Brown 運動與 Lévy 泛函分析 (中)*

飛田武幸 著

李育嘉

陳明廷 合譯

⊙上回摘要

Lévy 對於在函數空間 $L^2[0,1]$上所定義之泛函進行分析的同時, 微分之概念很自然地以變分的形態登場。但對積分而言 $L^2[0,1]$ 上 Lebesgue 測度並不存在, 其定義便以泛函數的平均代之以突破困境, 使得吾人能建立無限維空間上之微積分的理論架構。

對於平均之概念, 現代的解決方法是在 $L^2[0,1]$ 所擴大之廣義函數空間上由白雜訊測度 μ 之積分代之。此種 μ 可視爲 Brown 運動 $B(t)$ 對時間微分之白雜訊

$$\dot{B}(t) = \frac{d}{dt}B(t), \qquad t \in \mathbf{R},$$

的機率分佈, 如此, 古典的 $L^2[0,1]$ 上之分析, 可由 Brown 運動的泛函數之分析, 以現代的面貌復活過來。

又, 由於 μ 形式上可視爲無限維球面 $S^\infty(\sqrt{\infty})$ 上之均勻分佈的機率測度, 很自然的, 吾人可期待達成部分無限維回轉群之研究工作。又如有限維 Lie 群也相同, 此即爲提倡機率調和分析之理由。

6. 廣義泛函數

Lévy 之函數的分析, 以現代之觀點來進行泛函數之分析, 首先很自然地登場者是爲廣義泛函數。

基本上所考慮的是依據機率論的理論, 亦可以說是以 *i.i.d.* (independent identically distributed 即遵循獨立的相同分佈) 隨機變數系統爲本。廣義泛函數可視爲連續無限個具 *i.i.d.* 之系統 $\{\dot{B}(t)\}$ 或廣義函數系 $\{x(t), t \in \mathbf{R}^1\}$ 之函數,t 視爲座標之符號。如在 n 維空間上之座標 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 若考慮 $x(t)$, 當 t 變動時便成爲 $x(t)$ 並排之連續無限之座標系統 $(\cdots, x(t), \cdots, x(t'), \cdots)$, 以此爲變數之函數是吾人研究之對象, 吾人稱之爲廣義泛函數。

*原文刊登於"數學研討"第27卷, 第4期,68 − 73 頁 (1980), 日本評論社, 東京。

假設變數系已經決定, 接下來要考慮的是何種函數(廣義函數 $x(t)$ 之函數) 爲泛函數,

(i) 最基本且初等的是多項式, $x(t)^2$ 或 $x(t)^n$ 或它們的和, 尤其指數函數也應作爲基本的, 而非於最初處理不行。

(ii) 一方面, 具 $i.i.d.$之白雜訊 $\{\dot{B}(t)\}$ 可想像爲將自然界中之“振動”或“噪音”理想化後之數學產物。於是, 物理學或工學等所出現之隨機的現象, 可用白雜訊泛函數表示出來者並不少。處理這些問題對吾人而言是有意義的, 對其背後之實態及重要性之期待應不會落空。

爲上述 (i),(ii) 之廣義泛函數所形成之空間作明確定義, 而建立架構爲吾人下一步的主要工作。此架構之建立, 當然並非最終之結果, 由此發展下來之研究及相關之分析當然會有後續的推廣。

7. 廣義泛函數之導入 (一)

廣義泛函數應如何定義之, 今敍述其構想。

以 Hilbert 空間 $(L^2) = L^2(E_1^*, \mu)$ 作爲基準, 其中 E_1^* 爲 §3 中所說明之空間,μ 爲白雜訊測度。今考慮由 E_1^* 及其試函數 E_1 之對偶 $\langle x, \xi\rangle = \xi(x)$ 所構成之系統 $\{\xi(x); \xi \in E_1\}$,(L^2) 即爲所有此等系統 $\xi(x)$ 之非線型且平方可積之函數所成之 Hilbert 空間。

令 $\xi(x)$ 等之 n 次 Hermite 多項式全體所擴張成之 (L^2) 的部分空間, 設爲 $\mathcal{H}_n$, 則可得(L^2)之直和分解

$$(L^2) = \bigoplus_n \mathcal{H}_n。 \tag{13}$$

以量子力學的話來說, 此爲 Fock 空間, 而$\mathcal{H}_n$ 表 n 個粒子存在時之狀態的向量全體。N. Wiener 稱 $\mathcal{H}_n$ 爲 n次之 Homogeneous Chaos。在機率論中多半稱 $\mathcal{H}_n$ 之元素爲 n 次 Wiener 重積分。

以下我們說明使用積分這個名稱的理由。此是由文獻 [4] 中之構想而來。$n = 1$ 時 $\langle x, \xi\rangle$ 擴張成 $\mathcal{H}_1$。將 $x(t)$ 想成是 $\dot{B}(t)$ 之様本函數時,$L^2(\mathbf{R}^1)$ 上之內積爲標準的雙線性型,$\langle x, \xi\rangle$ 可視爲

$$\int \xi(t)\dot{B}(t)\, dt = \int \xi(t)\, dB(t)。 \tag{14}$$

此爲視 $dB(t)$ 爲隨機測度時之隨機積分。同時由 (14) 之左邊來了解, 可視爲變數 $\dot{B}(t)$ 乘上係數 $\xi(t)$ (的連續無限個之和) 之齊次一次多項式。

$n = 2$ 時, 可考慮如下, 固定 ξ 時 $\langle x, \xi\rangle$ 爲機率空間 (E_1^*, μ) 上之平均值爲 0, 變異數爲 $\|\xi\|^2$ 之 Gauss 隨機變數, 又 $\langle x, \xi\rangle$ 與 $\langle x, \eta\rangle$ 之共變異數 (covariance) 爲 ξ 與 η 在 $L^2(\mathbf{R}^1)$ 上之內積 (ξ, η), 於是, 由 $\langle x, \xi\rangle$,$\xi \in E_1$ 之二次 Hermite 多項式之一般型可表爲

$$\langle x, \xi\rangle\langle x, \eta\rangle - (\xi, \eta)。$$

如同 (14) 可寫爲

$$\int \xi(t)\, dB(t) \int \eta(s)\, dB(s) - \int \xi(t)\eta(t)\, dt,$$

由於 $(dB(t))^2$ 之平均爲 dt, 上式亦可寫爲

$$\int\int \xi(t)\eta(s)\, dB(t)dB(s)\,,$$

除直線 $t = s$外之其他部分是隨機測度之積分, 因此吾人稱之爲二重 Wiener 積分。

空間 $\mathcal{H}_2$ 之元素之一般形爲

$$\int\int F(t,s)\, dB(t)dB(s)。 \tag{15}$$

爲求表現之唯一性, 核函數 F 取爲對稱 $(F(t,s)=F(s,t))$ 之 $L^2(\mathbf{R}^2)$-函數。如此定義之隨機變數 (15), 可知其平均値爲 0, 變異數爲 $2\|F\|^2$ ($\|\quad\|$ 爲 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 之範)。若不計因數 2 可得下列同構,

$$\mathcal{H}_2 \cong \widehat{L^2}(\mathbf{R}^2)\,, \tag{16}$$

此處 $\widehat{L^2}(\mathbf{R}^2)$ 爲對稱之 $L^2(\mathbf{R}^2)$-函數全體所成 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 之 部分空間。同樣地, 吾人也可定義 $\mathcal{H}_n$ 與 $\widehat{L^2}(\mathbf{R}^n)$, 此時可表爲

$$\mathcal{H}_n \cong \widehat{L^2}(\mathbf{R}^n)。 \tag{17}$$

更詳細而言,$\mathcal{H}_n$ 之元素 $\varphi(x)$ 與對稱之 $\widehat{L^2}(\mathbf{R}^n)$ 函數 F 成 $1:1$ 對應,φ 在 (L^2) 上之範 $\|\varphi\|$ 與 F 在 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上之範 $\|F\|$之間之關係爲 $\|\varphi\| = \sqrt{n!}\,\|F\|$。

本節到現在的內容, 已超過歷史, 概略的論述可參考文獻 [2] 第 4 章。

今回到 Lévy ([L,3])。在他的場合, 泛函數 $U(x)$ 之變數 x 在 $L^2[0,1]$ 內變動, 由求 U 之平均値的 Gâteaux 公式觀之, 對應於他分析的東西, 可再以空間 (L^2) 上的分析來看。讓 (14) 與 (15) 中之 $\dot{B}(t)$ 回到 $x(t)$ 而重新分別改寫時成爲

$$\int \xi(t)x(t)\, dt, \qquad \int\int F(t,s)x(t)x(s)\, dtds。$$

n 次之一般情形可寫爲

$$\begin{aligned} &U(x)\\ &= \int\cdots\int F(u_1,\cdots,u_n)x(u_1)\cdots x(u_n)\, du^n,\\ &\qquad F\in \widehat{L^2}(\mathbf{R}^n)。 \end{aligned} \tag{18}$$

此爲 Lévy 所稱 x 之 n 次齊次函數中所謂的正規泛函數, 當然 F 爲對 $u_1,\cdots,u_n$ 之對稱函數。

今對 Lévy 工作之發展, 吾人可考慮如下所表之 n 次正規泛函數之分析

$$\begin{aligned} &U(x)\\ &= \int\cdots\int G(u_1,\cdots,u_k)x(u_1)^{n_1}\cdots x(u_k)^{n_k}\, du^k,\\ &\qquad \sum_1^k n_i = n。 \end{aligned} \tag{19}$$

此處 U 之變數並非單純的實變數 x, 而是變數系 $\{x(u)\}$。吾人可以說此爲由 *i.i.d.* 之 $\{\dot{B}(t)\}$ 引發而對各 $\dot{B}(t)$ 或 $x(t)$ 之變數系上之泛函作同樣的考慮。

話說回到 Lévy 至今, 形式上有些過頭了。上述 (19) 可想像爲形式上的東西, 若視 x 爲白雜訊之樣本函數則 (18) 具有正確的 n 次 Wiener 重積分之意味。但到底 (19) 是否具有此種意味? 對於此吾人有如下的說明。

取構造 $\mathcal{H}_n$ 時之基底之一 $\langle x,\xi\rangle$ 之 n 次 Hermite 多項式。此爲具參數 σ^2 之 x 的 n 次多項式

$$\begin{aligned} &H_n(x;\sigma^2)\\ &= \frac{(-\sigma^2)^n}{n!}\exp\left[\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]\frac{d^n}{dx^n}\exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right], \end{aligned}$$

用此式得

$$\varphi(x)=n!H_n(\langle x,\xi\rangle;\|\xi\|^2)。$$

用 Wiener 重積分來表示時由 (17) 之同構所對應之核函數 F (也可說 (18) 之 F) 爲

$$\xi(u_1)\xi(u_2)\cdots\xi(u_n)\in\widehat{L^2}(\mathbf{R}^n)。$$

今令 ξ 接近於 δ-函數 δ_t 時 $\varphi(x)$ 之極限已經在 $\mathcal{H}_n$ 中看不出來, 但形式上 (18) 可趨近 $x(t)^n$ 而成爲 (19) 之一特例。於是 (19) 在吾人設定的延伸形式上可定義時, 必需在 (17) 的同構對應上能夠對應擴張其定義方可。此時核函數 F 成爲 $\mathbf{R}^n$ 上之廣義函數。到底取何種程度之類的廣義函數方可, 此爲吾人之動機。由 §6 (i) 可作如下之建議:

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{H}_n^{(-n)} & \cong & \hat{H}^{-\frac{n+1}{2}}(\mathbf{R}^n)\\ \Cup & & \Cup \\ \mathcal{H}_n & \cong & \widehat{L^2}(\mathbf{R}^n)。\end{array}\tag{20}$$

下式爲 (17) 本身, 吾人想要的廣義函數空間 $\mathcal{H}_n^{(-n)}$ 爲如上所表, 次數 $-\frac{n+1}{2}$ 可在對稱的 Sobolev 空間 (H 爲 Sobolev 空間,^ 表 "對稱" 之意) 同構下定義之。$\mathcal{H}_n^{(-n)}$ 爲 n 次廣義泛函數。

$\mathcal{H}_n^{(-n)}$ 爲 $x(t)$ (或 $\dot{B}(t)$) 之 n 次 Hermite 多項式。形式上可寫爲 $n!H_n(x(t);1/dt)$ (或 $n!H_n(\dot{B}(t);1/dt)$)。爲了與乘冪區別起見, 借用物理的記號而書寫爲

$$:x(t)^n: \quad 或 \quad :\dot{B}(t)^n:$$

與 $:\Pi_k x(t_k)^{n_k}:$ 或對應之 $\dot{B}$ 之量同樣均可用 Hermite 多項式嚴格定義之。此處,Lévy 之正規泛函數 (19) 在 $\mathcal{H}_n^{(-n)}$ 中之重要例子爲

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int\cdots\int G(u_1,\cdots,u_k)\\ &\qquad :x(u_1)^{n_1}\cdots x(u_k)^{n_k}:du^k,\ \sum_1^k n_i=n。\end{aligned}\tag{21}$$

注1. (21) 之核 G, 視爲 $\mathbf{R}^k$ 上之函數, 不如視爲 $\mathbf{R}^n$ 上之對稱函數, 其變數分別減爲 $n_1,\cdots,n_k$ 個。如此, 合於 (20) 之同構。

注2. 欲給與廣義泛函數理論上之定義, 如單變數廣義函數之場合, 非由試函數 (test functions) 之空間開始不行, 可是由利用 Sobolev 空間 (20) 定義之函數 來看, 似無所說明。

最後, 如 (13), 僅剩對 $\mathcal{H}_n^{(-n)}$ 等, 和之運算, 有限維時加法有待定義。$\mathcal{H}_n^{(-n)}$ 之範爲 $\|\cdot\|_{-n}$ 時, 考慮由正遞減數列 $\{c_n\}$ 所新定義之範

$$\|\cdot\|=\left(\sum_n c_n\|\cdot\|_{-n}^2\right)^{\frac{1}{2}}。$$

$\mathcal{H}_n^{(-n)}$ 之代數直和, 對 $\|\cdot\|$ 完備化後書寫爲

$$(L^2)^-_{\{c_n\}}\equiv(L^2)^-=\bigoplus_n\mathcal{H}_n^{(-n)},\tag{22}$$

稱之爲廣義泛函數空間, 此爲吾人所欲求之空間, 在此空間上開始作分析。

8. 廣義泛函數之導入 (二)

上節已對 Sobolev 型之廣義泛函數作定義, 與有限維之場合一樣對 Schwarz 型之

廣義泛函數也可作定義, 兩者具大部分共同性但也分別有其特性 (參看 [8],[9])。

出發點與上節一樣是 (13) 之 (L^2)。爲使敍述較具體, 取 $L^2(\mathbf{R}^1)$ 上之正自 身共軛算子 (Positive self–adjoint operator)

$$A=-\frac{d^2}{du^2}+u^2+1。$$

借用物理學上之第二量子化方法, 首先定義 $\widehat{L^2}(\mathbf{R}^n)$ 上之對稱張量乘積 $A^{\otimes n}$, 然後利用 (17) 之同構對應, 可定義 $\mathcal{H}_n$ 上之算子 $\tilde{A}^{\otimes n}$。如此在 (L^2) 上定義之 A 的第二量化算子

$$\Gamma(A)=\bigoplus\tilde{A}^{\otimes n}$$

即可工作。由於

$$\Gamma(A)^p=\Gamma(A^p),\qquad p: \text{正整數}.$$

於是可求 $\Gamma(A)^p$ 之定義域

$$\mathcal{D}(\Gamma(A)^p)=(S)_p。$$

此空間以 $\Gamma(A)^p\varphi$ 之 (L^2)-範 $\|\varphi\|_p$ 爲其範,$(S)_p$ 成爲 Hilbert 空間。函數空間 $(S)_p, p>0$, 對 p 爲單調遞減, 且 $(S)_{p+1}$ 至 $(S)_p$ 中之嵌入寫像爲 Hilbert–Schmidt 型。取

$$(S)=\bigcap_p(S)_p$$

便定義了核型空間 (S)。(S) 具代數結構, 此爲此試函數之好處。設 $(S)_p$ 之共軛空間爲 $(S)_{-p}$ 則 (S) 之共軛空間 $(S)^*$ 爲

$$(S)^*=\bigcup_p(S)_{-p}。\tag{23}$$

此 $(S)^*$ 也爲廣義泛函數空間。

空間 $(S)^*$ 含上節所重視的 $x(t), t\in\mathbf{R}^1$ 之多項式或正規泛函數。再者若 K 爲 $L^2(\mathbf{R}^1)$ 上之積分算子時, 用二次形式 $\langle x,Kx\rangle$ (此爲 $\mathcal{H}_2^{(-2)}$ 上之元素) 可得 E_1^* 上之 Gauss 核

$$\psi_K(x)=:\exp\left[-\frac{1}{2}\langle x,Kx\rangle\right]:,\quad K\geq 0。\tag{24}$$

上式 : : 表以 K 之 Fredholm 之行列式 (trace–class 以外均爲無限大!) 的平方根來除 (此爲乘法正規化 (mulicative renormalization))。

由此種例子觀之,$(L^2)^-$ 或 $(S)^*$ 不僅是分析學上, 且是由物理學開始的自然科學諸分野可推察之產物。

在此吾人再回到本來之目標—隨機過程之分析。以下面的隨機變分方程式作爲方針, 此當然爲 Lévy 所提倡。對於隨機過程 $X(t)$, 微小時間 dt 之間的變化 $\delta X(t)$ 可表爲

$$\delta X(t)=\Phi(X(s),s\leq t,Y_t,t,dt)。\tag{25}$$

Φ 爲非隨機之函數,Y_t 爲各時點獨立之新生過程 (也可稱爲 innovation)。此時由 Φ 與 $\{Y_t\}$ 可完全決定 $X(t)$ 之結構。這個方程式並非形式上的而已, 在考慮隨機過程之分析上, 其定義很明確。

例如 $Y_t=\dot{B}(t)$,Φ 爲線性時,Gauss 過程 $X(t)$ 爲 Brown 運動之因果上的線性泛函數, 其表現爲

$$X(t)=\int^t F(t,u)\,dB(u),\tag{26}$$

換句話說可引導標準表現之理論之研究。

同樣, 取 $Y_t=\dot{B}(t)$,Φ 爲非線性時,(25) 更是吾人之隨機分析有效地被採用之場合, 想要進入此狀況, 尚須若干準備。

9. 微分算子

回過來說, 有了泛函數之變數系 $\{x(t)\}$, 或直觀的選 $\{\dot{B}(t)\}$, 且基本上的函數 (其實爲廣義泛函數) 之空間若已決定, 接著下來通常考慮對那些變數作微分。形式上而言, 吾人期望有

$$\frac{\partial}{\partial X(t)} \quad \text{或} \quad \frac{\partial}{\partial \dot{B}(t)}$$

之定義。關於此, 如下論述可滿足吾人之希望。

給定廣義泛函數 $\varphi(x)$, 用 [8] 之方法變換爲 U-泛函數 $U(\xi)$, 此種變換稱爲 $\mathcal{S}$-變換:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}:\ \varphi(x) &\to (\mathcal{S}\varphi)(\xi) \equiv U(\xi) \\ = &\int \varphi(x+\xi)\, d\mu(x), \quad \xi \in E_1。 \end{aligned} \tag{27}$$

以 $\delta/\delta\xi(t)$ 表 Fréchet 微分時, 微分算子 ∂_t 可由

$$\partial_t \varphi(x) = \mathcal{S}^{-1} \frac{\delta}{\delta \xi(t)} (\mathcal{S}\varphi)(\xi) \tag{28}$$

定義之。此保有充分廣大的定義域,

$$\partial_t:\ \mathcal{H}_n^{(-n)} \to \mathcal{H}_{n-1}^{(-n+1)} \quad (\text{限制在}\mathcal{D}(\partial_t)) \tag{29}$$

爲消滅算子 (annihilation operator)。

對於此, 可定義生成算子 (coreation operator) ∂_t^* 爲對 ∂_t 的共軛算子, 而使

$$\partial_t^*:\ \mathcal{H}_n^{(-1)} \to \mathcal{H}_{n+1}^{(-n-1)} \tag{30}$$

成立。

利用此二算子, 乘 $x(t)$ 之運算 π_t 可定義爲

$$\pi_t \varphi(x) = x(t)\cdot\varphi(x) = (\partial_t^* + \partial_t)\varphi(x)。 \tag{31}$$

上式在普通的函數分析中是不能成立的, 但在吾人的廣義函數論中卻可定義, 此爲吾人分析上之一大特徵。上式之乘積對於 μ, 幾乎對所有的 $\dot{B}$ 之樣本函數 x 皆成立。

例:

$$\begin{aligned} &\partial_t \int f(u) : x(u)^n : dt = n f(t) : x(t)^{n-1} : , \\ &\partial_t^* : x(t)^n : =: x(t)^{n+1} : , \\ &\pi_t x(s) = x(t)x(s) =: x(t)x(s) : + \delta_t(s)。 \end{aligned}$$

上回 §2 所處理之 Lévy 之 Laplacian $\triangle_L$, 用上面的記號可表爲

$$\triangle_L = \left(\int \partial_t^2 (dt)^2 \right) = \mathcal{S}^{-1} \frac{\delta^2}{\delta\xi(t)^2} \mathcal{S}。$$

另一方面, 粒子數算子 N 可表爲

$$N = \int \partial_t^* \partial_t \, dt$$

($-N$ 爲 Ornstein–Uhlenbeck 算子)。$\triangle_L$, 在 (L^2) 上爲零算子, 但在 $(L^2)^-$ 上有效地運作。另一方面,N 在 $\mathcal{H}_n$ 爲 $n \cdot I$ (I 爲恆等算子) 而對 (L^2) 作用, 兩者分開在工作。

例: (24) 式所給之例, 當 K 爲 $c \cdot I$ 時其 U-泛函數成爲

$$U(\xi) = \exp\left[-\frac{1}{2} c' \|\xi\|^2 \right], \quad c' = \frac{c}{1+c}。$$

因此可得

$$\triangle_L \psi_K = -c' \psi_K(x)。$$

即 ψ_k 可視爲 $\triangle_L$ 之固有函數。

以機率調和分析之立場,$\triangle_L$ 或 N 與回轉群之間有趣之關係可加以說明, 關於這些擬與下回, 今就此擱筆。

參考文獻

[4] K. Itô, Multiple Wiener Integral, J. Math. Soc. Japan 3(1971), 157–169.

[5] N. Wiener, Nonlinear problems in random theory, Technology Press of MIT, John Wiley and Sons, 1958.

[6] T. Hida, Analysis of Brownian functionals, Carleton Math. Lecture #13, 1975, 2nd ed 1978.

[7] H. -H. Kuo, Brownian functionals and applications, Acta Applicandae Math. 1 (1983), 175–188.

[8] I. Kubo and S. Takenaka, Calculus on Gaussian white noise, I–IV, Proc. Japan Academy. Math. Sci., 56A(1980), 376–380, 411–416, 57A (1981), 433–437, 58A (1982), 186–189.

[9] T. Hida, J. Potthoff and L. Streit, White noise analysis and applications, Math. +Physics, vol. 3, ed. L. Streit, 1988.

作者: 飛田武幸, 日本名古屋大學教授, 1991 年退休, 現任教於名城大學.

譯者: 李育嘉, 成功大學數學系教授.
陳明廷, 成功大學數學系副教授.