數學中的公理化方法(下)

吳開朗

四、數學公理系統的美學標準

美國數學家 F. S. 梅里特在其所著《工程中的現代數學方法》一書中曾經說過: “每一模型都是由一組公理定義的, $\cdots$ 公理自身必須無矛盾且相互獨立”[11]。所謂一組公理, 即是一個公理系統。關於公理系統的無矛盾性, 是指借助於演算不可能在一個公理系統中推出兩個相互否定的命題。關於公理系統的獨立性, 是指在該系統中任何一條公理都不可能作爲其餘各公理的邏輯推論。如果一個公理系統具備無矛盾性 (即相容性) 和獨立性, 那麼, 這個公理系統 (或者說這個理論體系) 就是優美的。因此, 相容性和獨立性也就是公理系統的美學標準。

獨聯體維林金等編著的《中學數學現代基礎》一書中曾指出: “可以由給定的公理系統導出的全部不同的命題, 一般說來有無窮多個。因此, 爲了證明給定的公理系統的相容性, 要想由這一公理系統作出全部可能的推論, 並且指出其中沒有相互矛盾的命題, 這是不可能的。爲了解決這個難題, 曾經創造一種特殊的方法, 它的名稱叫做模型法”。[12] 所謂模型法, 即是欲證明某一新數學理論的無矛盾性 (一致性), 或者欲證明某一新數學理論與某一已知的 (舊) 數學理論的相容性 (相對一致性), 可以設法爲它在古典數學中構造一個模型, 並且進而證明這個新數學理論的公理系統在該模型中都能夠得以實現, 這樣, 即可以把這個新理論的相容性, 化歸爲新理論與建造它的模型 (新理論的模型) 時所需要的古典數學理論的相容性 (相對一致性)。因此, 這種模型法, 又可稱之爲化歸法。例如, 我們利用龐卡萊 (Poincaré) 模型和球面模型, 可以把非歐幾何的相容性, 化歸爲歐氏幾何的相容性, 再利用算術模型, 又可進一步把歐氏幾何的相容性, 化歸爲算術理論的相容性。[13] 然而, 對於一個新理論而言, 並不需要如此逐步化歸, 一般地說, 只要是在古典數學中, 能夠爲其構造一個數學模型已足, 因爲古典數學已經過億萬群衆長期的科學實踐檢驗。

維林金在《中學數學現代基礎》一書中指出: “利用模型法也可以解決所給公理系統的獨立性問題。如果理論 T 中的公理 A, 由其它公理既不能證明, 也不能否定, 則稱公理 A 是與其它公理相獨立的。要證明所給公理 A 的獨立性, 應該建立一個新的公理系統, 在其中將公理 A 換成它的否定, 而T中其它公理則保持不變。如果所給的公理系統以

及用上述方法由它所得到的新公理系統都是相容的, 那麼, 則稱公理A與該理論體系T中的其它公理是相獨立的”。[14] 假設 Σ 爲一個公理系統, 並且已證得它是相容的。令 $\Sigma=\{A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n\}$, 欲證其中某一條公理 A_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 對於 Σ 中其餘各條公理是獨立的, 可以先構造一個與 A_i 相矛盾的命題 $\overline{A}_i$ (也可表示爲$\neg A_i$), 然後再證明新構造的公理系統 $\{\Sigma'+\overline{A}_i\}$ 具備相容性 (其中 $\Sigma'=\{A_1,A_2,\cdots,A_{i-1},A_{i+1},\cdots,A_n\}$), 由此即可推得 A_i 對於 Σ 中其餘各條公理具有獨立性。

現在我們來證明歐氏幾何希爾伯特公理系統中平行公理的獨立性:

該公理系統共有二十條, 按照希爾伯特著《幾何學基礎》一書中所排列的順序, 平行公理可記爲 p_{18}, 而整個公理系統可記爲:

$$\sum=\{p_1,p_2,p_3,\cdots,p_{20}\}。$$

欲證p_{18}對於$\Sigma'=\{p_1,p_2\cdots p_{17},p_{19},p_{20}\}$是獨立的, 可以另構造一個公理系統 $\{\Sigma'+\overline{p}_{18}\}$, 其實這個系統即是非歐幾何的公理系統。其中 $p_{18}=\{$ 設 a 爲任一直線, A 爲 a 外的任一點, 在 a 和 A 所決定的平面上, 至多有一條直線通過 A, 但不和 a 相交。$\}$, 此爲歐氏幾何的平行公理。

$\overline{p}_{18}=\{$ 設 a 爲任一直線, A 爲 a 外的任一點, 在 a 和 A 所決定的平面上, 至少有兩條直線通過 A, 但不和 a相交。$\}$, 此爲羅氏幾何的平行公理。

$\overline{p}'_{18}=\{$ 設 a 爲任一直線, A 爲 a 外的任一點, 在 a 和 A 所決定的平面上, 沒有一條直線通過 A, 但不和 a 相交。$\}$, 此爲黎氏幾何的平行公理。

對於歐氏幾何的公理系統, 可以表示爲 Σ; 對於羅氏幾何的公理系統, 可以表示爲 $\{\Sigma+\overline{p}_{18}\}$; 對於黎氏幾何的公理系統, 可以表示爲 $\{\Sigma+\overline{p}'_{18}\}$。這三種幾何學的公理系統都是二十條, 所不同的僅僅是平行公理在陳示上的一字之差, 但是, 由此而推演出的幾何定理, 則是迴然各異! 例如, 在歐氏幾何中可推出三角形的內角和等於 π, 在羅氏幾何中可推出三角形的內角和小於 π, 在黎氏幾何中可推出三角形的內角和大於 π。

由上述可知, 利用模型法不難證明公理系統 $\{\Sigma'+\overline{p}_{18}\}$ 和 $\{\Sigma'+\overline{p}'_{18}\}$ 是相容的, 因而可以斷言: 在希爾伯特的歐氏幾何公理系統中, 平行公理對於其餘各條公理是獨立的。事實上, 這即是利用公理系統的相容性來證明它的獨立性。

至於公理系統的範疇性 (Categoricity), 是指它的任意兩個模型都同構。從直觀意義上來講, 所謂兩個模型同構, 是指它們的元素及元素間的關係與其所研究的問題的性質無關。

近代以來, 一些新建立的公理系統, 多數是不完備的。例如, 群、環、域的公理系統, 就是如此。公理系統不具完備性的這些理論, 其特點往往是: 抽象概括性較高, 應用範圍較廣, 公理系統中基本概念和基本命題的個數較少, 選取模型的自由度也較大。

由於一切數學理論, 都可以以集合論做爲基礎, 因而, 任何公理系統的無矛盾性, 經過逐步化歸, 都可最終化歸爲集合論的無矛

盾性問題。然而, 關於集合論的無矛盾性問題又將如何解決呢? 在第三次數學危機 [15] 的沖擊下, 數學家們積極開展集合論公理化的研究, 設法把集合概念限制爲康托在 1899 年所提出的相容的集合。[16] 數學家 E. 策墨略 (Zermelo, 1871-1953) 在 1908 年提出了一個集合論公理系統, 後來, 數學家弗倫克林 (Fraenkel) 和斯考萊姆 (Skolem) 又加以改進, 從此便形成舉世公認的 ZF 公理系統。

引起數學家們爭論的另一個問題, 就是選擇公理。這條公理說: 從一族非空集合中各取一個元素, 可以構成一個新的集合。在一個相當長的時間內, 有些數學家希望用 ZF 系統來否定選擇公理, 可是, 1940 年哥德爾 (Gödel) 卻出人意料地證明了 ZF 系統與選擇公理彼此相容。於是, 到本世紀 40-50 年代, 數學家們又普遍傾向於接受選擇公理。因而, 在數學大廈裡, 現在實際上存在著兩種集合論, 即不包含選擇公理的集合論 (簡稱 ZF 系統) 和包含選擇公理的集合論 (簡稱 ZFC 系統)。[17]

由於承認選擇公理與不承認選擇公理, 都可能會引出一些悖論[18], 因而, 我們必須清楚地看到: 今天數學大廈的基礎仍然存在一道裂縫, 數學的理論體系尚未達到最終的完善與和諧!

那麼, 究竟應該以何種態度來對待數學理論中的悖論問題呢? 布爾巴基學派的態度是 “泰然自若”, 他們曾經這樣說過: “就像以往曾多次出現過的一樣, 將來有朝一日悖論可能會產生, 在悖論突然出現的迅猛打擊下, 數學一定會保存下來, 其巍巍大廈的主體部分決不會傾毀。爲了重新建立無矛盾的體系, 人們將繼續通過對數學的概念和方法進行調整來克服這些困難, 而系統地採用公理方法, 像在《數學原本》中所做的那樣, 必然會大大有助於縮短追索悖論產生根源的過程。廿五個世紀以來, 數學家們曾一再糾正他們的錯誤, 眼看著他們的科學並不因爲產生過悖論而變得荒蕪貧瘠, 反而日益繁榮昌盛。追思往昔, 默念未來, 我們完全有權利感到心寧神怡, 泰然自若。”

五、建立數學公理系統的一般思維方法

有人把數學公理系統的建立說得神秘莫測, 甚至加以歪曲, 把公理系統的建立說成是神的意志。很顯然, 公理學並非神學, 公理系統乃是對於大量數學知識的抽象概括, 是數學推理論證的出發點, 並非像神學那樣極力排斥理性, 把一切根據統統歸諸於聖經。

法國數學家 R. 笛卡爾 (Descartes, 1596- 1650) 是近代唯理論哲學的傑出代表, 他提出: 演繹法以公理爲前提, 公理是不需要任何論證的, 只要純粹的直覺就能理解。在笛卡爾看來, 直覺是一種理智活動, 不只是感性直觀活動。他認爲通過直覺就能發現作爲推理起點的、無可懷疑而清晰明白的概念, 也就是說, 直覺是發現公理的過程或活動。

美籍華人數學家王浩教授在《對哥德爾的反思》的學術報告中曾經提出: 戴德金得到皮阿諾自然數公理系統, 是來自於對自然數列的分析。分析顯然是以一種數學直觀爲

基礎。王浩教授認爲這個事實對於說明哥德爾的公理化理論, 乃是一個最合適的例子, 而哥德爾的公理化理論的主要內容, 則是由分析概念而確定公理。[19]

當然, 這種由分析概念而確定公理條文的思維方法, 也並非一朝一夕之功效。往往要經由幾代數學家的艱苦的思維勞動, 甚或經過曲折迂迴的歷史發展過程。以自然數的公理系統而論, 十七世紀, 德國著名數學家 J. W. 萊布尼茲 (Leibniz, 1646-1716), 曾經利用演繹法一 絲不苟地證明了 $2+2=4$。

$$2+2=2+(1+1)=(2+1)+1=3+1=4$$

他在這個證明中使用了加法的結合律以及 $2=1+1$, $3=2+1$, $4=3+1$ 等自然數的定義。到十九世紀中葉, 德國著名數學家格拉斯曼又挑選出一個定義加法和乘法的公理系統。1888 年, J. W. R. 戴德金在其論文《數是什麼? 數應該是什麼? 》中提出了關於自然數的性質應該接受的六條事實, 並以此作爲公理。1891 年 G. 匹阿諾 (Peano, 1850-1932) 正式在自己的論文中提出了自然數公理系統, 此系統後來被稱爲匹阿諾自然數公理系統。[20]

德國著名數學家 D. 希爾伯特在名著《幾何學基礎》一書中, 曾經提出: “建立幾何的公理和探究它們之間的聯繫, 是一個歷史悠久的問題, 關於這個問題的討論, 從歐幾里得以來的數學文獻中, 有過難以數計的傑作, 這個問題實際上就是把我們的空間直觀, 加以邏輯的分析”。[21] 由此可見, 對於空間直觀的邏輯分析乃是建立幾何公理系統的一般思維方法。

從數學理論的邏輯結構上來看, 不外乎是通過一些元素和關係, 來定義和推演另外的一些元素和關係。然而, 要想對於其中的所有元素和關係都下定義, 並且對於這些元素和關係之間的一切性質都加以證明, 那是根本不可能的。追本求源, 必然會存在有不可定義的元素和關係, 而這些元素和關係, 分別稱爲基本元素和基本關係, 二者統一稱爲基本概念。再者, 對於它們的含意和性質, 還必須加以規定, 亦即是對於它們在數學推理和演算中的作用, 還必須加以說明和限制。這種說明和限制的條文, 就叫做基本命題, 或者稱之爲公理。因此, 在任何公理系統中都必須包含有基本概念和基本命題這兩個組成部分, 並且其中的基本命題乃是對於基本概念的定義。由於這種定義並非十分顯然, 有時又稱之爲隱定義。以中國象棋而論, “馬走‘日’字, 象走‘田’, 車走直路, 砲翻山”, 這是下棋規則, 也是下棋的公理, 這些公理亦即是對“馬”、“象”、“車”、“砲” 的隱定義。1900 年, 希爾伯特在巴黎國際數學家代表大會上的講演中, 曾經明確提出: “在研究一門科學的基礎時, 我們必須建立一套公理系統, 它包含著對於這門科學基本概念之間所存在的關係的確切而完備的描述。如此所建立起來的公理, 同時也是這些基本概念的定義”。

任何一個數學公理系統的建立, 都是在該分支的理論發展到比較成熟的階段才開始醞釀的。數學家從實際問題加工提煉成數學知識, 這是第一次抽象, 而後由已經積累的數學知識, 加工改造成爲具有內部邏輯脈絡的理論系統, 則需要進一步再抽象。這種再抽象, 即是該數學分支的公理化過程。在這個過

程中, 要經由邏輯分析, 把有關形成概念和理論的最根本的要素抽取出來, 而把那些無關宏旨的東西加以揚棄, 這裡往往需要分析與綜合、演繹與歸納、實驗與抽象等科學方法的並舉兼施。按照著名數學家阿蒂亞 (M. F. Atiyah) 的描述, 建立公理系統的思維過程是: "專心致志地考慮問題的各個方面, 把它們變成公理, 然後研究它們的推論。像物理的情形一樣, 認識到形形色色的問題中那些共有的特徵, 應該抽出來加以公理化, 這是一個經驗和判斷的問題。最終的嚴格考驗, 就是對原來的數學問題是否有新的認識"。[22]

在建立公理系統時, 由於對基本概念和基本命題的不同選擇, 使得同一個數學分支, 在不同的時間和地點, 經過不同數學家的抽象思維活動, 也可以建立起形式迥異的公理系統。例如, 就群論來說, 它的很多性質都可以用來作爲自己的定義。荷蘭數學家 H. A. 羅倫茲 (Lorentz, 1853-1928) 曾舉出四十多種關於群的定義。[23] 其中每一種定義, 都可以看作是一種公理系統, 因而, 也可以說, 群論至少有四十多種不同的公理系統。以歐氏幾何而論, 有 Euclid 系統、Hilbert 系統、Veblen 系統、Forder 系統、Bachmann 系統等, 此外, 在歐氏幾向系統中, 將三角形合同公理換以公理 "三角形兩邊之和大於第三邊", 並保留其他一切公理, 這就是閔可夫斯基的 "數的幾何" (Leipzig, 1896)。儘管如此, 但仍然不可以把公理系統的建立, 誤認爲是數學家們隨心所欲地取捨而致。英國著名數學家 M. F. 阿蒂亞曾經鄭重地指出: "經常有人說, 現代數學的特點, 就是建立公理系統的自由, 言外之意, 我們不斷地爲自己發明一些新規則, 搞一些同傳統數學問題無關的遊戲, 我認爲這個觀點是錯誤的"。[24]

1900 年, 希爾伯特在巴黎國際數學家代表大會上講演時曾經提到: "一門科學基礎的穩固是特別具有吸引力的, 對於基礎的檢驗永遠是研究者們至關重要的問題 ··· 爲了成功地研究一門科學的基礎, 就必須對於這門理論有深入的理解。只有對於建築物的基地, 有透徹的和細節上的瞭解的建築師, 才有可能爲建築物奠定堅實的基礎"。一般地說, 對於一個公理系統, 在細節上的深入理解, 多數是在論著發表以後的歲月裡, 例如, 希爾伯特的世界名著《幾何學基礎》一書, 從 1899 年的第一版, 到 1930 年的第七版, 先後作了系列的修正與精煉, 而其中有些細節, 至今仍然有人在探討和研究。[25] 再者, 一個數學分支公理化的完成, 並不意味著是這個分支理論發展的終結, 而是將促使這一數學分支進一步地向縱深方向的發展與開拓!

六、數學公理化方法的作用及其局限性

數學公理化方法是研究數學的重要思維方法, 它對於近代數學和其他自然科學的發展, 起過重要作用和深遠影嚮。關於數學公理化方法的主要作用, 可概括爲如下四點:

1. 從歐幾里得到"布爾巴基", 經歷過二十多個世紀, 數學的主要支柱和分支, 大多數都進行了公理化, 使得整個數學構成一個龐大、嚴謹、優美的理論體系。

2. 根據一定水平的公理化要求而編寫的具有邏輯演繹體系的數學教材, 既符合於教學和認識過程的規律, 又有利於培養學生的邏輯思維能力, 乃是一種行之有效的措施。

3. 數學公理化方法不僅可以整理和提煉已經積累的數學知識, 使之構成嚴謹優美和諧的理論體系, 而且可以擴大數學理論和方法的應用範圍。這是因爲, 如若一個公理系統能夠適用於某種對象的集合, 則它的一切推論也應該適用於該對象的集合。再者, 數學家們如欲檢驗一個數學理論體系是否適用於某種對象的集合, 只需驗證該理論的公理系統能否適用, 這樣可以減少大量的思維勞動。

4. 數學公理化方法對於現代物理學、理論力學以及其他各門自然科學的表述方法都有重要借鑒作用。大衛 · 希爾伯特在第二次國際數學家大會上講演時曾經指出: “波爾茲曼關於力學原理的著作 (Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik, Leipzig, 1897), 提出了數學研究由原子論觀點導出連續介質運動規律的極限過程問題 $\cdots$ 我們還必須試圖通過一種極限過程, 從一組公理出發來推出剛體運動的規律 $\cdots$ 如果用幾何學作爲處理物理公理的模型, 那麼, 我們首先要試圖借助於少量的公理, 來概括盡可能廣泛的一類物理現象, 然後再加進新的公理, 逐步地過渡到更特殊的理論”。近年來, 莫爾卡諾夫曾指出: “在狹義相對論的範圍內, 關於超光速可能性的最終解決, 沒有嚴格的公理化是不可能的”。

從本世紀四十年代開始, 由於電子計算機的飛速發展和廣泛應用, 引起了在數學發展史上由來已久的算法傳統的興起, 致使在純粹數學中得到廣泛應用的公理化方法表現出明顯的局限性。

在數學方法中有宏觀與微觀之別, 公理化方法是一種宏觀數學方法, 它的主要功能在於對已經積累的大量數學知識進行加工、整理、改造和重建工作。而微觀數學方法則包含有命題形式推理、數學計算等, 其中既有以一定的邏輯推理法則爲依據的方法, 也有以某種數學分支所特有的算法技巧爲依據的方法。在通常情況下, 數學工作者在解決一個具體問題時, 往往是先從現存的數學寶庫中去搜尋適宜的微觀數學方法, 而並非首先去求助於某個公理化系統。

注釋

[11] F. S. 梅里特著:《工程中的現代數學方法》, 1981 年, 科學出版社翻譯出版。

[12] 維林金等編著、唐復蘇譯《中學數學現代基礎》北京師範大學出版社出版 p. 37。

[13] H. B. 葉莫夫著裘光明譯《高等幾何學》, 1956 年, 高等教育出版社出版, p.p.210-221。

[14] 書名同 [12], p.39。

[15] 由於畢達哥拉斯學派的一個成員希伯索斯 (Hippasus) 意外地發現: 等腰直角三角形任一腰與其斜邊不可公度, 打破了這個學派所奉行的信條, 從而導致了第一次數學危機。由於大主教 J. 貝克萊 (Berkeley, 1684-1753) 在《分析學家》一書中, 對於微積分的基礎給以強烈指責, 提出萊布尼茲 (Leibniz) 和牛頓 (Newton) 等在微積分中引用了未經釐清、被視爲當然的“無窮

小"概念, 當時在數學界引起了混亂, 從而導致了第二次數學危機。由於英國數學家羅素 (Russell) 在集合論概念的本身發現了悖論, 從而爆發了第三次數學危機。這次危機乃是前兩次危機的繼續與發展, 它所涉及的問題更加廣泛, 因而, 危機感也更加深刻。

[16] 康托 (Cantor) 在 1895 年已經發現自己所創立的超窮集合論中隱含著悖論, 他所發現的這個悖論, 叫做最大序數悖論。但是, 他當時並沒有公諸於世, 這個悖論於 1897 年由布拉里—福蒂 (Burali-Forti) 首次公布。1899 年, 他在寫信給戴德金 (Dedekind) 時 (Ges. Abh., 443-448), 曾提出要區別相容的和不相容的集合。

[17] 集合論的公理爲: (i) 外延公理; (ii) 空集公理; (iii) 單元素公理; (iv) 配對公理; (v) 冪集公理; (vi) 並集公理; (vii) 無窮公理; (viii) 正則公理; (ix) 分離公理; (x) 替換公理; (xi) 選擇公理。公理 (i) – 公理 (x) 爲 ZF 公理系統; 公理 (i) – 公理 (xi) 爲 ZFC 公理系統。

[18] 對於悖論, 現在學術界絕大多數人都是採用弗蘭克爾 (A. A. Fraenkel) 與巴–希萊爾 (Y. Bar-Hillel) 所提出的定義, 這個定義爲: 如果某一理論的公理或推理原則, 看上去是合理的, 但是在這個理論中卻推出了兩個互相矛盾的命題; 或者是證明了這樣一個複合命題, 它表現爲兩個互相矛盾命題的等價形式。那麼, 就說這個理論包含了一個悖論。

[19] 王浩: 《哥德爾的數學客觀主義》《北京大學學報》哲社版 1987 1. p.p.28-34. 1986 年 9 月 20 日王浩先生曾在北京大學作過題爲 《對哥德爾的反思》 的學術報告, 內容與本文雷同。

[20] 這個公理系統, 有時寫成五條, 有時也寫成四條。參見勃羅斯庫列亞柯夫著、吳品三譯《數與多項式》1956年, 高等教育出版社出版, p.p.76-77。

[21] D. 希爾伯特著、江澤涵等譯 《幾何學基礎》, 1958 年, 科學出版社出版, p.42。

[22] M. F. 阿蒂亞:《純數學的發展趨勢》《第三次國際數學教育會議論文集》。

[23] 陳重穆、金民勇:《關於群的定義》《數學進展》, 1958. 4., p.p.127-131。

[24] 書名同 [22]。

[25] Ein einfaches Beispiel für die undb- hangigkeit des Hilbertschen Axioms III_5, Actd. Math. Cad. Sci. Hungar, 10, p.p.395-396, 1959。

—本文作者任教於阜陽師範學院數學系—

更正:《數學中的公理化方法》(上) 注釋有誤。本刊第十七卷第一期第85頁注釋 [10]刪去, 而將該頁的注釋 [11]改爲 [10]。