序、系與邏輯、真理

(Order、Hierarchy and Logic、Truth)

金周新

一、引言

討論白馬、黑馬, 不如譚馬; 討論先有雞、先有蛋, 不如譚染色體 (DNA); 討論中藥療傷、西藥醫病, 不如譚生理與藥理; 討論家事、國事、天下事, 不如譚人下之私 (公); 討論好夢、惡夢、春秋大夢, 不如譚目不明 (夢); 討論 I love you、Je t'aime、めりレます ,我愛你, 不如譚內心的接受 (愛)。同樣地, 討論群、環、體、模 ..., 不如譚代數; 討論代數幾何、代數拓撲、代數數論、K - 代數 ,不如譚典範理論 (Category Theory)。但典範理論上的典範理論又是什麼呢?

當我們周而復始, 討論不完, 無法譚盡, 找不到問題解決的一天時 ,我們就會回過頭來想想: 我們在討論問題時討論的結構本身是不是出了問題 ,它的癥結在那裡?

數學的推理本身就建立了自己的一套邏輯結構, 這結構的完備性, 也給了我們推理的可信度。而眞理常存, 其一不變, 唯一的臨界點又在那裡呢 [1]? 戈德爾的不完備定理給了我們探索眞理的途徑, 但本身是否眞的完備, 可能是人人都可以, 也應當思考的問題, 而不僅僅是哲學家所必須面對的問題 [2]。

二、序與戈德爾不完備定理

一個陳述 (statement) 往往是一些單字有秩序地排列起來, 代表一些意義, 如 [3]

天渡津口口口碑
海容寧世世世平
孟雖亞聖其道驥
周言舊邦猶命新

一九九一, 七, 廿七

人生相遇在知心
賓城會上喜逢君
三週共度雖嫌短
安得把盞在津寧

一九九一, 七, 廿八

秩序的排列是連續的, 我們可選擇習以爲常的量來一一對應, 時間是最佳的選擇, 因爲 $t \in R^1$, 它一去不復返。秩序的排列是離散的, 正整數應當是最佳的選擇了。

戈德爾察覺到所有的數學的陳述都是一組字串有序地離散排列, 而這些字組符號 (Symbols) 又是有限多個, 於是訂下了自然數來一一對應; 透過這些自然數的算術運作, 得到唯一的自然數 ,或許觀察這一個簡單的自然數, 便能瞭解到冗長陳述中的含意。

這些符號、數字、中文含意可列出一個簡表:

邏輯符號	自然數	中文含意
$\supset$	3	則
&	5	和
$\vee$	7	或
$\neg$	9	否
$\forall$	11	對於所有的
$\exists$	13	存在
$=$	15	等於
$+$	17	加
$\cdot$	19	乘
,	21	逗點
0	23	零
a	25	a
$\mid$	27	a 的下一個邏輯符號 b

從這些邏輯符號的序我們可訂下一個算術公式, 再來討論這個公式是否眞的可正規代表系統, 而這個系統是否具一致性與完備性。例如:$a+a=a\cdot a \Leftrightarrow 2^{25}\cdot 3^{17}\cdot 5^{25}\cdot 7^{15}\cdot 11^{25}\cdot 13^{19}\cdot 17^{25}$。

而不完備定理告訴我們,「任何一個具有一致性的公設化系統皆是不完備的。」其證明的核心可參考 [4][5]。

三、系與卜氏定理 (Post Theorem)[6][7][8]

現在我們可以討論如何建立邏輯上的序, 由序而成一體系, 如何再將兩個系連絡在一起。

首先定義圖林級數 (Turing Degree) 和一些性質:

定義:

(i) 存在一遞迴函數 f 使得 $f(A)\subseteq B$ 和 $f(\overline{A})\subset B$, 稱 A 是多對一可約簡 (reducible) 至 B, 記成 $A\le_T B$,$T\in \mathbf{Z}^+$。

(ii) $A\le_T B$ 和 $B\le_T A$, 則 $A\equiv_T B$。

(iii) A 的圖林級數 $\deg(A)=\{B: B\equiv_T A\}$。

(iv) $\deg(A)\cup\deg(B)=\deg(A\oplus B)$

(v) a,b,c 表示級數,D 表示所有級數所成的集合。

(vi) $\deg(A)\le\deg(B)$ 若且唯若 $A\le_T B$。

(vii) a 包含一個遞迴可數集, 稱級數 a 是遞迴可數。

(viii) a 包含某一集合 A 在集合 $B\epsilon b$ 中遞迴可數, 稱級數 a是遞迴可數。

在遞迴過程下是收斂的運作, 我們稱爲一個跳躍 (Jump), 而跳躍可用級數來定義, 第 n 次跳躍可從某一個跳躍遞迴 n 次產生, 所以我們可以建立一個級數的無限系。也就是說, 我們可定義

(i) 集合 A 的跳躍 $J^A = \{\Phi_x^A(x) \downarrow\}$, $\Phi_x^A(x)$ 是定義於集合 A 中 x 的函數值。

(ii) $A^{(0)} = A,\ A^{(n+1)} = (A^{(n)})'$, 第 n 次跳躍$A^{(n)}$便可求得。

(iii) 令$0^{(n)} = \deg(\phi^{(n)})$ 則可求得一系

$$0 < 0' < 0'' < \cdots < 0^{(n)} < \cdots$$

如何利用戈德爾的洞悉能力, 將級數的跳躍系和算術系一一對應呢? 這便是卜氏定理的精神。

定義: B 是算術的, 若且唯若 B 可經有限多個投影 P 和補投 影 I – P 遞迴作用中產生。

定義:

(i) 集合 B 在 $\sum_0(\Pi_0)$ 中, 若且唯若 B 是遞迴。

(ii) $Q = \begin{cases} \exists,\ n \text{ 是奇數},\ n \geq 1 \\ \forall,\ n \text{ 是偶數},\ n \geq 1 \end{cases}$ 存在一遞迴關係 $R(x,\, y_1,\, y_2, \ldots, y_n)$ 使得 $x \in B \Longleftrightarrow (\exists y_1)(\forall y_2)(\exists y_3)\cdots Q(y_n)$

$$R(x, y_1, y_2, \cdots, y_n),$$

則 $B \in \sum_n$。

同樣地,

$Q = \begin{cases} \exists,\ n \text{ 是奇數},\ n \geq 1 \\ \forall,\ n \text{ 是偶數},\ n \geq 1 \end{cases}$

存在一遞迴關係 $R(x,\, y_2,\, y_2, \ldots y_n)$ 使得 $x \in B \Longleftrightarrow (\forall y_1)(\exists y_2)(\forall y_3)\ldots(Qy_n)$ $R(x, y, y_2, \ldots, y_n)$。

(iii) $B \in \sum_n \cap \Pi_n$, 則 $B \in \Delta_n$

(iv) $B \in \cup_n(\sum_n \cap \Pi_n)$, 則 B 是算術的。

定義: 如集合 $A \in \sum_n(\Pi_n)$, 對所有的集合 $B \in \sum_n(\Pi_n), B \leq_1 A'$, 則 A 是 $\sum_n$ — 完備 (Π_n — 完備)。

卜氏定理: 對於所有的 $n \leq 0$,

(i) $B \in \sum_{n+1} \Longleftrightarrow B$在一些 Π_n 集合中遞迴可數。
$\Longleftrightarrow B$ 在一些$\sum_n$集合中遞迴可數。

(ii) $n > 0, \phi^{(n)}$ 是Π_n — 完備。

(iii) $B \in \sum_{n+1} \Longleftrightarrow B$ 在 $\phi^{(n)}$ 中遞迴可數。

(iv) $B \in \Delta_{n+1} \Longleftrightarrow B \leq_T \phi^{(n)}$。

證明:

(i) $(\Rightarrow)$ 令 $B \in \sum_{n+1}$, 則 $x \in B \Longleftrightarrow (\exists y)R(x,y)$,$R \in \Pi_n$。所以 B 在 R 中屬於 Π_1。

故 B 在 R 中遞迴可數。

$(\Leftarrow)$ 設 B 在某一 Π_n 集合 C 中遞迴可數。則對於某一戈德爾數 e, 令 W_e 是第 e 個遞迴可數集合,

$$\begin{aligned} x \in B &\Longleftrightarrow x \in W_e^C (\text{如果 } W_e^C \neq \phi)。\\ &\Longleftrightarrow (\exists s)(\exists \sigma)[\sigma \subset C \;\&\; x \in W_{e,s}^\sigma \\ &\qquad \equiv \{\sigma, e, s : W_e^\sigma(s) \neq \phi\}。\\ &\Rightarrow \quad x \in W_{e,s}^\sigma。\end{aligned}$$

因爲 $C \in \Pi_n$,

$\sigma \subset C \iff (\forall y < lh(\sigma)) \equiv |dom\sigma|)[\sigma(y) = C(y)]$,

$lh(\sigma)$是 σ 的定義域的長度函數。

$\iff (\forall y < lh(\sigma))[[\sigma(y) = 1 \ \& \ y \in C]$
$\vee[\sigma(y) = 0 \ \& \ y \notin C]$。

$\iff (\forall y < lh(\sigma))[\Pi_n \cup \Sigma_n]$。

又因爲 1.$A \in \sum_n(\Pi_n) \Longleftrightarrow (\forall m > n)$
$[A \in \sum_m \cap \Pi_m]$。

2. $A, B \in \sum_n(\Pi_n) \Rightarrow A \cup B$,
$A \cap B \in \sum_n(\Pi_n)$。

3. $R \in \sum_n(\Pi_n), A, B$ 具下列性質

$\langle x, y\rangle \in A \Longleftrightarrow (\forall z < y) R(x, y, z)$

$\langle x, y\rangle \in B \Longleftrightarrow (\exists z < y) R(x, y, z)$

則 $A, B \in \sum_n(\Pi_n)$。

(ii) $n = 1$, 顯然成立

$n > 1, \phi^{(n)}$ 是 $\sum_n$ – 完備,
$\overline{\phi^{(n)}}$ 是 Π_n – 完備。

$B \in \sum_{n+1} \iff B$ 在某一 $\sum_n$中遞迴可數。

$\iff$ B 在 $\phi^{(n)}$ 中遞迴可數。

(iii) $\overline{\phi^{(n)}}$ 是 Π_n – 完備, 可從 (i),(ii) 中得證。

$\iff B \leq_1 \phi^{(n+1)}$, 因 A 在 B 中遞迴可數若且唯若 A 在 $\bar{B}$ 中遞迴可數。

(iv) $B \in \Delta_{n+1} \iff B, \overline{B} \in \sum_{n+1}$。

$\iff B, \overline{B}$ 在 $\phi^{(n)}$ 中遞迴可數。

$\iff B \leq_T \phi^{(n)}$。

系定理(Hierarchy theorem):$(\forall n > 0)[\Delta_n \subset \sum_n$ 和 $\Delta_n \subset \Pi_n]$。

證明:利用卜氏定理 (ii), (iv) 和 B 在 A 中遞迴可數若且唯若 $B \leq_1 A'$

$$\phi^{(n)} \in \Sigma_n - \Pi_n$$

同理

$$\overline{\phi^{(n)}} \in \Pi_n - \Sigma_n$$

太抽象了!讓我們來舉兩個小例子。

四、例子 [9][10]

令 $x : R^+ \rightarrow Z_p$ 滿足函數方程式 $x(t) = x(t-1) + x(t-\theta), \theta \in (0,1)$, 其確切解可從遞迴可數性求得

定理:

$$x(t, \theta) = \sum_{\substack{\mu > 0, \nu > 0 \\ t-1 < \mu + \nu\theta < t}} \binom{\mu + \nu}{\mu}_2$$

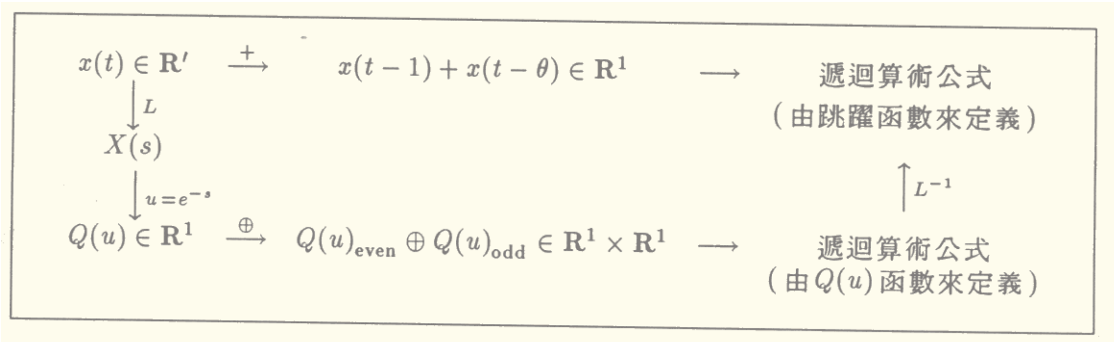
其證明的步驟如下

(i) 將定義在 $t \in \mathbf{R}^1$ 上的函數 $x(t)$ 的相加 “+”, 經拉普拉斯轉換至 $\mu \in \mathbf{Z}^+$ 上的函數 $Q(u)$ 的相加 “$\oplus$”。

(ii) 而 $\mu \in \mathbf{Z}^+$, 可分解成兩個正交可數子集:μ 是偶數或奇數, 從 這兩個正交子集中很容易觀察出 $Q(u)$ 的遞迴算術公式。

(iii) 再經過反拉普拉斯轉換之加法公式 — 彼隆 (Perron) 加法公式, 可求得 $x(t)$ 的遞迴算術公式。而這算術公式是定義在兩個可數“離散”空間的跳躍函數 $J(t)$ 的遞迴公式。

我們可用以下的交換圖清晰地看出證明的想法:



證明:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x(t-1)+x(t-\theta) \bmod p \\
&= x(t-2)+2x(t-1-\theta)+x(t-2\theta) \bmod p \\
&\ \ \vdots \\
x(t,\theta) &= \sum_{\substack{\mu>0,\nu>0\\ t-1<\mu+\nu\theta<t}} \binom{\mu+2}{\mu} x(t-\mu-2\theta) \bmod p
\end{aligned}
$$

2階跳躍函數定義爲:

$$J(t)=\sum_{\substack{\mu>0,\nu>0\\ \mu+\nu\theta<t}} \binom{\mu+\nu}{\mu}_2 + \eta(t),$$

$\eta(t)=\frac{1}{2}$, 當 $t=\mu+\nu\theta, \binom{\mu+\nu}{\mu}_2=1$

$x(t)$ 經過拉普拉斯轉換成 $X(s)$, 再令 $u=e^{-s}$,$Q(u)=X(s)$,$Z_p=Z_2$, 其正規多項式級數展開式可寫成

$$
\begin{aligned}
Q(u) &= (1-u^\theta-u)^{-1} \\
&= \sum_{\mu=0}^{\infty}(u^\theta+u)^\mu \\
&= \sum_{\mu:even}^{\infty}(u^\theta+u)^\mu + \sum_{\mu:odd}^{\infty}(u^\theta+u)^\mu \\
&= (1+u^\theta+u)\sum_{\mu=0}^{\infty}(u^\theta+u)^{2\mu} \\
\Rightarrow\ & (Q(u))_2=(1+u^\theta+u)Q(u^2)
\end{aligned}
$$

經彼隆 (Perron) 加法公式可求得跳躍函數的遞迴公式,

$$J(t,\theta)=J(\frac{t}{2})+J(\frac{t-\theta}{2})+J(\frac{t-1}{2})。$$

對於任意質數 $p, J_r(t,\theta) = \sum_{r=1}^{p-1}\sum_{q=0}^{p-1}\sum_{\nu=0}^{q}\xi_{\tau r}J_\tau[\frac{t-(q-\nu)\theta-\nu}{p}]$,

$$\xi_{\tau r}=\begin{cases}1, & (\tau\binom{q}{\nu})_p\neq 0\\ 0, & (\tau\binom{q}{\nu})_p=0,\end{cases}$$

如圖一、二、三分別爲 $p=3, J_0, J_1, J_2$ 的分佈。而 $deg(J_r)=p$。

第二個例子考慮建立一個孤立子系。

同樣地, 我們可考慮運算子空間 $\mathcal{O}$, 運算子 $L \in \mathcal{O}$, 求相對應正交運算子的分解,$\bigoplus_n L_n \in \mathcal{O}$。

類似前一個例子中的拉普拉斯的運作, 我們將積分、微分的運算轉換成 $+,\cdot$ 的運算,

也可求得一遞迴算術公式。再經過反拉普拉斯的運算, 我們可求得另一算術公式, 這便形成一孤立子系 (Soliton Hierarchy)。

我們也可寫下一交換圖, 將其運作清晰看出。

$$
\begin{tikzcd}
L \in \mathcal{O} \arrow[r, "{(\Pi, \Sigma, \exp) L}"] \arrow[d] & \text{遞迴算術公式} \\
 & \text{(由旋運算子(Vertex Operator)來定義)} \\
\bigoplus_n L^{\frac{1}{n}} \in \mathcal{O} \arrow[r, "{(\Pi, \Sigma, \exp) L^{\frac{1}{n}}}"] \arrow[d, "\text{拉普拉斯轉換} L"] & \text{遞迴算術公式} \arrow[u] \\
\text{散射資料} \in \mathbf{R}^n \arrow[r, "{+,\cdot}"'] & \text{散射資料} \in \mathbf{R}^n \arrow[u, "{\text{反拉普拉斯轉換} L^{-1}, \text{(Gelfend-Leviton)方程式}}"']
\end{tikzcd}
$$

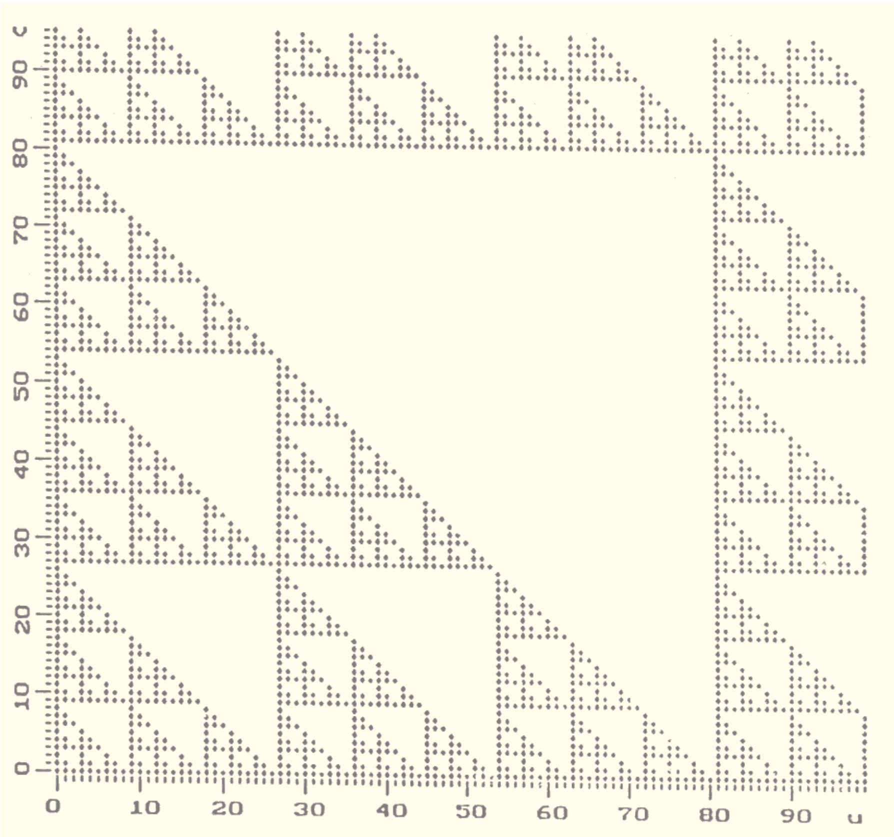


圖1. J_0 分佈

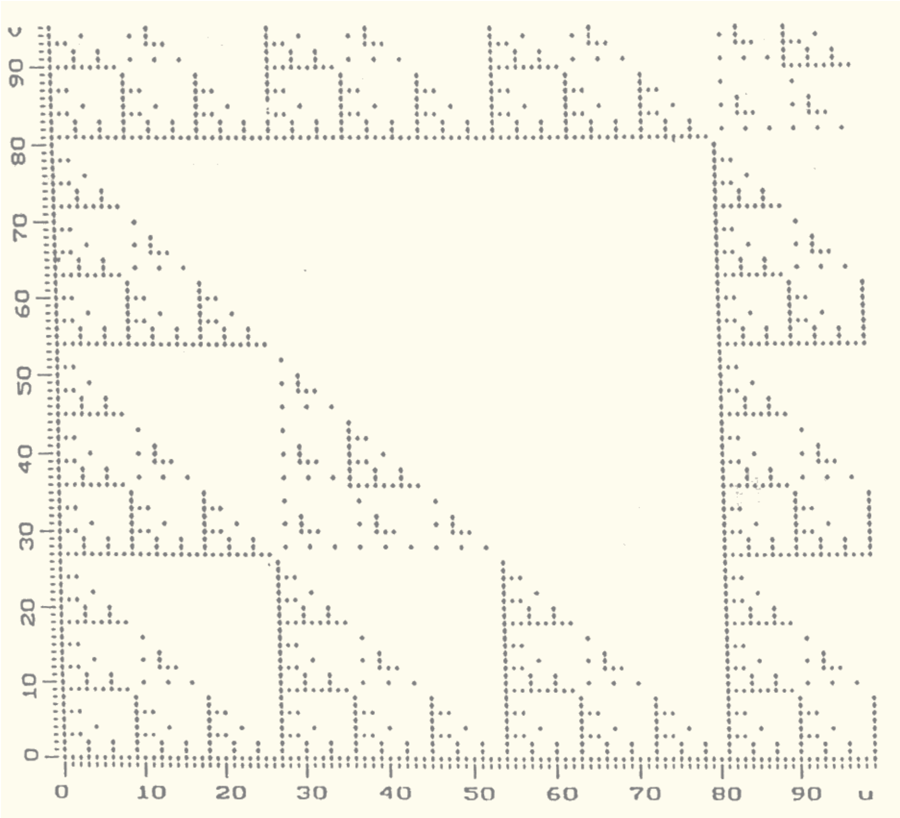


圖2.　J_1 分佈

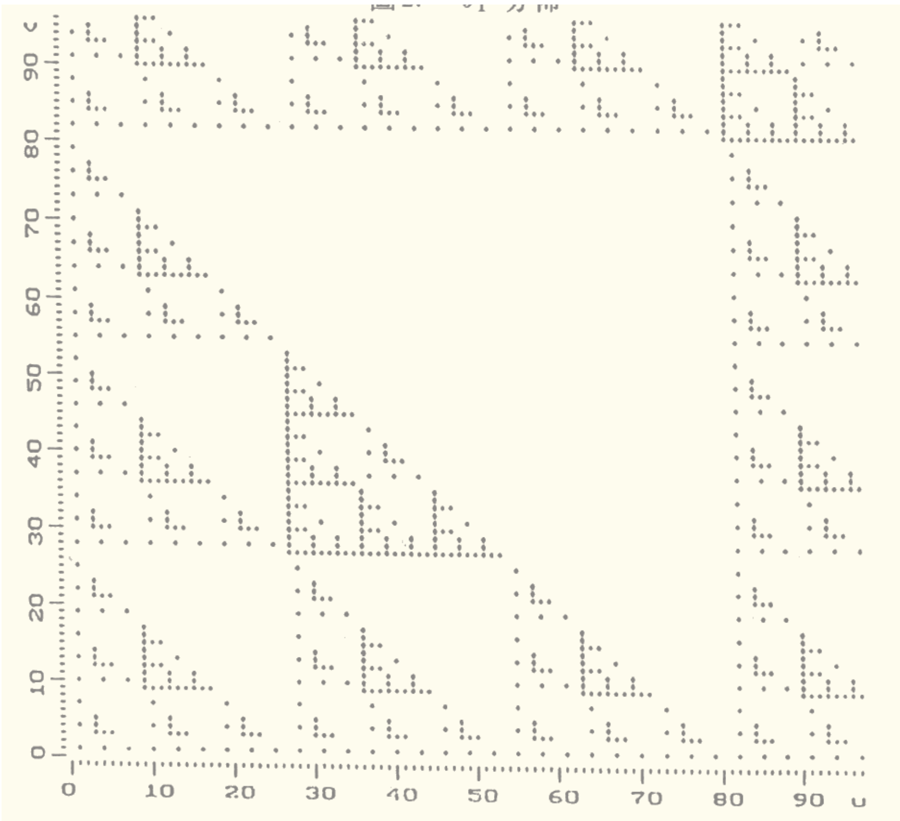


圖3. J_2 分佈

令運算子

$$L = L_3^2 = \partial_x^2 + q_x\sigma_+ + r_x\sigma_- - qr,$$

$\sigma_+, \sigma_-, \sigma_3, I$ 是 $SL(2,C)$ 的產生元。

我們可以建立四組運算子 L_1, L_2, L_3, L_0 皆滿足 $L = L_1^2 = L_2^2 = L_3^2 = L_0^2$, 正規的 n 次方。

令 $B_n = L_0 L_3^{n-1}$, 取其正規級數展開式的微分項 B_n^+ 和 L_r, $r = 0,1,2,3$ 做拉氏對 (Lax pairs), 而構成一組孤立子系, 而 $\deg(L) = 2$, 高次級數的孤立子系便不難求得。

五、引申問題及結論

如何將邏輯結構推廣, 建立更廣義的無限維交錯李代數是一有趣的問題, 這將與組合數學 ,自然機 (Automata) 等問題相連繫在一起, 其幾何意義更值得深究, 最終我們將探討戈德爾不完備定理是否眞的完備 [11],[12]。

六、文獻參考

1. Geuss R., “The Idea of a Critical Theory”, Camb. Univ. Press, (1982).
2. 董世平,“Gödel Imcompleteness Theorem”, Mathmedia, Vol. 15, No. 4, pp.

49-53, (1991).

3. 孟道驥教授與作者在代數群及其延拓會上的應和詩。
4. Gödel V. K., “Über Formal Unentscheidbare Sätze der Principia Mathemtia und Verwandter System I”, Monatsh. Math. Phys., Vol. 38, pp. 173-198, (1931).
5. Nagal E. and Newman J. R., “Gödel's Proof”, New York Univ. Press, (1960).
6. Post E.L., “Recursively Enumerable Sets of Positive Integers and Their Decision Problems”, Bull. Am. Math. Soc., Vol. 50, pp. 284-316, (1944).
7. Soare R.I., “Recursively Enumerable Sets and Degrees”, Springer-Verlag, (1987).
8. Sacks G. E., “Degree of Unsolvability”, Ann. of Math. Studies, No. 55, Princeton Univ. Press, (1963).
9. Jeng H.T. and Chin C.H., “On Z_3 Fractal”, Ann. Meeting of CPS, (1992).
10. Chin C. H. and Chen H. H., “On the Spinor Representation of the Infinite Dimensional Grassmannian”, Nucl. Phys. B, Vol. 6, pp. 419-421, (1989).
11. Harrington L. and Soare R.I., “Post's Program and Imcomplete Recursively Enumerable Sets”, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A., Vol. 88, pp. 10242-10246, (1991).
12. Chin C. H. and Jeng H. T., “Exact Solution, Jump Function, Fractal Dimension and Entropy Formation of the p-adic Functional Equation $x(t) = x(t-1)+(t-\theta)$”, to appear in the Proc. of XXI Int. Congress of D. G. M. T. P. (1992).

—本文作者現任教於交通大學電子物理系—