加拿大數學競試

1992年試題解答(*)

王子俠

1.解一: 顯然$1\times 2\times\cdots\times n=n!$可被 $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$整除若且唯若$2(n-1)!$可被$n+1$整除。若$n+1=p$爲一奇質數, 則顯然$2(n-1)!$非$p$之倍數。

現假定$n+1$非一奇質數。若$n=1$, 則顯然$1!$可被1整除。若$n\geq 1$, 則$n+1$必爲合成數。令$n+1=ab$, 此處 $2\leq a\leq b\leq n$。但$b\neq n$, 否則$n+1=ab\geq 2b=2n$, 此爲矛盾。故$b\leq n-1$, 從而a與b均在$1,2,\cdots,n-1$中出現。故若$a<b$, 則$2(n-1)!$可被ab整除。今假定$a=b$, 即$n+1=a^2$。若$a=2$, 則$n=3$ 而顯然$2(3-1)!$可被4整除。若$a\geq 3$, 則由$a^2-2a=a(a-2)\geq 3$得$2a\leq a^2-3=n-2<n-1$。即a與$2a$均在$1,2,\cdots,n-1$中出現, 故$2(n-1)!$可被a^2整除。

解二:首先假定$n+1$爲偶數, 故$n+1=2k$。若$n=1$, 則顯然$2(n-1)!$可被$n+1$ 整除。若$n>1$, 則$k\geq 2$從而$k=(n+1)-k\leq n-1$。故$2(n-1)!$可被$2k$整除。

其次假定$n+1$爲一奇合成數, 則顯然$n\geq 8$。令$n+1=qr$, 此處$3\leq q\leq r\leq \frac{1}{3}(n+1)$。由 $n\geq 8$可容易得出$3\leq q<2r<n-1$。即q與$2r$均在$3,4,\cdots,n-2$中出現, 故$2(n-1)!$可被qr整除。其餘同解一。

2.解一:

$$
\begin{aligned}
& x(x-z)^2+y(y-z)^2-(x-z)(y-z)(x+y-z)\\
=\ & x(x-z)(x-y+y-z)+y(y-x+x-z)\\
& \quad -(x-z)(y-z)(x+y)+z(x-z)(y-z)\\
=\ & x(x-z)(x-y)+y(y-z)(y-x)\\
& \quad +z(z-x)(z-y)。 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

由於 (1) 式對x,y,z完全對稱, 故不失一般性可假定$x\geq z\geq y$。於是欲證之不等式右邊爲非正, 而左邊爲非負, 故不等式得證。若等號成立, 則

$$
\begin{aligned}
& x(x-z)=y(y-z)\\
=\ & (x-z)(y-z)(x+y-z)=0。
\end{aligned}
$$

故 $x-z=0$ 或 $y-z=0$。若 $x-z=0$, 則由 $y(y-z)=0$ 得 $y=0$ 或 $y=z$;

---

*試題請參閱數學傳播第十六卷第四期。

若 $y-z=0$, 則由 $x(x-z)=0$得$x=0$或$x=z$。由$x\geq z\geq y$ 之假定便得$x=y=z$ 或 $x=z$,$y=0$; 再由對稱性得出 $y=z$,$x=0$ 及 $x=y$,$z=0$另兩個解。由 (1) 式可立刻看出在這四種情形下, 等號成立。

解二:直接展開化解得

$$\begin{aligned}
&x(x-z)^2+y(y-z)^2-(x-z)(y-z)(x+y-z)\\
=\ &x^3-2x^2z+xz^2+y^3-2y^2z+yz^2-x^2y+x^2z\\
&+xyz-xz^2-xy^2+xyz+y^2z-yz^2+xyz\\
&-xz^2-yz^2+z^3\\
=\ &x^3+y^3+z^3+3xyz-x^2y-xy^2-y^2z-yz^2\\
&-z^2x-zx^2。\qquad (2)
\end{aligned}$$

由於 (2) 式爲x,y,z之完全對稱式, 故可仿解一假定$x\geq z\geq y$。而不等式得證。等號情形亦可同樣決定。

解三:由於所給不等式之左邊恆爲非負, 故當$z\geq x+y$或當z介於x 與y之間 (從而$z\leq x+y$) 時, 不等式顯然成立。於是僅需考慮 $x+y-z\geq 0$且$(x-z)(y-z)\geq 0$的情形。

利用恆等式$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$及不等式$a^2+b^2\geq 2ab$(對任意實數$a$, b)得

$$\begin{aligned}
&x(x-z)^2+y(y-z)^2\\
=\ &(x-z+z)(x-z)^2+(y-z+z)(y-z)^2\\
=\ &(x-z)^3+(y-z)^3+z[(x-z)^2+(y-z)^2)]\\
=\ &(x+y-2z)[(x-z)^2+(y-z)^2-(x-z)(y-z)]\\
&+z[(x-z)^2+(y-z)^2]\\
=\ &(x+y-z)[(x-z)^2+(y-z)^2-(x-z)(y-z)]\\
&+z(x-z)(y-z)\\
\geq\ &(x+y-z)(x-z)(y-z)+z(x-z)(y-z)\\
\geq\ &(x+y-z)(x-z)(y-z)。
\end{aligned}$$

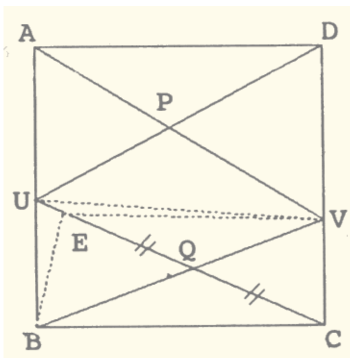
若等號成立, 則$x-z=y-z$ 且$z(x-z)(y-z)=0$故$z=0$,$x=y$或 $x=y=z$。再由對稱性可得出另外三種等號成立的情形。

3.解一:以$[\bullet]$表面積。不失一般性, 不妨假定$BU\geq CV$。

由於$\triangle BQU$與$\triangle VQC$相似, 故$UQ\geq QC$, 而等號成立若且唯若$BU=CV$。同時, 由B點至直線UC之距離大於或等於由V點至UC之距離, 而等號成立若且唯若$BU=CV$。在UQ上選一點E使得$QE=QC$。於是$[BEU]\geq[VEU]$,$[BEQ]=[BQC]$, 而 $[VEQ]=[VQC]$。從而

$$\begin{aligned}
[BQU]+[VQC]\ &=\ [BEU]+[BEQ]+[VQC]\\
&\geq\ [VEU]+[BQC]+[VEQ]\\
&=\ [UQV]+[BQC]。
\end{aligned}$$

但$[UQV]=[BQC]$, 故得$4[UQV]\leq[UVCB]$。即$[UQV]\leq\frac{1}{4}[UVCB]$。同理,$[UPV]\leq\frac{1}{4}[UVDA]$。於是$[PUQV]\leq\frac{1}{4}[ABCD]$。等號成立若且唯若$BU=CV$, 而此時$PUQV$之面積爲極大。



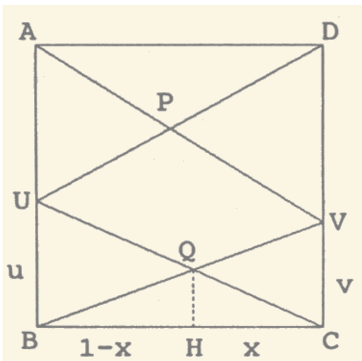
解二:假定正方形之邊長爲1。以u及v分別表BU及CV之長度, 則由Q點至BC之距離爲$\frac{uv}{u+v}$。(譯註: 以H表由Q至 BC之垂線之垂足。

令$x = CH$,$d = QH$, 則由相似三角形CUB及CQH得

$$\frac{x}{d} = \frac{1}{u}。$$

同理由相似三角形BVC及BQH得

$$\frac{1-x}{d} = \frac{1}{v}。$$



故

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{d},$$

從而

$$d = \frac{uv}{u+v}。$$

) 同理, 由P至AD之距離爲

$$\frac{(1-u)(1-v)}{2-(u+v)}。$$

令$u+v = s$,$uv = p$, 則

$$\begin{aligned}
[PUQV] &= [PUV] + [QUV] \\
&= [APD] + [BQC] \\
&= \frac{1}{2}(\frac{uv}{u+v} + \frac{(1-u)(1-v)}{2-(u+v)}) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{p}{s} + \frac{1-s+p}{2-s}) \\
&= \frac{2p+s-s^2}{2s(2-s)}。
\end{aligned}$$

由算幾不等式$\sqrt{p} \leq \frac{s}{2}$得

$$2p \leq \frac{s^2}{2} \text{ 故 } \frac{2p+s-s^2}{2s(2-s)} \leq \frac{2s-s^2}{4s(2-s)} = \frac{1}{4},$$

而等號成立若且唯若$u = v$。

解三:如解二,

$$[PUQV] = \frac{1}{2}(\frac{uv}{u+v} + \frac{(1-u)(1-v)}{2-(u+v)})。$$

但

$$\frac{uv}{u+v} \leq \frac{u+v}{4},$$

而

$$\frac{(1-u)(1-v)}{2-(u-v)} \leq \frac{2-(u+v)}{4}。$$

故

$$[PUQV] \leq \frac{1}{2}(\frac{u+v}{4} + \frac{2-(u+v)}{4}) = \frac{1}{4}$$

而等號成立若且唯若$u = v$。

4.解一:

$$\begin{aligned}
& x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 3 \\
\Longrightarrow\quad & (x - \frac{x}{x+1})^2 + \frac{2x^2}{x+1} = 3 \\
\Longrightarrow\quad & (\frac{x^2}{x+1})^2 + \frac{2x^2}{x+1} - 3 = 0 \\
\Longrightarrow\quad & \frac{x^2}{x+1} = 1 \text{ 或 } \frac{x^2}{x+1} = -3。
\end{aligned}$$

解 $\dfrac{x^2}{x+1}=1$ 得 $x=\dfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$

而解 $\dfrac{x^2}{x+1}=-3$ 得 $x=\dfrac{1}{2}(-3\pm i\sqrt{3})$。

解二:

令$y=\dfrac{x}{x+1}$, 則$xy=x-y$而$x^2+y^2=3$。

於是$x^2y^2=(x-y)^2=3-2xy$,

即$(xy)^2+2xy-3=0$。

故$xy=1$或-3, 即$\dfrac{x^2}{x+1}=1$或-3。

餘同解一。

解三:令$y=x+1$, 則所給方程式變成

$$(y-1)^2+\frac{(y-1)^2}{y^2}=3。$$

化簡得

$$y^2-2y+2-\frac{2}{y}+\frac{1}{y^2}=3$$

或

$$(y+\frac{1}{y})^2-2(y+\frac{1}{y})-3=0。$$

故

$$y+\frac{1}{y}=-1 \text{ 或 } 3。$$

由

$$y+\frac{1}{y}=-1$$

得

$$y^2+y+1=0。$$

而由

$$y+\frac{1}{y}=3$$

得

$$y^2-3y+1=0。$$

解之,

$$\begin{aligned} x &= y-1=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}i)-1 \\ &= \frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{3}i) \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} x &= y-1=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})-1 \\ &= \frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})。 \end{aligned}$$

解四:

$$\begin{aligned} & x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=3 \\ \Longrightarrow\ & x^2(x+1)^2-3(x+1)^2+x^2=0 \\ \Longrightarrow\ & x^4+2x^3-x^2-6x-3=0 \\ \Longrightarrow\ & (x^2+3x+3)(x^2-x-1)=0。 \end{aligned}$$

解之便得

$$x=\frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{3}i),\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})。$$

譯註:上面的解四雖然看起來似乎最簡潔, 但事實上通分後所得之4次多項式能分解成兩個整係數的二次多項式之乘積, 純屬“巧合”。若將原式右邊之3用其他整數取代, 則此解變行不通了 (但解一, 二, 三仍然不變)。

事實上命題委員會原來考慮的方程式是

$$x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=1,$$

讀者如果用上面解一至解三中任何一個方法, 可以得到答案爲

$$x=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1})$$

或

$$\frac{1}{2}(-1-\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}+1}i)。$$

但若想用解四的方法, 就行不通了。

當初命題委員認爲將1改爲3, 可以避免在答案裡有根號中的根號出現, 而各種解法的基本精神不變, 但沒有想到居然有考生用“蠻力”(brute force) 硬硬地分解因式而得到答案, 這倒是命題委員始料所未及的, 可見“智者千慮, 必有一失”。

5.解一:對$i = 1,2,\cdots,n$, 以a_i及b_i分別表兩張編號爲i的牌所佔的位置 (由左向右數且$a_i < b_i$)。由於J(百搭) 之位置是$n+1$, 故

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) &= (1+2+\cdots+n)+(n+2)\\ &\quad +(n+3)+\cdots+(2n+1)。\end{aligned}$$

但由條件知

$$b_i = a_i + i (i=1,2,\cdots,n)$$

故

$$\begin{aligned}2\sum_{i=1}^{n}a_i &= (n+2)+(n+3)+\cdots+(2n+1)\\ &= \frac{3n(n+1)}{2},\end{aligned}$$

於是

$$3n(n+1) = 4(\sum_{i=1}^{n}a_i)。$$

故n或$n+1$必須爲4之倍數 (同時亦可看出$\sum_{i=1}^{n}a_i$必須爲3之倍數)。故當$n = 1,2,5,6,9,10$時, 所求之排列方法不存在。

當$n = 3$時, 排列之法基本上僅有一種, 即$232J311$。

當$n = 4$時, 基本上亦僅有一種排列法, 即$2423J4311$。

當$n = 7$, 或8時, 有許多解, 例如當$n = 7$時,

$2723563J7546114$,$3723264J7546115$, $6272456J4753113$,$4272456J3753611$, $2527465J4376311$,$1127246J5473653$, $4117436J3572625$,$5347354J6272116$, $4537435J6272116$,

均爲合乎條件之排列法。

而當 $n = 8$ 時有

$78426247J86531135$,$68571165J87423243$, $28246754J86573113$

等之排列法 (譯註: 讀者應試試看能否找到與上面所列不同之排列法。)

解 二:以J所佔之位置爲零點而以x_k及y_k表兩張編號爲k之牌所佔的位置, 此處

$$x_k \neq 0 \neq y_k, \quad -n \le x_k < y_k \le n,\\ k = 1,2,\cdots,n。$$

因$y_k = k + x_k$故

$$\begin{aligned}2\sum_{k=1}^{n}y_k &= \sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)+\sum_{k=1}^{n}(y_k+x_k)\\ &= \frac{n(n+1)}{2}+0 = \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

從而

$$n(n+1) = 4(\sum_{k=1}^{n}y_k)。$$

餘同解一。

解三:將$2n+1$張牌所佔之位置自左向右以$1,2,\cdots,2n+1$編號。爲方便起見 ,編號爲偶 (奇) 數之位置, 稱爲偶 (奇) 點。則顯然偶點有n個而奇點有$n+1$個。又由假定可知編號爲同一奇數之兩張牌所佔之位置必爲一偶點及一奇點, 而編號爲同一偶數之兩張牌所佔之位置必爲兩偶點或兩奇點。故由編號爲偶數之牌所佔之奇點及偶點之個數必均爲偶數。

現分兩種情形討論: 若n爲偶數, 則J所佔之位置爲一奇點, 故偶點仍有n個, 其中$\frac{n}{2}$個由編號爲奇數之牌佔據。故剩餘之$\frac{n}{2}$個偶點必由編號爲偶數之牌佔據。從而$\frac{n}{2}$ 爲偶數, 即n爲4之倍數。

若n爲奇數, 則J所佔之位置爲一偶點, 故奇點仍有$n+1$個, 其中$\frac{(n+1)}{2}$ 個由編號爲奇數之牌佔據。故剩餘之$\frac{(n+1)}{2}$個奇點必由編號爲偶數之牌佔據。從而$\frac{(n+1)}{2}$爲偶數, 即$n+1$爲4之倍數。餘同解一。

—本文譯者任教於加拿大Wilfrid Laurier大學之教授, 並任加拿大數學競賽委員會之主席—