談Stirling公式

蔡聰明

甲. 一個機率問題

什麼是一個事件 (event) 的機率? 這是機率論最基本也是爭論最多的一個問題。

舉最簡單的例子來說明: 丟一個公正銅板 (fair coin), 出現正面 (head) 的機率爲 $\frac{1}{2}$, 這是什麼意思呢? 常識性的解釋大致是, 將此銅板獨立地丟"很多"次, 那麼正面出現的次數"大約"佔一半, 這是在隨機的說不準中很確定的事情。所謂的"平均律"(the law of averages) 或"大數法則"(the law of large numbers) 隱隱約約就是指著這個解釋。不過, 常識往往是含糊的或自相矛盾的, 需要加以精煉。事實上,"數學是精煉的常識"(Mathematics is a refined common sense)。常識是我們作觀念探險之旅的出發點。

問1: 丟 $2n$ 次銅板, 正面恰好出現 n 次的機率有多大?

根據組合學, 丟 $2n$ 次銅板, 共有 2^{2n} 種可能結果, 假設每一種結果發生的機會均等, 那麼 $2n$ 次中有 n 次爲正面的結果共有 ${}_{2n}C_n$ 種, 故得機率爲

$$p_{2n} = \frac{{}_{2n}C_n}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!n!} \tag{1}$$

我們更有興趣的問題是, 當n趨近 ∞ 時, p_{2n} 會趨近於多少? 上述常識性的解釋似乎是說, $\lim\limits_{n\to\infty} p_{2n} = 1$, 這成立嗎? 這需要對 (1) 式作精確的估算, 於是引出了下面的

問2: 當 n 很大時, 如何估算 $n!$? 更明確地說: 當 n 趨近 ∞ 時, $n!$ 的漸近相等式 (Asymptotically equal formula) 是什麼? 即要找一個"好用"的數列 (a_n) 使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{a_n} = 1, \text{ 記成 } n! \sim a_n。$$

我們希望找到這樣的 (a_n), 然後代入 (1) 式中計算出極限值 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{2n}$, 就可以檢驗上述常識性的機率解釋是否正確。

$n!$ 的漸近相等式存在嗎? 如何找? 這就來到了 Stirling 公式的大門口。在文獻上, 有許多文章論述 Stirling 公式的簡化證明或機率式的證明 (參見 [1] 至 [9]), 不過都只是在已經知道公式後, 給出證明而已, 並沒有說出如何"看出"或"猜出"公式的追尋、探險過程。因此令人有"美中不足"或"未盡妙理"的感覺。本文我們就試著來補上這個缺憾, 展示一種推測式的猜想過程。我們不排斥還有其它猜想過程, 因爲登一座山可以有各種不同的路徑, 路徑越多越美妙。

乙. $n!$的馴服

首先觀察 $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$, 欲估計它, 最簡單的是採高估策略: 每個因數都用 n 來取代, 亦即取

$$a_n = \underbrace{n\cdot n\cdot \cdots n}_{n\text{個}} = n^n \qquad (2)$$

顯然 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$, 故 n^n 高估了 $n!$, 不過也不錯,“萬事起頭難”, 有個開頭, 就可以逐步修正、改進, 從錯誤中學習, 而達眞理的殿堂。

問3: 如何改進 (2) 式?

我們改採中庸策略: 每個因數都用“中位數” $\frac{n}{2}$ (差不多就是算術平均 $\frac{n+1}{2}$) 來取代, 亦即取

$$a_n = \underbrace{\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}\cdots\frac{n}{2}}_{n\text{個}} = (\frac{n}{2})^n = n^n\cdot 2^{-n} \quad (3)$$

這樣應該會比(2)式更好才對吧!

我們必須對 (3) 式作分析與檢驗的工作。令

$$b_n = \frac{n!}{(\frac{n}{2})^n}$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$, 那麼“芝麻就開門”了, $a_n = (\frac{n}{2})^n$ 就是我們所要的漸近公式。然而我們的內心不禁會響起如下的懷疑: 眞理不會藏得這麼淺顯, 讓我們一猜即中吧?

我們來比較 $n!$ 與 $(\frac{n}{2})^n$的大小。由算術平均大於等於幾何平均定理知

$$\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2} \approx \frac{n}{2}$$

事實上可以用數學歸納法證明:

$$n! < (\frac{n}{2})^n, \ \ \forall\, n = 6, 7, 8, \cdots$$

因此當 n 很大時, 用“相差”的觀點來看, $(\frac{n}{2})^n$ 高估了 $n!$ 但是此地我們應該另採“相比”的觀點更適當, 因爲我們要找的是 $n!$ 的漸近相等式。例如, n^2+n 與 n^2, 從“相差”觀點來看, 當 $n\to\infty$ 時, 兩者之差 $(n^2+n)-n^2\to\infty$; 但是從“相比”觀點來看, $\frac{n^2+n}{n^2}\to 1$, 即兩者漸近地相等。換言之,“相差”觀點的高估, 還是有可能是“相比”觀點的漸近相等。

考慮 $n!$ 與 $(\frac{n}{2})^n$ 之比的數列 (b_n), 我們的目標是探求極限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$。首先注意到 (b_n) 是一個遞減的正項數列, 由實數系的完備性知

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha\text{存在, 且}\alpha\ge 0 \qquad (4)$$

但是 α 等於多少, 並不容易看出。我們採用旁敲側擊的戰術, 我們觀察到下面簡單的

補題1: 設 (S_n) 爲一個正項數列。如果 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in\mathbf{R}$ 且 $S\ne 0$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n} = 1$。

這並沒有告訴我們一個數列何時會收斂, 不過卻有“消極中的積極”作用。如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n} = 1$ 不成立, 則可能有三種情形:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0\text{或}\lim_{n\to\infty} S_n = \infty\text{或}\lim_{n\to\infty} s_n\text{不存在}$$

此時根本不必夢想會有$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$。另一方面, 如果$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n} = 1$, 則 (S_n) 可能收斂, 也可能發散; 此時也不能保證 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$。

現在就來計算極限

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(\frac{n+1}{2})^{n+1}}\cdot\frac{(\frac{n}{2})^n}{n!}\\ &= \frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{2}{e} < 1 \quad (5)\end{aligned}$$

因此 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=1$不成立, 故下列三者之一成立:

$$\lim_{n\to\infty} b_n=0\text{或} \lim_{n\to\infty} b_n=\infty\text{或} \lim_{n\to\infty} b_n\text{不存在。}$$

配合 (4) 式立知 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$, 所以 $(\frac{n}{2})^n$ 還是高估了 $n!$。只好繼續追尋。

問4: 如何改進 (3) 式?

我們的目標是尋找比 $(\frac{n}{2})^n$ 還小一點的估計式。我們從兩個角度來觀察:

(i) 由微積分知道, 對差分而言, 2 是自然指數的底數 $(\triangle 2^n=2^n)$, 但是對需取極限的微分而言, 比 2 大的 $e(\approx 2.71828)$ 才是自然指數的底數 $(De^x=e^x)$。e 似乎是比 2 更佳的選擇;

(ii) 在 (5) 式中, 若將 2 改爲 e, 則極限值變成 1, 這似乎是不錯的念頭。

這兩點觀察給我們啓示, 何不將 (3) 式中的 2 改爲神奇的數 e 呢? 換言之, 將 $(\frac{n}{2})^n$ 改成小一點的 $(\frac{n}{e})^n$ 似乎是個好主意。讓我們投石問路, 試試看, 亦即重新取

$$a_n=\underbrace{\frac{n}{e}\cdot\frac{n}{e}\cdots\frac{n}{e}}_{n\text{個}}=(\frac{n}{e})^n=n^ne^{-n} \qquad (6)$$

接著是檢驗工作。令 $n!$ 與 $(\frac{n}{e})^n$ 的相比爲

$$c_n=\frac{n!}{(\frac{n}{e})^n}$$

容易求得極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}=1$, 但是還是無法得到我們夢想的結果 $\lim_{n\to\infty} c_n=1$。繼續做苦工 (dirty works) 吧!

首先我們來比較 $(\frac{n}{e})^n$ 與 $n!$ 的大小。由 $2<(1+\frac{1}{n})^n<e$ 可得到

$$\frac{(\frac{n+1}{e})^{n+1}}{(\frac{n}{e})^n}<\frac{(n+1)!}{n!}<\frac{(\frac{n+1}{2})^{n+1}}{(\frac{n}{2})^n}$$

再由數學歸納法可證得下面結果:

補題2:

(i) $n!<(\frac{n}{2})^n,\ \forall n\geq 6$

(ii) $(\frac{n}{e})^n<n!,\ \forall n\in\mathbf{N}$

(iii) $n!<(\frac{n+1}{2})^n,\ \forall n\geq 2$

[註]. 上述 (iii) 是去年 (1992) 大學夜校聯招試題。

$(\frac{n}{2})^n$不是我們所要的答案, 改爲$(\frac{n}{e})^n$, 會不會矯枉過正呢? 讓我們來求算極限值 $\lim_{n\to\infty} c_n$。由補題 2 知

$$c_n=\frac{n!}{(\frac{n}{e})^n}>1,\ \ \forall n\in\mathbf{N}$$

並且容易驗知 (c_n) 爲一個遞增數列, 故

$$\lim_{n\to\infty} c_n=\beta\text{存在, 且}\beta\in(1,\infty]\text{。}$$

爲了探求β的眞確値, 我們想到了也許可以請著名的 Wallis 公式來幫忙, 因爲公式中涉及了 $n!$。這是 Wallis 在 1656 年研究圓的求積問題而得到的, 公式的發現過程也非常富有方法論上的啓發與意涵。

補題3: (Wallis 公式, 1656 年)

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{(2n-1)}\cdot\frac{2n}{(2n+1)}\cdots=\frac{\pi}{2}$$

或

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n\cdot n!)^4}{[(2n)!]^2(2n+1)}=\frac{\pi}{2}$$

或

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}\text{。}$$

由

$$c_n = \frac{n!}{(\frac{n}{e})^n} = \frac{n! e^n}{n^n}$$

得

$$n! = c_n\, n^n\, e^{-n}$$

從而

$$(2n)! = c_{2n} (2n)^{2n} e^{-2n}$$

代入 Wallis 公式得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} c_n^2 n^{2n} e^{-2n}}{c_{2n}(2n)^{2n} e^{-2n}\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$$

亦即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n^2}{c_{2n}\sqrt{n}} = \sqrt{\pi} \tag{7}$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \beta$ 是有限數, 則由 (7) 式得 $0 = \sqrt{\pi}$, 這是一個矛盾。結論是

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(\frac{n}{e})^n} = \infty$$

換言之, $(\frac{n}{e})^n$ 低估了 $n!$。

我們繼續追問: 低估了多少?

最容易猜想到的增估是取

$$a_n = (\frac{n}{e})^n \cdot n$$

令 $d_n = \frac{n!}{(\frac{n}{e})^n \cdot n}$, 易驗知 (d_n) 爲一個遞減的正項數列, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = r$ 存在, 且 $0 \le r < \infty$。今若 $0 < r < \infty$, 仿上述程序由 Wallis 公式何得 $\infty = \sqrt{\pi}$ 之矛盾。因此 $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$。換言之, $(\frac{n}{e})^n \cdot n$ 又高估了 $n!$。

只好再減估一點, 比 n 更低階趨近於 ∞ 的式子是什麼呢? 我們自然想到 n^α, $0 < \alpha < 1$, 配合著對 (7) 式的觀察, 我們自然想到了 $\sqrt{n}$, 於是我們猜想

$$a_n = (\frac{n}{e})^n \sqrt{n} \tag{8}$$

這也許是個不錯的折衷辦法。

我們也可以從另一個角度來觀察: 由微積分知

$$(1+\frac{1}{k})^k < e < (1+\frac{1}{k})^{k+1},\ \ k = 1, 2, 3, \cdots$$

令 $k = 1, 2, \cdots, n-1$ 得到一組不等式, 將它們乘起來得

$$e(\frac{n}{e})^n < n! < e\, n(\frac{n}{e})^n$$

此式只是 $n!$ 的粗估, 不過也啓示我們用折衷的 $(\frac{n}{e})^n\sqrt{n}$ 來估計 $n!$

讓我們來檢驗看看這個猜想好不好。令

$$u_n = \frac{n!}{(\frac{n}{e})^n \sqrt{n}} \tag{9}$$

問5: 極限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 存在嗎? 是多少?

補題5: (u_n) 是一個遞減的正項數列。

證明: 考慮相比

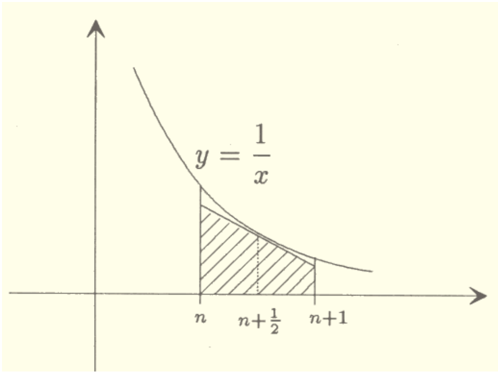
$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{e}(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}$$

我們觀察到下面兩式是等價的:

$$e < (1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{2n+1} &= \frac{1}{n+\frac{1}{2}} < \ln(n+1) - \ln n \\ &= \int_n^{1+n} \frac{1}{x} dx \end{aligned} \tag{11}$$

由於 $y = \frac{1}{x}$ 爲一個凸函數, 且下圖梯形面積恰好爲 $\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$



因此 (11) 式成立, 從而 (10) 式成立。於是 $\frac{u_n}{u_{n+1}}>1$, 亦即 (u_n) 爲一個遞減正項數列, 證畢。

因此極限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=L$ 存在, 且 $0\le L<\infty$。如果 $L=0$, 我們就必須繼續再追尋下去。幸運的是, 我們已經可以用 Wallis 公式證明 $L=\sqrt{2\pi}$, 這眞是一個美妙的結果。$n!$ 終於被馴服!

丙. Stirling 公式的證明

定理1: (Stirling 公式, 1730 年)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,n^ne^{-n}}=1$$

記成 $n!\sim\sqrt{2\pi n}\,n^ne^{-n}$, 當 $n\to\infty$。

證明:

由 $u_n=\dfrac{n!}{n^ne^{-n}\sqrt{n}}$

得

$$\begin{aligned}n! &= u_n\,n^n\,e^{-n}\sqrt{n}\\(2n)! &= u_{2n}\,(2n)^{2n}\,e^{-2n}\sqrt{2n}\end{aligned}$$

代入 Wallis 公式並且化簡得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n^2}{u_{2n}\sqrt{2}}=\sqrt{\pi}$$

再由 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=L$ 得 $\frac{L^2}{L\sqrt{2}}=\sqrt{\pi}$, 從而 $L=\sqrt{2\pi}$, 證畢。

Stirling 公式涉及兩個神奇的常數 π 與 e, 這是其美妙的所在。物理學家 R.Feynman 每當遇到一個含有 π 的公式時, 總是要問 :“圓在哪裡? ”(Where is the circle?) 此地我們很容易回答:π 來自 Wallis 對圓的求積公式。

利用同樣的方法我們可以證明下面深刻的結果:

定理2: 設 $\alpha>0$, 且 $x_n=\frac{n!}{n^ne^{-n}n^\alpha}$, 則

(i) 當 $\alpha>\frac{1}{2}$ 時, (x_n) 爲遞減數列且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

(ii) 當$\alpha<\frac{1}{2}$時, (x_n) 終究遞增且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$。

換言之, 當 $\alpha>\frac{1}{2}$ 時, $n^ne^{-n}n^\alpha$ 高估了 $n!$; 當 $\alpha<\frac{1}{2}$ 時, $n^ne^{-n}n^\alpha$ 低估了 $n!$。$\alpha=\frac{1}{2}$ 恰是分水嶺的 Stirling 公式。

證明: 考慮相比

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{(1+\frac{1}{n})^{n+\alpha}}{e}$$

我們來比較 $(1+\frac{1}{n})^{n+\alpha}$ 與 e 之大小, 我們改比較它們的對數:

$$\ln(1+\frac{1}{n})^{n+\alpha}=(n+\alpha)\ln(\frac{1+n}{n})\text{ 與 }\ln e=1$$

由級數展開公式

$$\ln(\frac{1+x}{1-x})=2(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots),\ \ |x|<1$$

令 $x=\frac{1}{2n+1}$, 則 $\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n}$, 於是

$$\begin{aligned}&(n+\alpha)\ln(\frac{n+1}{n})\\ =\ &2(n+2)(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}\\ &+\cdots)\end{aligned} \tag{12}$$

(i) 當 $\alpha>\frac{1}{2}$ 時, $2(n+\alpha)>2n+1$, 故由 (12) 式易知

$$(n+\alpha)\ln(\frac{n+1}{n})>1$$

亦即

$$(1+\frac{1}{n})^{n+\alpha}>e$$

因此 (x_n) 遞減, 於是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 存在且 $0\leq a<\infty$。如果 $0<a<\infty$, 由 Wallis 公式會得到一個矛盾。只好 $a=0$, 亦即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

(ii) 當 $\alpha<\frac{1}{2}$ 時, $2(n+\alpha)<2n+1$。將 (12) 式中的 $5,7,9,\cdots$ 皆改爲 3, 得到估計式

$$\begin{aligned}&(n+\alpha)\ln(\frac{n+1}{n})\\ <\ &(2n+\alpha)(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}\\ &+\frac{1}{3(2n+1)^5}+\cdots)\\ =\ &(2n+\alpha)\cdot\frac{1}{2n+1}\\ &+2(n+\alpha)\cdot\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{(2n+1)^2}}\\ =\ &\frac{2n+2\alpha}{2n+1}(1+\frac{1}{12(n^2+n)})\\ =\ &\frac{(2n+2\alpha)(12n^2+12n+1)}{(2n+1)(12n^2+12n)}\end{aligned}$$

分母$=24n^3+36n^2+12n$, 分子$=24n^3+(24+24\alpha)n^2+(2+24\alpha)n+2\alpha$, 分母$-$分子$=(12-24\alpha)n^2+(10-24\alpha)n-2\alpha$。

今因 $\alpha<\frac{1}{2}$, 故 $12-24\alpha>0$。從而只要 n 夠大, 則分母大於分子。換言之, 只要 n 夠大,

$$(n+\alpha)\ln(\frac{n+1}{n})<1$$

亦即

$$(1+\frac{1}{n})^{n+\alpha}<e$$

於是 (x_n) 終究遞增, 故 $\lim x_n=b$ 存在且 $0<b\leq\infty$。如果 $0<b<\infty$, 同樣由 Wallis 公式會得到一個矛盾。只好 $b=\infty$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$。

推論: (i) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^ne^{-n}\ln n}=\infty$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^ne^{-n}\sqrt{n}(1+\frac{1}{12n})}=\sqrt{2\pi}$

將上述追尋 $n!$ 的歷程圖解如下:

$n!$

$(\frac{n}{e})^n$	$(\frac{n}{e})^n n^\alpha$	$(\frac{n}{e})^n\sqrt{n}$	$(\frac{n}{e})^n n^\alpha$	$(\frac{n}{e})^n n$	$(\frac{n}{2})^n$	n^n
	$\alpha<\frac{1}{2}$		$\alpha>\frac{1}{2}$			
(3)	(7)	(5)	(6)	(4)	(2)	(1)

低估　　　　　　　　　高估

經過這麼辛苦的試誤、計算過程, 終於得到美麗的 Stirling 公式, 這是令人欣喜的事。唯有經過這樣的辛苦, 我們對這個公式才眞正有感覺 (feeling), 甚至有感情。數學公式不再是冰冷的, 而是可親的。

如果將做數學比喻爲登一座高山, 那麼現代人大多是利用現代化的交通工具直接登

到山頂 (相當於直接給出公式、定理), 然後就指看剛才的登山路徑 (即給出邏輯證明), 接著是欣賞風景 (應用公式來解一些問題)。但是我們要指明, 如果沒有經歷一步一步登山的流汗, 沒有親自感受花草的芳香與泥土的味道, 甚至嚐到偶爾的迷路, 即使到了山頂也是不容易領會美景的。

丁. 初步否定常識性的機率概念

現在我們要利用 Stirling 公式來探討機率之謎 (the enigma of probability)。首先觀察到一個顯然的

補題6: 設 $(a_n), (b_n), (c_n)$ 及 (d_n) 皆爲正項數列且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$。若 $a_n \sim c_n$ 且 $b_n \sim d_n$ 則 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_n}{d_n} = l$。

接著計算“丟 $2n$ 次銅板恰好出現 n 次正面”的機率 p_{2n} 在 $n \to \infty$ 的極限

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} p_{2n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} n! n!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi 2n}(2n)^{2n} e^{-2n}}{2^{2n} 2\pi\, n\, n^{2n} e^{-2n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\, n}} = 0\end{aligned}$$

定理3: $\lim\limits_{n\to\infty} p_{2n} = 0$。

因此, 當 $n \to \infty$ 時, p_{2n} 不但不如原先料想的趨近於 1 (即鐵定發生), 反而是趨近於 0 (即不可能發生)。這警告我們, 機率的解釋要很小心。

常識性的說法 :“丟很多次銅板, 正面大約佔一半。”如果將“大約佔一半”, 解釋爲“恰好是一半”的點式推估說法, 顯然是不對的。如何修正呢? 自然想到的是改用區間式推估的說法 (用手海底撈針不成, 就改用網子來撈)。

爲了敍述方便起見, 我們引入隨機變數 (random variable) 的概念。對於 $k = 1, 2, 3, \cdots$, 令隨機變數

$$\xi_k = \begin{cases} 1, & \text{若第}k\text{次丟銅板得到正面} \\ 0, & \text{若第}k\text{次丟銅板得到反面} \end{cases}$$

再令

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$$

這也是一個隨機變數, 定義在某個機率空間 $(\Omega,\ \mathcal{F}, P)$ 上, 代表丟 n 次銅板中, 正面出現次數之隨機變數, 它具有二項分佈。於是“$S_{2n} = n$”就表示丟 $2n$ 次銅板正面恰好出現 n 次的事件, 其機率記爲 $P(S_{2n} = n)$。因此定理 3 是說 $\lim\limits_{n\to\infty} P(S_{2n} = n) = 0$。

進一步我們猜想:S_{2n} 落在 n 的近旁之機率應該會大起來吧? 也許這是“正面大約佔一半”更貼切的解釋。精確的計算是探求隱晦奧秘的不二法門, 讓我們就來算算看。令 $a > 0$ 爲一個固定數, 那麼

$$P\ \ (n - a \le S_{2n} \le n + a) = \sum_{k=n-a}^{n+a} {}_{2n}C_k \cdot \frac{1}{2^{2n}}$$

$$\sim\ \frac{2a}{\sqrt{\pi n}} \to 0, \text{當}n \to \infty\text{時。}$$

因此我們又得到一個不出所料的結果:

定理4: 對任意固定數 $a > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|S_{2n} - n| \le a) = 0\text{。}$$

換言之, 以 n 爲中心, 左右之長皆爲 a 之區間, 還是沒有網住任何機率!

另外, 將偶數 $2n$ 改爲奇數 $2n+1$, 定理 4 仍然成立。因爲當 $n\to\infty$ 時, 相應項的比值爲

$$\frac{{}_{2n+1}C_k\frac{1}{2^{2n+1}}}{{}_{2n}C_k\frac{1}{2^{2n}}}=\frac{2n+1}{2n+1-k}\cdot\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$$

所以 $P(-a\leq S_{2n+1}-\frac{2n+1}{2}\leq a)$

$$=\sum_{k=-a+\frac{2n+1}{2}}^{a+\frac{2n+1}{2}}{}_{2n+1}C_k\frac{1}{2^{2n+1}}$$

$$\sim\frac{1}{2}\sum_{k=-a+\frac{2n+1}{2}}^{a+\frac{2n+1}{2}}{}_{2n}C_k\frac{1}{2^{2n}}\to 0$$

所以得到

定理5: 對任意有限正數 a, 恆有

$$\lim_{n\to\infty}P(-a\leq S_{2n+1}-\frac{2n+1}{2}\leq a)=0$$

將上述定理 4 與定理5歸結起來就得到:

定理6: 對任意有限正數 a, 恆有

$$\lim_{n\to\infty}P(-a\leq S_n-\frac{n}{2}\leq a)=0。$$

這是一個令人驚異的結果, 但也令人失望! 邏輯的悶棍把常識觀點打得眼冒金星。用任何有限區間 $[-a,a]$ 來網住 $S_n-\frac{n}{2}$ 所散佈之機率, 當 $n\to\infty$ 時, 根本沒有網到任何機率, 機率全部流失掉! 換言之, 丟 n 次銅板, 出現正面的次數, 落在包含 $\frac{n}{2}$ 的任何有限區間的機會, 當 n 很大時, 微乎其微。

什麼是機率? 它仍然是"雲深不知處"!

James Bernoulli (1654-1705) 積20年的辛苦工作終於得到突破性的發現:

定理7: (Bernoulli 的弱大數法則, 1713) 對任意 $\varepsilon>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}P(|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}|\leq\varepsilon)=1$。

註記: 1. 從外形看起來, Stirling 公式並不漂亮, 但卻很多用途, 它是揭開許多深刻奧秘的鑰匙。在研究二項分佈的性質時, De Moivre 最先得到這個公式 (1718 年); 後來 James Stirling 在 1730 年又重新得到它。在數學中有許多定理所掛的名字往往不是第一個發現者, 此地是一個例子。

2. 從前楊維哲教授上機率論課, 曾要求學生獨立地去追尋 Stirling 公式, 本文算是一個回應。

3. $n!$ 的連續化就是 Gamma 函數, 內容精彩豐富, 這是 Euler 的貢獻。

參考文獻

1. M. I. Aissen, Some remarks on Stirling formula, A. M. M. 61 (1954), 687-691.
2. H. Robbins, A remark on Stirling's formula, A. M. M. 62 (1955), 26-29.
3. W. Feller, A direct proof of stirling's formula, A. M. M. 74 (1967), 1223- 1225.
4. R. A. Khan, A probabilistic proof of Stirling's formula, A. M. M. 81 (1974), 366-369.
5. C. S. Wong, A note on the central limit theorem, A. M. M. 84 (1977), 472.
6. C. R. Blyth and P. K. Pathak, A note on easy proofs of Stirling's formula, A. M. M. 93 (1986), 376-379.
7. P. Diaconis and D. Freedman, An elementary proof of Stirling's formula, A. M. M. 93 (1986), 123-125.
8. J. M. Patin, A very short proof of Stirling's formula, A. M. M. 96 (1989), 41-42.

9. G. Marsaglia and J. C. W. Marsaglia, A new derivation of Stirling Approximation to $n!$, A. M. M. 97 (1990), 826-829.

—本文作者任教於台灣大學數學系—