比貝爾巴赫猜想
(Bieberbach Conjecture)

龔 昇

一. 引言

比貝爾巴赫猜想 (Bieberbach Conjecture, 以下簡稱巴赫猜想) 是古典複分析中的一個著名猜想,1916年由 Bieberbach 提出, 於1984年由美國普渡 (Purdue) 大學的 L. de Branges 所解決, 歷時六十八年, 其間不知經過了多少數學家的辛勤勞動與艱苦努力, 但最後的證明卻是如此簡明, 完全出人意料, 這六十八年來, 有關單葉函數 (Univalent Function) 的文獻浩如煙海, 而這些文獻又以研究巴赫猜想爲中心課題之一,S. D. Bernadi 曾經將有關單葉函數的文獻目錄列出三大卷, 到1981年爲止, 發表的文獻達4282篇, 可謂洋洋大觀矣。在這六十八年中, 在這一領域裡, 不斷有寫得很出色的書籍出版, 作者有: G. M. Golusin; A. C. Schaeffer 與 D. C. Spencer; J. A. Jenkins; W. K. Hayman; E. M. Milin; N. A. Lebedef; A. W. Goodman 以及 G. Schober 等等。但影響最大敍述得全面的書, 當推 P. C. Duren [2]及 Ch. Pommerenke [3]的書, 巴赫猜想解決之時, 在1985年3月11日至15日在普渡大學舉行學術討論會以資慶祝。會後還出版了文集。之後我曾用中文寫過一本從頭講起直到 de Branges 證明的小書, 要進一步瞭解的讀者可參閱拙著 [4]。

二. 巴赫猜想

什麼是巴赫猜想呢? 若R爲複平面$\mathbf{C}$中的一個區域, $f(z)$爲R上解析單值函數, 若對R中任意二個不同的點z_1,z_2, $f(z)$均取不同的值, 即$f(z_1) \neq f(z_2)$若$z_1 \neq z_2$, 則稱$f(z)$在R上是單葉的(Univalent)。本文討論著重在單位圓$D = \{z \in \mathbf{C} \big| |z| < 1\}$中單葉解析函數, 若$f(z)$在$D$中單葉解析, 則$f'(z) \neq 0$在$D$中成立。因之不妨加上規範條件$f(0) = 0, f'(0) = 1$, 這時$f(z)$的 Taylor 展開式成爲

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n + \cdots, \quad |z| < 1. \tag{1}$$

這種函數的全體成爲一正規族, 記作 S, 由 Riemann 映照定理知: 任意邊界多於一點

的單連通區域一定可以共形映照到D, 所以在S中進行討論並不喪失一般性。

在 S 中扮演重要角色的是 Koebe 函數

$$\begin{aligned} K(z) &= \frac{z}{(1-z)^2} \\ &= z+2z^2+3z^2+\cdots+nz^n+\cdots. \end{aligned} \quad (2)$$

它將D映到全平面除去在負實數軸上從$-\frac{1}{4}$到無窮遠點的一條射線, 若 θ 爲任意實數, 則 $e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z) \in S$且將$D$映到全平面除去由$-\frac{1}{4}e^{-i\theta}$到無窮遠點的一條射線。當$\theta$固定時, 這樣的函數稱爲 Koebe 函數的一個旋轉。

1916年,Bieberbach 證明了: 若$f \in S$且有展開式 (1), 則$|a_2| \leq 2$, 等號成立當且僅當f爲 (2) 所定義的 Koebe 函數及其旋轉, 他還提出如下著名的

Bieberbach猜想: 對每個形如 (1) 的函數$f \in S$,$|a_n| \leq n$對$n = 2, 3, \cdots$都成立。等號成立當且僅當 $f(z)$爲 (2) 所定義的 Koebe 函數及其旋轉。

Bieberbach 提出這個猜想後,1923年,K. Löwner 創造了參數表示法, 證明巴赫猜想當$n = 3$時成立, 即$|a_3| \leq 3$。他的主要想法是: 討論S 中的一個稠密子集, 其中函數f將D映爲 $\mathbf{C}$ 除去一條通向無窮遠的 Jordan 曲線, 對這樣的函數可造一函數鏈, 而這函數鏈適合一個偏微分方程以f爲初值, 這個偏微分方程稱爲 Löwner 方程。這是一個十分深刻的方法, 之後也有很長遠的影響, 這個方法上是後來 de Branges 用來證明巴赫猜想的基礎之一, 也是整個幾何函數論中主要方法之一。

證明了$|a_3| \leq 3$之後很長時間沒有進展, 過了卅二年, 到 1955 年,P. R. Garabedian 和 M. Schiffer 應用變分法證明了$|a_4| \leq 4$。這個證明冗長而複雜, 到 1960 年,Z. Charzynski 與 M. Schiffer 用 Grunsky 不等式證明了$|a_4| \leq 4$, 方法出人意料地簡單。

什麼是 Grunsky 不等式呢? 與S族相緊密關聯的函數族是$\sum$, 它是由單位圓外$\triangle = \{z \in \mathbf{C} \big| |z| > 1\}$的亞純單葉函數

$$g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots \quad (3)$$

的全體所組成。若$g(z) \in \sum$, 則

$$\log\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta} = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{nk}z^{-n}\zeta^{-k} \quad (4)$$

在$|z| > 1$,$|\zeta| > 1$中解析。

Grunsky不等式: 對每個正整數N, 及任意N 個複數$\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, 有

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\gamma_{nk}\lambda_n\lambda_k\right| \leq \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}|\lambda_n|^2 \quad (5)$$

這裡γ_{nk}由 (4) 所定義。

1968 年 R. N. Pederson 與 M. Ozawa 繼續沿用 Grunsky 不等式的方法, 分別獨立地證明了$|a_6| \leq 6$。

至於$|a_5| \leq 5$的證明更爲困難, 要用到 Grunsky 不等式的推廣形式 Garabedian-Schiffer 不等式。直到 de Branges 證明巴赫猜想之前, 人們只能證明 $|a_n| \leq n$當$n \leq 6$時成立。

在 de Branges 證明巴赫猜想之前, 人們已知對S中的一些特殊函數類, 巴赫猜想是成立的。

1) 若$f \in S$, 且 (1) 中各個係數a_n全爲實數, 則猜想成立, 這是 1931 年 Rogosinski,Dieudonné,Szasz 各自獨立證明的。

2) 若$f \in S$, 且f將D映爲星像區域, 則猜想成立, 這是 1920 年由 R. Nevanlinna 所證。所謂星像區域是這樣的區域, 由原點出發的任何射線交邊界於點A, 則cA在像中, 這裡$0 \leq c < 1$。

3) 若 $f \in S$, 且 f 將 D 映爲凸像區域, 則 $|a_n| \leq 1$對$n = 2, 3, \cdots$ 都成立, 等號成立當且僅當$f(z) = \frac{z}{1-z}$ 及其旋轉。凸像區域是指: 域內任意二點的聯線必全在域內。這是 1917 年由 K. Löwner 所證。

4)1952 年,W. Kaplan 推廣星像函數的概念爲近似凸的, 如存在一個星像函數g, 使得當$|z| < 1$時,$Re\{z\frac{f'(z)}{g(z)}\} > 0$成立。不難證明, 近似凸函數一定是單葉的。1955 年,M. Reade 證明具有展開式 (1) 的近似凸函數, 巴赫猜想成立。

三. 有關巴赫猜想之一般結果

關於巴赫猜想的一般結果, 第一個重要結果是 J. E. Littlewood 於 1925 年證明的。他證明了: 若$f \in S$且有展開式 (1), 則$|a_n| < en$,$n = 2, 3, \cdots$ 成立。他的證明是基於對函數模平均$M(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|d\theta$,$0 < r < 1$的估計。從此, 對函數模平均進行估計成爲對係數進行估計的一種主要方法, 沿著這條路加以改進的有: 1929 年,E. Landau 證明$|a_n| < (\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi})en \doteq 2.2244n$; 1946 年,G. M. Golusin 證明 $|a_n| < \frac{3}{4}en \doteq 2.0388n$; 1947 年,E. A. Bazilevich 證明 $|a_n| < \frac{9}{4}(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx + 0.2649)n \doteq 1.9240n$; 1951 年,E. A. Bazilevich 與 E. M. Milin 分別獨立地證明了$|a_n| < \frac{1}{2}en + 1.51 \doteq 1.3592n + 1.51$及$|a_n| < \frac{1}{2}en + 1.80 \doteq 1.3592n + 1.80$。函數模平均的最終精確估計是 1974 年由 A. Baenstein 給出, 他的工作很重要。他證明了: 對任一$f \in S$, 則 $M_p(r, f) \leq M_p(r, K)$,$0 < p < \infty$成立, 這裡$M_p(r, f) = \{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r\, e^{i\theta})|^p d\theta\}^{\frac{1}{p}}$,$0 < r < 1$,K 爲 Koebe 函數。由此即得$|a_n| < \frac{e}{2}n$ 的推論。用函數模平均來估計係數也到此爲止。第一個不用函數模平均的方法來改進$\frac{e}{2}$這個常數的是 E. M. Milin, 他於 1965 年應用他創造的方法, 證明了: 若 $f \in S$且有展開式 (1), 則$|a_n| < 1.243n$, $n = 2, 3, \cdots$成立。Milin 方法成爲後來 de Branges 解決巴赫猜想的另一個重要基礎。Milin 的結果保持到 1972 年才爲 C. H. FitzGerald 所改進。他證明了$|a_n| < \sqrt{\frac{7}{6}}n < 1.081n$, $n = 2, 3, \cdots$成立。FitzGerald 的想法是將 Golusin 不等式"指數化"。想法本質上與 Milin 的想法相一致。所謂 Golusin 不等式爲: 若 $F(\zeta) \in \sum$,$\gamma_1, \ldots, \gamma_n$爲任意複數, $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$爲$|\zeta| > 1$中任意n個點, 則

$$\left|\sum_{\mu,\nu}^{n} \gamma_\mu\gamma_\nu \log\frac{F(\zeta_\mu) - F(\zeta_\nu)}{\zeta_\mu - \zeta_\nu}\right| \leq -\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \gamma_\mu\overline{\gamma}_\nu \log(1 - \frac{1}{\zeta_\mu\overline{\zeta}_\nu})。$$

之後,D. Horowitz 在 FitzGerald 工作的基礎上, 進一步精確化, 他先後得到 $|a_n| <$

$(\frac{209}{140})^{\frac{1}{6}}n< 1.0691n$, 對$n = 2,3,\cdots$ 都成立, 及$|a_n| < 1.0657n$, 對$n = 2,3,\cdots$都成立。FitzGerald 早已指出: 應用這個方法是不可能最終解決巴赫猜想的。但這些結果卻是在 de Branges 證明巴赫猜想之前的最好結果。

四. 與巴赫猜想有關之猜想

爲了證明巴赫猜想, 引出了一系列有關的猜想。已給$f \in S$, 令

$$h(z) = \sqrt{f(z^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1}z^{2n-1}. \quad (6)$$

易證這是S中的奇函數。J. E. Littlewood 與 R. E. A. C. Paley 於 1932 年證明 $|c_n| < 14$, 並猜想$|c_n| \leq 1$。如f由 (1) 定義, 則易見

$$a_n = c_1c_{2n-1} + c_3c_{2n-3} + \ldots + c_{2n-1}c_1$$

故由 Schwarz 不等式, 如 Littlewood-Paley 猜想成立, 則巴赫猜想成立。可是 1933 年,M. Fekete 與 G. Szegö 用 Löwner 方法證明了如下精確的結果: $|c_5| \leq \frac{1}{2} + e^{-\frac{2}{3}} = 1.013\cdots$, 故 Littlewood-Paley 猜想不成立。不但如此,A. C. Schaeffer 與 D. C. Spencer 於 1943 年證明: 當$n \geq 5$時, 存在實係數的單葉奇函數, 使得$|c_n| > 1$。1976 年,G. B. Leeman 證明: 實係數的單葉奇函數, 如有展開式 (6), 則$|c_7|$的精確上界爲 $\frac{1090}{1083}$。所以即使期望一個整齊的有理數估計也不可能, 對 $|c_n|$的一般估計, 陳建功於 1933 年證明: $|c_n| < e^2$, 後迭經改進, 直到 1967 年 Milin 用他的方法證明$|c_n| < 1.17$。Littlewood-Paley 猜想儘管不正確, 但 1936 年,M. S. Robertson 作了如下的猜想。

Robertson 猜想: 對每個S中的奇函數 (6), 則

$$1 + |c_3|^2 + \cdots + |c_{2n-1}|^2 \leq n, n = 2,3,\cdots$$

成立。

顯然 Robertson 猜想導出巴赫猜想。Robertson 猜想當$n = 2$時即爲$|a_2| \leq 2$。Robertson 於 1936 年用 Löwner 方法證明了$n = 3$時猜想成立。S. Friedland 用 Grunsky 不等式於 1970 年證明$n = 4$時猜想成立。當$n \geq 5$時, 一直未能證明猜想成立與否。直至 1984 年,de Branges 證明了 Milin 猜想 (下面要介紹) 從而證明了 Robertson 猜想, 從而證明了巴赫猜想。

1955 年,W. K. Hayman 證明如下重要結果: 對每個固定的$f \in S$, 若有展開式 (1), 則$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{n} = \alpha \leq 1$, 等號成立當且僅當$f$爲 Koebe 函數及其旋轉,$\alpha$稱爲 Hayman 指標。此外他還證明: 若$f \in S$, 且有 Hayman 指標$\alpha$, 則存在唯一的一個方向$e^{i\theta}$, 使得$\lim\limits_{r\to 1}(1-r)^2|f(re^{i\theta})| = \alpha$,$e^{i\theta}$稱爲$f$的 Hayman 方向。由此即得: 對固定的一個函數$f \in S$, 存在一個充分大的常數$N(f)$, 當 $n > N(f)$時,$|a_n| \leq n$成立。但這個常數N是完全依賴於f的, 故不能導出巴赫猜想當n充分大時成立的結論, 於是有如下的

近似Bieberbach猜想: 若 $f \in S$, 且有展開式 (1), 令$A_n = \max\limits_{f\in S}|a_n|$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_n}{n} = 1$成立。

另外, 由$|a_2| \leq 2$容易導出: f的像包有以原點爲中心,$\frac{1}{4}$爲半徑的圓。1925 年,Littlewood 作如下的猜想

Littlewood猜想: 若 $f \in S$ 且有展開式 (1), 如 f 不取值 ω, 則 $|a_n| \leq 4|\omega|n$, $n = 2, 3, \cdots$成立。

由於$|\omega| \geq \frac{1}{4}$, 故由巴赫猜想即導出 Littlewood 猜想。不但如此,Z. Nehari 證明近似 Bieberbach 猜想也可導出 Littlewood 猜想。反之,D. H. Hamilton 證明 Littlewood 猜想導出近似 Bieberbach 猜想, 故這二個猜想是等價的。

Milin 方法的基本想法是: Grunsky 不等式 (5) 得到的是單葉函數的對數的係數的信息, 爲了得到函數本身的信息, 應該將它“指數化”,FitzGerald 也有類似的想法。

Lebedef 與 Milin 建立了如下三個不等式, 它指出了函數的展開式的係數與函數取了指數後的展開式的係數之間的關係。在這三個式子中, 並不要求函數是單葉的。

若$\varphi(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k$ 爲具有正收斂半徑的任意冪級數, 且 $\varphi(0) = 0$, 令$e^{\varphi(z)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k$, $\beta_0 = 1$, 則有如下的不等式

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k|^2 \leq \exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty} k|\alpha_k|^2\right\};$$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} |\beta_k|^2 \leq \exp\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k})\right\};$$

$$|\beta_n|^2 \leq \exp\left\{\sum_{k=1}^{n}(k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k})\right\}。$$

若$f \in S$, 且

$$\log\frac{f(z)}{z} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n z^n, \quad |z| < 1 \quad (7)$$

顯然, 若f爲 Koebe 函數, 則$\gamma = \frac{1}{n}$。1967 年, Bazilevich 證明了如下的不等式: 若$f \in S$, γ_n由 (7) 所定義, α 爲f的 Hayman 指標, $e^{i\theta}$爲f的 Hayman 方向, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|\gamma_n - \frac{1}{n}e^{-in\theta}|^2 \leq \frac{1}{2}\log\frac{1}{\alpha}$成立。這不等式表明: 當$\alpha$愈接近於1,$f$愈“接近”於 Koebe 函數, 但一般來說,$|\gamma_n| \leq \frac{1}{n}$是不成立的。而 Milin 將 Grunsky 不等式 (5)“指數化”, 證明了: $\sum\limits_{k=1}^{n} k|\gamma_k|^2 \leq \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \delta$ 對 $n = 2, 3, \cdots$ 都成立, 這裡 $\delta < 0.312$。由於 Littlewood-Paley 猜想不成立, 可證δ不可能爲零。但 Milin 作如下的重要猜想。

Milin猜想: 對每個 $f \in S$, γ_n 由 (7) 所定義, 則有 $\sum\limits_{m=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{m}(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k}) \leq 0$, $n = 1, 2, \cdots$ 成立, 即在平均意義下,δ 可以是零。

由 Lebedef-Milin 不等式, 易證

$$\sum_{k=0}^{n}|c_{2k+1}|^2 \leq (n+1)\exp\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k})\right\}。$$

因之, 如 Milin 猜想成立, 即得$\sum\limits_{k=0}^{n}|c_{2k+1}|^2 \leq n+1$成立, 即 Robertson 猜想成立, 從而導出巴赫猜想成立。Milin 猜想指出了解決巴赫猜想的正確途徑,1984 年 de Branges 證明的正是 Milin 猜想成立。

除了上述之猜想外, 還順便將其他有關猜想在此敍述之。

若$g(z) = b_1z + b_2z^2 + \cdots$在$|z| < 1$中解析,$f \in S$。如$g$的值域都包在 f的值域之內, 則稱g從屬於 (Subordinate)f, 記作$g \prec f$。Rogosinski 證明了: $\sum_{n=1}^{N}|b_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{N}|a_n|^2$, $N = 1, 2, \cdots$成立; 而當 $p \neq 2$時,$\sum_{n=1}^{N}|b_n|^p \leq \sum_{n=1}^{N}|a_n|^p$ 一般不成立。從$g \prec f$不能導出$|b_n| \leq |a_n|$。簡單的例子爲$z^2 \prec z$, 但 Rogosinski 作如下的猜想。

Rogosinski猜想: 若$g \prec f \in S$, 則$|b_n| \leq n$,$n = 1, 2, \cdots$成立。

由於$f \prec f$當然成立, 故 Rogosinski 猜想導出巴赫猜想。Rogosinski 猜想當$n = 1$時可由 Schwarz 引理導出,$n = 2$時爲 Littlewood 所證明。Rogosinski 證明: 當f爲星像函數, 或係數全爲實數時, 猜想成立。Robertson 證明: 當f 爲近似凸時, 猜想成立。Robertson 猜想可以導出 Rogosinski 猜想, 在這二個猜想之間, 還有 Sheil-Small 猜想。

若$f(z) = \sum a_nz^n$,$g(z) = \sum b_nz^n$爲二個級數, 稱$h(z) = \sum a_nb_nz^n$ 爲f與g的卷積, 或 Hadamard 乘積, 記作$h = f * g$。

Sheil-Small猜想: 對每個$f \in S$及每個 n階的多項式p, 則有$\|p * f\|_\infty \leq n\|p\|_\infty$, 這裡$\| \ \|_\infty$表示函數在$|z| \leq 1$中的最大模。如取 $p(z) = z^n$, 則 Sheil-Small 猜想即爲巴赫猜想。可證這個猜想是介於 Robertson 猜想與 Rogosinski 猜想之間。

歸納起來, 這七個猜想有如下的關係。

Milin 猜想 $\Longrightarrow$ Robertson 猜想 $\Longrightarrow$ Sheil-Small 猜想 $\Longrightarrow$ Rogosinski 猜想 $\Longrightarrow$ Bieberbach 猜想 $\Longrightarrow$ 近似 Bieberbach 猜想 $\Longleftrightarrow$ Littlewood 猜想。

de Branges 證明了 Milin 猜想, 所以以上七個猜想全部成立, 在他證明 Milin 猜想之前, 這七個猜想都只有部份結果, 都是未解決的問題,de Branges 證明 Milin 猜想所用的方法是 Löwner 方法及 Milin 方法, 並巧妙地用到了 Askey-Gasper 定理, 這是一條關於 Jacobi 多項式的正定性的定理。詳細的證明可參閱 de Branges 的論文 [1] 或拙著 [4]。de Branges 證明 Milin 猜想已八年了, 除了一些簡化外, 並未見到第二個不同的證明。

參考文獻

1. L. de Branges, A proof of the Bieberbach conjecture, Acta Math. 154 (1985) 137-152.
2. P. L. Duren, Univalent Functions, Springer-Verlag, 1983.
3. Ch. Pommerenke, Univelent functions, Vander beck and Ruprecht; Göttingen, 1975.
4. 龔 昇, 比貝爾巴赫猜想, 科學出版社, 1989.

—本文作者是中國科技大學教授, 曾任副校長, 目前任教於美國 NEVADA 大學數學系—