從屬性之特性。此處 δC 之意義可理解爲 C 之各點 $t(s)$ 之法線方向變形 $\delta_{n(s)}$。此時由圓周情形所表示之公式 (43) 想像得到 $\delta Y(p,C)$ 含 $X(t)$ 在 $t=t(s)$之法線微分 $\left.\frac{\partial X}{\partial n}\right|_{t=y(s)}$。將 s 作爲參數時此例並不成爲通常的 Gauss 過程也不成廣義過程, 其共變異函數會出現 1 次特異性。此也成爲 Lévy 之 Brown 運動之特徵, 與其他隨機場比較即可知。

關於變分, 讀者處理 Hadamard 方程式, 或者 [L.3] 類似之形式時, 會擔心是否爲隨機函數也不一定。關於此雖可附說明, 但此處非放棄不行。其實, 至今所處理的隨機量, 其積分表現 (參考 [2]) 皆可表爲 C^∞-函數之泛函數。古典的結果可應用得上。

直到現在所談的話題, 當參數爲多維時, C 代以曲面來考慮, 或者對一般之 Gauss 型隨機場討論同樣的問題等應爲今後之研究課題。

13. 物理上之應用

[I] Feynman 積分給與 Lagrange 函數 $L(x(t),\dot{x}(t))$ 時, 依古典力學有唯一的軌跡 $x_0(t)$, 但依量子力學必須考慮種種可能的道路。對於 x 計算作用函數



$$A(x)=\int_{t_0}^{t_1} L(x(t),\dot{x}(t))\,dt$$

由 x 之平均值

$$\left\langle \exp\left[\frac{i}{h}A(x)\right]\right\rangle \tag{44}$$

可得傳遞函數 (propagator) $G(t_1,y_1;t_2,y_2)$。此時如何選擇可能的道路 x, 同時對於 x 之平均如何解釋成爲重點。

吾人曾建議作以下解釋 (1981 ; 及參考 [15]), 令

$$x(t)=x_0(t)+\left(\frac{h}{m}\right)^{\frac{1}{2}}B(t), \qquad t_0<t<t_1, \tag{45}$$

$B(t)$ 爲 Brown 運動, $t = t_1$ 時應有 $x(t_1) = y_1$, 於取平均之際乘以 δ-函數 $\delta_0(B(t))$ 使 $x(t)$ 聚集爲 y_1 之效果出現。

由於 Lagrange 函數 L 含 $\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2$ 故 (45) 中對 x 所計算之 $A(x)$ 應含 $\frac{1}{2}h\dot{B}(t)^2$ 之積分, 於是 (44) 之計算含廣義泛函數

$$:\exp\left[\frac{i}{2}\int \dot{B}(t)^2\,dt\right]: \qquad (9.\ 之例)$$

其他爲使測度 μ 成爲“flat”測度之因子

$$:\exp\left[\frac{1}{2}\int \dot{B}(t)^2\,dt\right]:$$

或含 $\delta_0(B(t_1))$ 而依 μ 之積分解釋爲 (44) 之平均值。利用此方法可確定已知的幾個例子也可提供新例。

[II] Dirichlet 形式當然是處理自由度爲連續無限時的情形, 但是 Dirichlet 形式之定義與有限自由度之情形類似。在 $\mathbf{R}^n$ 時, $H = -\frac{1}{2}\triangle + v$ 爲 Hamiltonian, v 爲正值而平滑的。對於形式 $\varepsilon(f,g)$, 利用基底狀態 φ_0 可得

$$\varphi(f,g) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n}(\nabla f, \nabla g)\varphi_0(x)^2\,d^nx$$

將此並列成下表而找尋無限維之對應觀念

$(\mathbf{R}^n, d^nx)$	(E_1^*, μ)
$H=-\frac{1}{2}\triangle+v$	$\triangle_L$
φ：基底狀態	ψ_k：Gauss 核
∇f	$\nabla\varphi = (\partial_t\varphi, t \in \mathbf{R}^1)$
$\varphi(f,g)$	$\varepsilon(\varphi,\psi) = \int(\nabla\varphi,\nabla\psi)(x)\psi_k(x)\,d\mu(x)$

上面, 對於 ψ_k 若 $K = c \cdot I$ 時如 9. 之例所示 ψ_k 實爲 $\triangle_L$ 之固有函數。

此處可議論的是, 當 ψ_k 爲更一般化之正廣義泛函數時, φ 是否爲可閉之事, 此處也可看出廣義泛函數之理論的有效應用。尤其沿 [10] 之路線擴張到 [11] 之結果, 考慮廣大函數族應是重要課題。

14. 編後語

經 3 回的敍述, 本稿即將結束時, 擬再一次回到 Lévy。他留下數學去世已是 15 年前的事了。想想最近數學的燦爛進步, 有些人認爲 Lévy 及其數學已經成爲歷史。其實不然, 希望無論如何再一次究讀他的論文與書刊。

這次拙稿中僅能作的說明是由隨機變分方程式所示而導出之廣義泛函之分析與變分法之手法適用於隨機場, 同時可求得函數分析的根源。想起紛爭當中拜訪巴黎的 Lévy 是爲 1968 年 5 月之事。當時所強調的是隨機變分方程式與 Gauss 型隨機場, 特別是 Brown 運動。兩天當中所談話的中心是這些事, 至今印象仍相當深刻。本稿之話題中心, 自然偏重此兩話題。其淸靜的和諧語調, 非常謙虛的態度, 談數學時之專一, 令人難忘懷, 與此風貌博學 (參考 8 厘米電影“mouvement Lévien”) 的學者對話後, 於歸途中, 經過的 Quartier Latin 沒有想到竟變成那樣荒廢。此爲很久以前的事了。

個人的 episode 擬於別的機會再談。最後再說一句, 今日若想比 Lévy 的工作有更

進一步的突破, 我想最好的方法是從他的函數分析到機率論所行之路再作一次拜訪。

追記

今年元月, 我經過巴黎時, 乘機再訪 P. Lévy 在巴黎 16e 區, Theophile Gautier 38 街的舊居。那是一棟高樓, P. Lévy 舊居就在頂樓, 一切景物依舊仍如22年前一樣。而在大樓入口處, 我仍可看到有塊紀念埤, 上面寫著"1930年至1970年間這裡曾經住了一位名作家 François Mauriac, 直到其去逝"。我再一次感覺到, 巴黎的這個角落的確是名士聚集充滿著文化氣息的地方。

(1990年2月)

參考文獻

Lévy 之著作

[L.5] Sur la variation de la distrbution de l'électricité sur un conducteur dont la surface se déforme. Bull. Soc. Math. de France 46 (1918), 35–68.

[L.6] A special problem of Brownian motion and a general theory of Gaussian random functions. Proc. 3rd Berkeley Symp. on Math. Statistics and Probability II (1956),133–175.

其他參考著作

[10] 福島正俊, Dirichlet 形式與 Markov 過程, 紀伊國屋數學叢書, 1975.

[11] T. Hida, J. Potthoff and L. Streit, Dirichlet forms and white noise analysis, Commun. Math. Phys. 115 (1988).

[12] A. Noda, Generalized Radon transform and Lévy's Brownian motion I, II, Nagoya Math. J. 105 (1987), 71–87, 89–107.

[13] 岡本清鄉, 等質空間上的解析學, 紀伊國屋數學叢書, 1980.

[14] Si Si, A note on Lévy's Brownian motion, Nagoya Math. J. 108 (1987) 121–130; Part II, 114 (to appear in 1989).

[15] L. Streit and T. Hida, Generalized Brownian fuctionals and the Feynman integral. Stochastic Processes and Appl. 16 (1983), 55–69.

[16] Second P. Lévy Seminar in Nagoya, 1986.

作者: 飛田武幸, 日本名古屋大學教授, 1991 年退休, 現任教於名城大學.

譯者: 李育嘉, 成功大學數學系教授.
陳明廷, 成功大學數學系副教授.