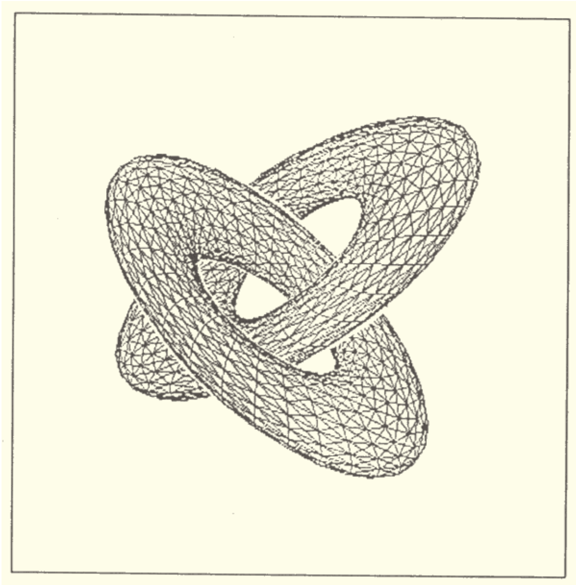
# 三維球面$S^3$

平 斯

學習幾何需要繪圖來體會空間的感覺, 剛開始時當然不會, 只是跟著老師裝模作樣的比畫。高中時王景雲教軌跡與作圖, 那種圓規和三角板齊飛, 揮灑自如的情景且不提了。數一時修王九逵的微積分, 他露了一手畫圓的絕活: 先像抽煙似的夾根粉筆, 把大拇指捺在黑板上做圓心, 叉開虎口做半徑, 只那麼一擰就得了。後來跟賴東昇學幾何, 要畫個球面時, 只見他閒閒的撿顆粉筆頭, 緩緩的轉向黑板, 淡淡的三兩筆, 連經緯坐標也都有了。受到這些老師們的薰陶, 自己當然也練就了一身空手入刃的功夫, 應付等閒曲線面還綽綽有餘。閒來用 PC468 畫個圓球, 還總覺得不如手繪的巧, 更不如當年賴桑遠甚。奈何現在遭遇到的圖愈來愈複雜且抽象, 非借用工具不可, 同時還得配上大量的想像力才行。比方說下圖是陳門弟子班卓夫 T. Banchoff 用來代表的三維球面 (參考一), 那該怎麼說呢?

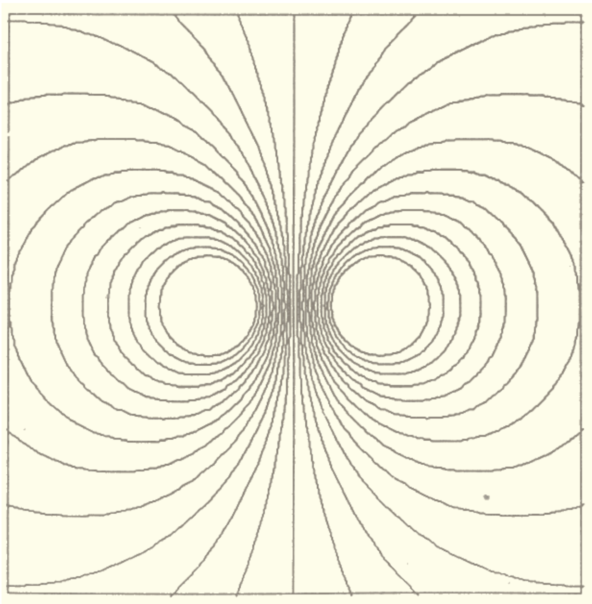


圖一

這要從基本的解析幾何開始, 聯考曾經有過這樣的題目: 平面上通過兩定圓交點的圓方程式是

$$\frac{x^2+y^2+2ax+2by+c}{x^2+y^2+2\alpha x+2\beta y+\gamma}=k$$

萬一出題委員擺了烏龍, 這兩圓其實不相交, 這個式子不會穿幫, 仍然可用, 還能畫出下圖



圖二

這個題目, 其實從球面來看比較清楚。經過立像投影 (Stereographic projection) 把平面映到球面上, 引進坐標 $\zeta = \frac{2x}{1+x^2+y^2}$, $\eta = \frac{2y}{1+x^2+y^2}$, $\zeta = \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$ 原式就改成

$$\frac{a\xi + b\eta + c\zeta + d}{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \delta} = k$$

由於兩定圓的相關位置, 有不同的各種類型, 全都稱爲許坦勒圓族 (Steiner Circles)。

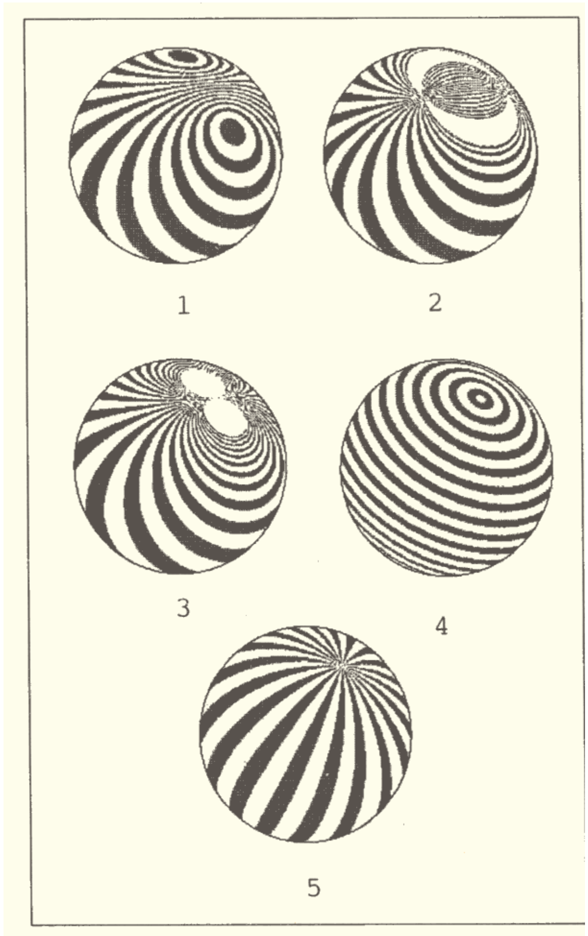
(1) 兩圓相離,

(2) 兩圓相交,

(3) 兩圓相切,

(4) 兩圓同心,

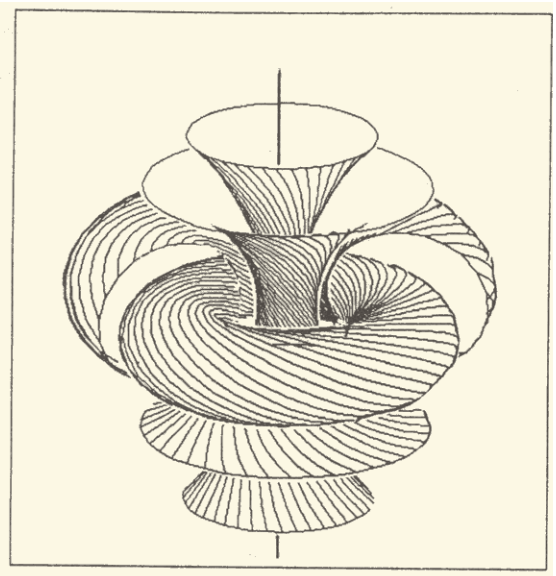
(5) 兩圓退化成相交兩直線。




圖三

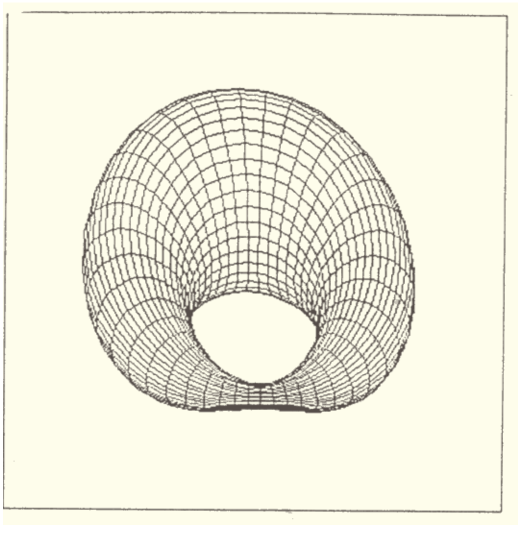
個中 (1) 就是圖二映至球面的樣子, 隱約透露了三維球面的一些玄機。首先 $S^3$ 只是比 $\mathbf{R}^3$ 多加了一個無窮遠點, 再經過亞歷山大緊化 (Alexander Compactification) 而成。問題在怎樣加, 加在那裡? 把圖二視成 $\mathbf{R}^3$ 裡的水平 $xy$ 面。對中間的 $y$ 軸旋轉, 兩旁對稱的兩個眼, 轉出一個實心的環體。剩下的是一些環繞著這個環體周圍, 半徑愈來愈大的圓周, 和他們的極限 — $y$ 軸。理論物理學家潘若斯 R. Penrose 做旋子理論, 刻意要看 $S^3$ , 用的也是這個法子, 他還管這些圓周叫克利佛平行圓 Clifford Parallel (參考

二), 有圖爲證



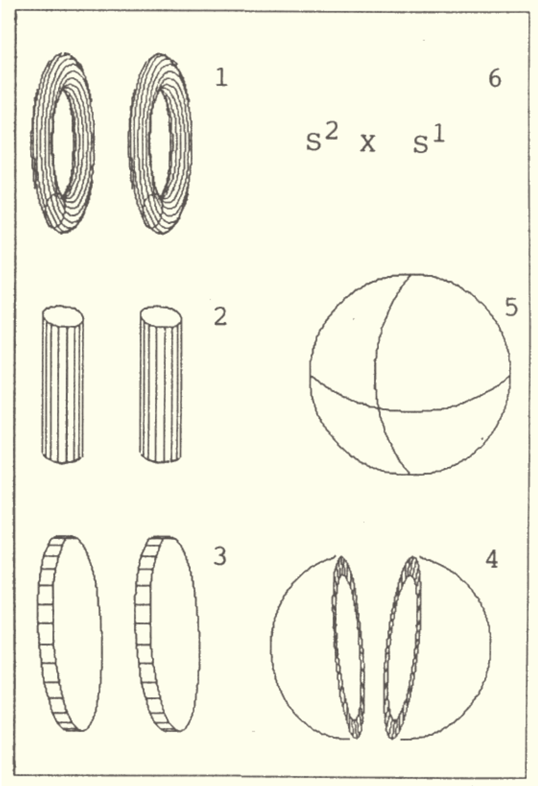
圖四

要記得 $S^3$ 必須在 $\mathbf{R}^4$ 裡才看得到, 所以還有一根 $\omega$ 軸, 把無窮遠點加上後, 在 $xy\omega$ 坐標上看圖二就是圖三 (1)。因此把所有的圓周攏在一齊, 就得了另一個實心的環體。



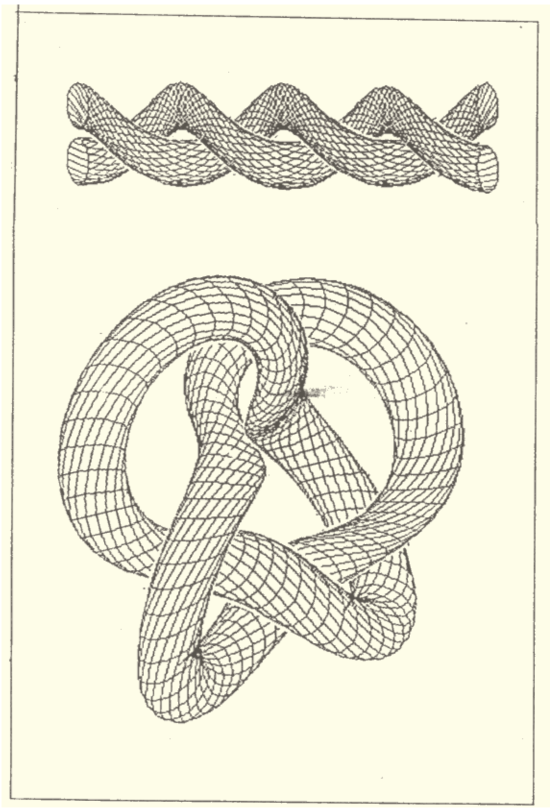
圖五

解構 $S^3$ 成兩環體, 看來是很容易的完成了。只是把它們組合回去, 還須要一些功夫。基本的困難是怎樣把兩個環面黏合起來。如果組合的方式, 出了差錯, 會得到非常意外的結果, 不信請看下列操作的結果, 竟是 $S^2 \times S^1$ 。




圖六

正確的過程, 應先把兩個環體切成圓柱, 扭成麻花後, 再頭尾相黏形成圖一裡糾纏的兩個環體, 最後順著環面的條紋黏起來。這裡扭成麻花的過程很重要, 上圖沒有扭所以形成 $S^2 \times S^1$。扭一次, 形成 $S^3$。扭兩次, 形成 SO(3) 。普遍來說, 結果是一個以圓周爲纖維, 建立在球面上的一個纖維叢, 不妨把它想像成北方麵食大花捲, 通常寫成 $S^1 \to E(n) \to S^2$。這裡的 $n$ 是扭的次數, 來自圓周的基本群 $\pi_1(S^1) = \mathbf{Z}$



圖七

幾何和拓樸之間互動的條件常透過曲率來表現, 然而曲率有許多面貌, 光就不同層次的正號而言, 就有下列幾種:

(1) 曲率張量爲正定,

(2) 截曲率恆正,

(3) 歐拉形式爲正,

(4) 特徵數爲正。

其中 (1) $\Rightarrow$ (2) 不言自明, 特別在四維時 (2) $\Rightarrow$ (3) 成立, (3) $\Rightarrow$ (4) 可由陳省身推廣的高斯朋涅 (Gauss-Bonnet) 定理得之。如果由 (4) 能向上逆推, 就會有一個邏輯等價的迴路, 那該多美啊! 究竟能推多遠呢? 畢竟 (1) 太強了, 退而求其次, (2) 也許適合。於是開始著手檢驗, 先用馬上能想到的例子, 第一個是球面 $S^4$ , 果然符合, 再來複數投影面 $P^2C$ 也符合。三人成虎, 再有一個就更加有信心了。不料就是下一個例子卡住了: $S^2\times S^2$ 的特徵數是 4, 但是它會有正截曲率的度量嗎? 可能有。且看 $S^3$ 是個三維流形, 有簡易的法正坐標叢 $SO(4)=S^3\times SO(3)$。由上述 $S^3$ 和 $SO(3)$ 的結構, 就有一個纖維叢 $S^1\times S^1 \rightarrow SO(4) \rightarrow S^2\times S^2$ 而 $SO(4)$ 上的嘉當基寧形式 (Cartan Killing form) 是個很自然的度量。倉西正武 (Masatake Karunishi) 宣稱成功的調整它到壓下來在 $S^2\times S^2$ 會有正截曲率。1990 年尾, 他在清華大學發表這項結果, 只見他折騰了三個小時, 沒有證完就幾乎癱在講台前, 草草收場。雪上加霜的是他的手稿又是限量發行, 如今匆匆兩年過去了, 看過的人, 誰也不敢鐵齒說對還是錯。整件事, 和原來的數學問題一樣, 是一齣令人困惑的羅生門。

## 参考文獻


1. T. Banchoff etc., Advances in Applied Math. 7, 282-308 (1986).
2. R. Penrose, Spinors and Space-time II, Cambridge University Press.