談 Heron 公式 — 記一段教學經驗

蔡聰明

一、問題是數學發展的靈魂、思考的起點

問題:一個農夫有一塊三角形的田地, 測量三邊的長, 結果是 13,14,15公尺, 問面積是多少?

許多同學回想起, 似乎有一個 Heron 公式可以派上用場, 但是卻忘記了它的精確表達式。這眞是不幸中的大幸, 怎麼說呢? 如果唸數學只求背記公式, 然後套公式, 那根本得不到數學的樂趣, 是在遭蹋數學。公式是尋求出來的, 不求甚解的背記, 只會阻礙思想的靈動, 因此最好忘掉公式。這正好提供給我們追尋"如何想出、猜出一個公式"的契機。

與其求解上述問題, 毋寧就來追尋一般三角形的面積公式。常言道"挖一筍不如挖整族的筍", 因爲兩件工作的費力程度差不多。尤其是, 數學家的志向都放在追尋"萬人敵"上面, 既找尋能夠解決一類含有無窮多個問題的處方, 而不屑於"一人敵"(參見: 史記項羽的故事)。引用數學家鍾開萊的話來說就是:"數學家較傾向於建立消防隊而少於去滅火"(Mathematicians are more inclined to build fire station than to put out fires.) 因此我們也懷著雄心壯志提出

一般問題:已知三角形三邊爲 a,b,c, 如何求其面積?

在科學的求知活動過程中, 提出一般問題, 乃至一連串相關的問題扮演著關鍵性的角色。正如 B. Russell 所說:"哲學開始於有人提出一般性的問題, 科學亦然" (Philosophy begins when someone asks a general question,so does science。參見:Wisdom of the west 一書)。不過要注意到問好的問題是一門藝術。問得太淺則無趣, 太深做不出來, 也構成挫折。歷史上,Socrates 最會提問題, 而有所謂的 Socrates 教學法。

有了明確的問題, 數學的求知活動通常可分成兩個階段:

(i) 發現的階段 (the context of discovery), 既尋求解答, 猜測出公式;

(ii) 驗證的階段 (the context of justification), 既檢定所猜測之公式, 否證它或證明它。

前者是創造性思考的主力戰場, 後者是戰場的邏輯清理。

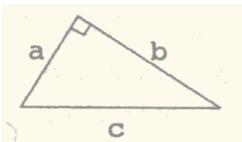
二、如何想出, 猜出公式?

我們由特殊的 13,14,15 三角形, 飛躍到任意 a,b,c 三角形, 通常學生的反應是“不知從何下手”。事實上,“如何想出公式 (心理上的理由)”是最困難的, 也是最有趣的。近代科學哲學 (philosophy of science) 常爭論的一個問題是: 有沒有“the logic of discovery”這件事? 即科學發現有沒有道理可循? 分成正、反兩陣營, 各執一詞。最有趣的是,K. Popper 站在反方, 但是他的經典名著卻是 “The logic of scientific discovery”。

按思考的常理,“登高必自卑, 行遠必自邇”, 那麼我們就由特例切入, 再逐步尋幽探徑吧 。

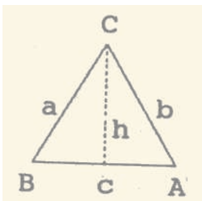
令 $A = A(a,b,c)$ 表示三邊爲 a,b,c 的三角形之面積, 這是一個三變數的函數。我們的目標就是追尋出$A(a,b,c)$的精確表式。我們先考慮下面兩種特例:

例1. 直角三角形



$A(a,b,c) = \frac{1}{2}ab$

注意到,c 不必用到, 透過畢氏定理它由 a,b 決定。



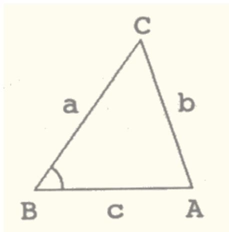
例2. 等邊三角形$a = b = c$

因爲 $h = a\sin 60^\circ$
$= \frac{\sqrt{3}}{2}a$

所以 $A(a,b,c) = \frac{1}{2}c \cdot h$
$= \frac{\sqrt{3}}{4}a \cdot c = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$。

再來似乎就不易開展, 不過有這兩個例子當底子, 膽子壯了許多。我們進一步分析例 2, 事實上我們用到了三角形的面積公式$\frac{1}{2}$(底×高) 以及高$h = a\sin B$。這些對於任意三角形也都成立!因此對於任意三角形, 若知道兩邊及其夾角, 就知道面積了。

例3. 已知兩邊及其夾角 $(s.a.s.)$ 的三角形面積公式



$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}ac\sin B \\ &= \frac{1}{2}ab\sin C \\ &= \frac{1}{2}bc\sin A。\end{aligned}$$

這雖不是我們所要的公式, 但是卻提供給我們作一般思索的啓示。三角形有三個邊, 三個角 ,一共六個要素, 它們並非完全獨立, 例如三內角和爲一平角, 這是角的守恆定律。另外 , 正弦定律

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

其中 $2R$ 是三角形外接圓之直徑以及餘弦定律

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos B \end{aligned}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

是更細緻的邊角關係, 將三角形的六個要素化約成獨立的三個。因此只要知道適當的某三個要素, 就唯一決定了三角形, 例如 $s.a.s.$,$a.s.a.$,$a.a.s.$,$s.s.s.$, 這就是所謂的三角形的穩固性, 四邊形以上則無此相應的性質。順理成章地, 利用適當三個要素就可以表達出三角形的面積, 上述例3就是一個典型代表 (s.a.s.)。此地我們要找的是相應於 (s.s.s.) 的三角形面積公式。

如何找尋 $A(a,b,c)$?

在數學中, 常見的有描述性的 (descriptive) 與建構性的 (constructive) 兩種對偶的 (dual) 辦法。例如, 代數方法就是一種描述性的辦法, 把要找的東西, 設定爲未知數x, 然後分析x 具有什麼性質 (即線索), 根據這些線索, 列出方程式 (編網) 捕住x, 再解方程式 (解開網子) 得x。比較起來, 算術之求得答案是建構性的辦法 (往往比較難), 根據線索直接就把答案算出來。事實上 , 兩法應該相輔爲用才對。

在日常生活中, 對一件事情描述得夠細膩, 就完全清楚掌握住該事情, 數學亦然。

問:$A(a,b,c)$ 具有什麼特徵性質呢?

甲. 對稱性的觀察

三角形三邊a,b,c 任意交換, 它的面積不變。亦即

$$A(a,b,c)=A(b,c,a)=A(c,a,b)=\cdots\text{等等}$$

我們要強調, 對稱性的觀察與思考一直都是數學思考的核心。有了這一條線索, 我們就可以提出各種猜測(conjectures)。

問:a,b,c 之對稱式有那些?

我們馬上可以列出許多:

一次對稱式 $a+b+c$

二次對稱式 $a^2+b^2+c^2$,$ab+bc+ca$, $(a+b+c)^2$

三次對稱式 $a^3+b^3+c^3$,$(a+b+c)(ab+bc+ca)$,abc $\cdots$等等。

問:$A(a,b,c)$會是這些當中的哪一個?

有了猜測就必須加以檢驗 (test)。我們也要強調, 有主意 (idea), 即使是餿主意, 也比沒有主意好。下面我們只檢驗一個情形: 令$A(a,b,c)=K(a^2+b^2+c^2)$,K 待定

今已知$A(1,1,1)=\frac{\sqrt{3}}{4}$, 故$K=\frac{\sqrt{3}}{12}$,

所以 $A(a,b,c)=\frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+c^2)$。

這是否就是我們所要的公式呢? 它具有對稱性, 並且適合$1,1,1$ 之三角形。但是很容易驗知, 它並不適合$3,4,5$ 之三角形。仿此, 其它情形也都不成。

事實上, 我們可以採用第二條線索來幫助我們找尋與簡化驗證的工作, 那就是物理學上的量綱分析 (dimensional analysis, 千萬不可翻譯成“維的分析”, 線性代數中的 dimension 才是維。)

乙. 量綱的觀察

面積的量綱是長度的平方 (L^2), 因此我們不會去試一次及三次以上的對稱式, 只能從二次對稱式中選出。比較經驗老到的人也許會嘗試

$$A(a,b,c)=K\sqrt{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)}$$

這個式子符合對稱性且量綱爲L^2, 不過試的結果還是不成。

也許我們沒有試盡所有a, b, c 之二次對稱式 (量綱爲L^2)。如果二次對稱式有無窮多種 ,以有涯的人生, 怎麼試得完呢? 顯然我們需要再找另一線索: 極端特例的觀察!

丙. 邊界條件的觀察

若$a+b=c$ 或$b+c=a$ 或$c+a=b$, 那麼三角形的面積爲0。由因式定理知,$A(a,b,c)$ 必有$a+b-c$,$b+c-a$,$c+a-b$ 之因子。這實在是一條美麗的線索。個別的因子不對稱, 三者乘起來就對稱了。因此$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$ 是一個較深刻的三次對稱式。

那麼$A(a,b,c)=K(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$? 由量綱考慮立知不成。雖不成, 但我們確知已抓到了一些眞實的要素。爲了將量綱調成L^2 , 我們試

$$A(a,b,c)=K[(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)]^{(2/3)}$$

首先, 這個公式“不漂亮”(ugly), 並且試的結果也不成。

欲將量綱爲L^3 的$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$ 修飾成L^2 有各種辦法。除了上式的辦法之外, 也許乘以一個長度L 變成L^4, 再開平方是個好主意。所乘的這個長度當然是要爲a, b, c 之對稱式, 最自然而簡單的選擇就是$a+b+c$。因此我們提出大膽猜測 (bold conjecture):

$$\begin{aligned}&A(a,b,c)\\=\ &K\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a+b)}\end{aligned}$$

其中K爲待定常數, 此式符合對稱性, 邊界條件, 並且量綱爲L^2。我們先用特例決定出K: 考慮$3, 4, 5$ 之直角三角形, 得

$$6=K\sqrt{12\times 2\times 4\times 6}$$

所以　　$K=1/4$

因此

$$\begin{aligned}&A(a,b,c)\\=\ &\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}\end{aligned}\tag{1}$$

這就是我們所要的公式嗎? 到目前爲止, 我們只能說: 可能是也可能不是。

我們進一步來試驗(1) 式, 此時有兩樣心情, 怕(1)式被否證掉, 也怕驗證不完 (三角形有無窮多種)。

對於等邊三角形的情形, 已知其面積爲$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, 由 (1) 式與$a=b=c$亦得

$$\frac{1}{4}\sqrt{3a\times a\times a\times a}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2,$$

故(1) 式確爲等邊三角形的面積公式。

其次檢驗直角三角形的情形:$c^2=a^2+b^2$。已知其面積爲$\frac{1}{2}ab$, 另一方面由公式 (1) 得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}\\=\ &\frac{1}{4}\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)][c+(b-a)][c-(b-a)]}\\=\ &\frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2-c^2][c^2-(b-a)^2]}\\=\ &\frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2+2ab-c^2)(c^2-b^2+2ab-a^2)}\\=\ &\frac{1}{4}\sqrt{2ab\times 2ab}\quad (因爲c^2=a^2+b^2)\\=\ &\frac{1}{2}ab。\end{aligned}$$

因此 (1) 式確爲直角三角形的面積公式。

至此我們有更強的理由相信 (1) 式可能就眞的是三角形的面積公式。不過在未證明之前, 我們不敢確定。此時我們倒是很想找到一個能夠否證 (falsify) 掉我們的猜測的怪例。不過 ,試了很多例子, 一直沒有成功。那麼我們就嘗試去證明 (1) 式吧。

這裡我們走到了, 數學與其它學問之間最重要的一個分岐點: 數學需要有證明 (否則頂多只是美麗的空思夢想), 其它學問則沒有證明。這是數學迷人的理由之一, 請看 B. Russell 的說法:“在數學中最令我欣喜的是事情能夠被證明”(What delighted me most about mathematics was that things could be proved.)

三、證明所猜測的公式

經過上述的分析與思考、試誤 (trial and error), 得到一個很可能成立的猜測公式, 現在要來證明就變得容易多了。

首先我們將(1)式整理得漂亮一點, 不要忘了數學是講究美感的。

令$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$, 則$\frac{1}{2}(a+b-c)=s-c$, $\frac{1}{2}(b+c-a)=s-a, \frac{1}{2}(c+a-b)=s-b$

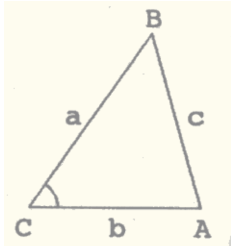
從而 (1) 式變成

$$A(a,b,c)=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{2}$$

這樣清爽多了。

如何證明 (2) 式呢?

由$s.a.s.$的三角形面積公式



$$A=\frac{1}{2}ab\sin C$$

兩邊平方

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{4}a^2b^2\sin^2 C \\ &= \frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos^2 C) \end{aligned}$$

由餘弦定律$\cos C=\frac{a^2+b^2+c^2}{2ab}$, 代入上式得

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{4}a^2b^2\frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2} \\ &= \frac{1}{16}[(2ab+a^2+b^2-c^2) \\ &\quad (2ab-a^2-b^2+c^2)] \\ &= \frac{1}{16}[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2] \\ &= \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b) \\ &\quad (c+b-a) \\ &= s(s-a)(s-b)(s-c) \\ \text{所以}A &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \end{aligned}$$

Eureka! Eureka!

當然還可以有其它各種證法。 當初 Heron 是採用純幾何的證法, 作了好幾條補助線, 論證堪稱精巧美妙。在此我們不預備介紹, 請讀者參考數學史的文獻。另外, 根據數學史, 比 Heron 更早的阿基米得 (Archimedes) 已得到這個公式。

現在我們可以充滿著喜悅地寫出我們所重新發現的眞理:

定理(Heron 公式)

已知三角形的三邊長為a, b, c, 則其面積為

$$A(a,b,c)=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

其中$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$表示三邊長之和的一半。

我們做一下綜合整理。令

$$\begin{aligned} D \;=\; & \{(a,b,c)|a,b,c\geq 0,\\ & a+b\geq c,\ b+c\geq a,\ c+a\geq b\} \end{aligned}$$

那麼三角形的面積就是定義在D 上的一個實值函數

$$A:(a,b,c)\in D\longrightarrow A(a,b,c)\in \mathbf{R}$$

顯然A 滿下列性質:

(i) 正性:$A(a,b,c)\geq 0$ 。

(ii) 對稱性:$A(a,b,c)=A(b,c,a)=A(c,a,b)=\cdots$ 等等。

(iii) 量綱條件:$A(a,b,c)$ 的量綱為L^2 (既長度的平方) 。

(iv) 邊界條件:$a+b=c$ 或 $b+c=a$ 或時 $c+a=b, A(a,b,c)=0$; 並且 $A(1,1,1)=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $A(3,4,5)=6$ 。

(v) 尺度伸縮:$A(ta,tb,tc)=t^2A(a,b,c)$, 其中$t\geq 0$ 。

我們利用這些性質的幫忙來猜測出公式

$$A(a,b,c)=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

這有我們的創造力加上苦功的成份, 因為我們並不是由 (i)-(v) 的性質邏輯地推導出上式。科學哲學家中主張沒有“the logic of discovery”這一派最主要的論點是: 一般而言 , 科學的發現或發明都不是用邏輯推導出來的, 而是必須對一些經驗與線索產生共鳴的了解, 加上創造想像力的要素才得到的; 但是創造想像力是沒有機械規則可循的。牛頓發現的萬有引力定律, 絕不是從 Kepler 三定律邏輯地推導出來的。話說回來, 數學中到處都有發現的契機, 只要善加開發就可得到發現的喜悅。

四、推論與推廣

回到本文最初的問題, 三邊是13,14,15公尺的三角形之面積為

$$A(13,14,15)=\sqrt{21\times 6\times 7\times 8}=84\,m^2。$$

其次我們舉出兩個比較有趣的推論。第一是, 利用 Heron 公式, 可以推導出畢氏定理: 設直角三角形a, b, c 中c 為斜邊, 由

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{1}{2}ab$$

兩邊平方, 再代入$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$, 化簡就可得到$c^2=a^2+b^2$ 。

第二是, 利用 Heron 公式可以證明在週界一定的三角形中以等邊三角形的面積為最大。(習題)

另外, 將 Heron 公式類推、推廣到四邊形的情形也很有趣, 可以仿照上述的討論方

式, 曲徑通幽, 走到一個美麗的天地。這是一個很好的思考論題, 讀者何不自己試一試。

五、檢討與後記

數學中的公式、定理絕不是從天而降, 然後就要我們去證明, 去套用。由上述三角形面積公式之追尋過程來看, 起先是在一個有趣問題引導下, 我們來到了所有三角形的茫茫大海, 我們相信有個美麗的公式浮在其上 (相當於我們相信大自然有秩序、規律可尋), 於是開始了追尋與發現的思想探險之旅, 這包括了提出更多的問題 (叩問自然)、分析、類推、歸納、試誤、想像$\cdots$ 等辛苦的工作。面積公式絕不會孤立在那裡, 它必定會透露出一些線索, 如對稱性、量綱、邊界條件等等。這些線索往往就足夠我們做尋幽探徑的工作 (古希臘人相信大自然不顯露也不故意隱藏, 但她會透露出一些線索、端倪。) 教師應提示各種線索, 讓學生自己飛躍到猜測, 親嘗發現的喜悅。我認爲這是教育最有意義、最有價值的所在。若去掉這部分, 教育就變成醬化人的工具。在辛苦工作之後, 得到猜測, 要證明或否證, 差不多就是順理成章的事。能夠通過證明的才變成公式或定理。有這整個過程的數學學習 ,才算完整, 才會有趣。

準此以觀, 背記與套用公式並不是數學, 即使再加上會邏輯證明也只是學到數學的皮毛。在這樣的層次, 只得到數學的苦, 根本嚐不到數學的樂。唸數學得不到樂趣, 當然不想唸它, 這是合理而且可以理解的。青少年放棄數學, 其實也被數學遺棄, 這是很可惜而遺憾的事。

唸數學一定要提昇到“發現的層次”, 眞正的思想火花、趣味、美妙都在這裡發生。只要嚐過一次發現的喜悅, 必定會欲罷不能的, 這是人生最寶貴的經驗。教師有重責大任幫忙學生獲取這個經驗。

後記:感謝楊維哲教授提供寶貴意見, 並且給了如下精緻的跋:

在數理科學中, 時常有“刻劃”問題。例如, 對於一個高三同學來說, 把行列式刻劃成: N個N維向量的函數, 謂之定準, 它具有(個別的, 多重的) 線性, 交錯性(或自殺性), 以及一個規範性。這種刻劃對於較優秀的學生來說是有趣的, 有啓發性的。

不過 Heron 公式似乎不能歸類爲刻劃。面積函數 $\mathrm{Area}(a,b,c)$ 並非一個多項式函數; 雖則它是個足夠簡單的代數的無理函數。如果改而考慮其平方, 那麼 Area^2是個齊4次多項式函數。

三角形的性質中, 最重要的是“兩邊和大於第三邊”。因之,$b+c-a>0$。事實上, $b+c-a=0$ 可以認爲一種極限情形, 此時三角形“退化”了, 因而 $\mathrm{Area}^2=0$, 故一個合理 (?) 的猜測是 Area^2 含有$(b+c-a)$ 的因式, 於是也含有$(c+a-b)(a+b-c)$。如此, 尙有一次因式, 那就“只好是”$(a+b+c)$ 了, 故

$$A^2=(a+b+c)(b+c-s)(c+a-b)(a+b-c)\cdot\text{常數}$$

也許這是値得和學生們提一下的 — 並不是只有證明(proof) 才是數學, 像樣的猜測推理 (plausible reasoning) 也是數學。

—本文作者任教於台灣大學數學系—