



變數  $x_1, x_2, \dots, x_n$  也無需限制為非負值, 而  $Ax \leq b$  更可以改為  $Ax = b$  或者  $Ax \geq b$  的約束形式。但是為了方便討論起見, 我們暫時集中精神在形式如 (P) 的問題上。

## I. 線性規劃的歷史

根據一般的說法, 線性規劃問題是由現在美國史丹福大學任教的 G. B. Dantzig 教授在 1947 年前後孕育出來的。那個時候他擔任 美國空軍的數學顧問, 負責發展一套機械式的方法來做兵力調遣, 人員訓練, 以及後勤補給這些計劃方案。由於這類問題牽涉很廣也很複雜, 所以 Dantzig 博士先考慮最簡單的線性結構, 將有關的函數一律簡化成線性形式來處理。其結果便在 1948 年以「線性結構的規劃」(Programming in Linear Structure) 的標題發表。至於「線性規劃」這個名稱, 則是另一位名家 T. C. Koopmans 和 Dantzig 兩人於 1948 年夏天在美國加州 聖塔摩尼加(Santa Monica) 海灘散步時擬定的。在 1947 到 1949 兩年間, 線性規劃裡的一些重要觀念, 包括最有名的「單形法」(Simplex method), 都陸續見諸於世。而且從 1947 年開始, T. C. Koopmans 便明確指出線性規劃可以做為傳統經濟分析的利器。

這兒特別要注意的是線性規劃的理論基礎絕不是一夕生成。早在 1826 年左右法國的大數學家 傅立葉便研究過如何解決一組聯立線性不等式的問題。這以後還有不少的數學家做過相關的研究工作。到了 1939 年, W. Karush 在 芝加哥大學的碩士論文更提出在

有限維空間裡滿足不等式約束的函數其最優化的條件 (optimality conditions)。在同一年裡, 蘇聯的 L. V. Kantorovich 更提出一些很特殊的線性規劃模式來做簡單的生產計劃。他甚至還有一套簡化的方法來求解呢! 不幸的是 Kantorovich 的工作始終未為蘇聯之外的世界所知, 一直到了 Dantzig 建立起完整的線性規劃理論之後數十年方為世人所知。

在 1950 和 1960 年代, 線性規劃的內容愈變愈豐富, 更有許多成功的實用案例, 所以愈來愈受世人矚目。到了 1975 年, 瑞典皇家科學院決定將當年的 諾貝爾經濟獎頒發給前面提到的 L. V. Kantorovich 和 T. C. Koopmans 以表彰他們在「資源最佳分配理論」的貢獻。由於這項最佳分配是藉由線性規劃模式來達成, 所以線性規劃便成了萬眾矚目的焦點。

四年之後 (亦即 1979 年), 線性規劃再次成了報章雜誌的頭條新聞。這次是因為一位蘇聯數學家 L. G. Khachian, 他利用 N. Z. Shor, D. B. Yudin, 以及 A. S. Nemirovskii 的「橢球法」(ellipsoid method) 概念印證出線性規劃問題可在多項式時間內求得解答。從純理論的觀點而言, Khachian 的「橢球法」在最惡劣的情況下所需要的計算量要比「單形法」增長的緩慢。所以有希望用之解決超大型的線性規劃問題, 包括全球資源的最佳分配在內。這也就是華爾街日報(Wall Street Journal) 將「橢球法」的發現列為頭條新聞的重要原因。

不幸的是理論歸於理論, 在實際計算上,「橢球法」的一般表現反倒不如傳統

的「單形法」來得有效。於是這方面的學者專家重新構想是否能設計出一套解法無論在理論上和實際計算上均能超越「單形法」？這個問題的答案到了1984年由一位美國電話電報公司貝爾實驗室的印度裔科學家N. Karmarkar 揭曉。他設計出一項「內點法」來解線性規劃問題，不但理論上較「單形法」為優，而且經由實際驗證適合解決超大型的問題。從此之後，「內點法」的研究在最近八年來蔚為一時風潮，不斷有推陳出新的結果。

## II. 線性規劃的特性

尚未介紹線性規劃解法之先，我們先看一個很簡單的例子：

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } -x_1 - 2x_2 \\ & \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \leq 40 \\ & \quad \quad 2x_1 + x_2 \leq 60 \\ & \quad \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

若是我們將它的可行解集合(feasible domain) 定義成  $F \triangleq \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 40, 2x_1 + x_2 \leq 60, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ ，那麼我們可由下圖看出  $F$  是一個多邊形具有四個頂點，其座標分別是  $(0, 0), (0, 40), (30, 0)$ ，以及  $(20, 20)$ 。由該圖形也很容易印證該線性規劃雖有無窮多的可行解，但是最佳解發生在  $\mathbf{x}^* = (0, 40)$  此一頂點。它的最佳函數值則為  $z^* = -0 - 80 = -80$ 。

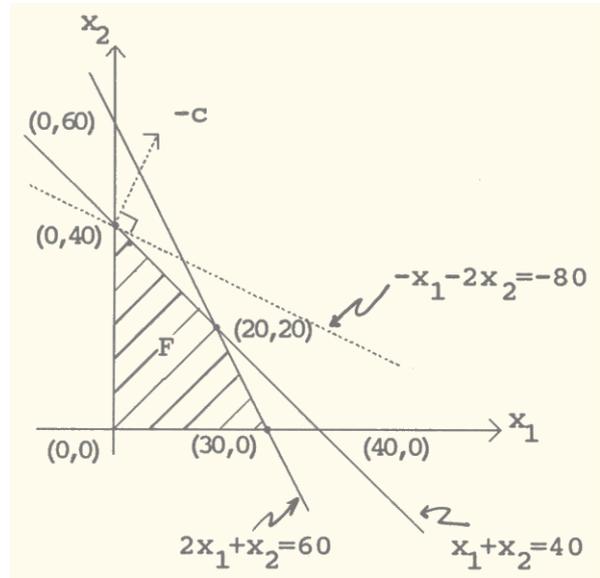


圖1

這雖然是一個很簡單的例子，但它也告訴我們幾個重要的事實：(1) 線性規劃的可行解集合若非空集合則含有頂點。(2) 這些頂點之一可能就是一個最佳解。正式的說法是給定一個線性規劃問題 (P)，定義可行解集合  $F \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid A\mathbf{x} \leq b, \mathbf{x} \geq 0\}$ ，則下述兩定理成立：

**定理1:**若  $F \neq \phi$ ，則  $F$  至少含有一個頂點。

**定理2:**若  $F \neq \phi$ ，而且 (P) 的最佳解值不為負無限大，那麼  $F$  至少有一個頂點會是 (P) 的最佳解。

值得注意的是一般而言， $F \neq \phi$  時，它可能像上例所示為一個有界的 (bounded) 的多面體 (polytope)，也可能是一個無界的 (unbounded) 多面集合 (polyhedral set)。但不論是有界或是無界， $F$  都是一個含有有限個頂點的凸集合。至於定理2則指出當線性規劃

問題有解時，它的最佳解可能朝著無界的極值方向發生而使最佳解值變得無限小。假若不是這種情況，那麼 $F$ 的某個頂點一定會是最佳解之一。

根據定理1和定理2，我們知道當 $F \neq \emptyset$ 時而且(P)的最佳解值不為負無限大時， $F$ 雖然可能含有非頂點的最佳解，但至少有一個頂點是最佳解之一。所以我們立刻就可以集中注意力在頂點之上並且設計出一套「列舉法」來解線性規劃問題：

(列舉法)：

步驟一：找出 $F$ 的所有頂點。

步驟二：計算每個頂點的對應函數值 $c^T \mathbf{x}$ 。

步驟三：相互比較找出具有最小函數值的頂點便是解答。

這個方法看似簡單，實行起來卻有問題。從前面的例題來看，因為 $F$ 在二維空間裡頭，它的任何一個頂點均由相交兩線所定。比方說(20, 20)由 $2x_1 + x_2 = 60$ 與 $x_1 + x_2 = 40$ 相交而得；(0, 40)由 $x_1 = 40$ 與 $x_1 + x_2 = 40$ 相交而得；(0, 0)由 $x_1 = 0$ 與 $x_2 = 0$ 相交而得；(30, 0)則由 $2x_1 + x_2 = 60$ 與 $x_2 = 0$ 相交而得。理論來說，我們由 $2x_1 + x_2 = 60$ ， $x_1 + x_2 = 40$ 以及 $x_1 = 0$ ， $x_2 = 0$ 這四條直線中每次取兩條相交，可以得到 $C(4, 2) = 6$ 個頂點才對。但是由 $x_1 + x_2 = 40$ 與 $x_2 = 0$ 相交而得的(40, 0)以及由 $2x_1 + x_2 = 60$ 與 $x_1 = 0$ 相交而得的(0, 60)並非(P)的可行解，所以 $F$ 一共只有四個頂點。

將這個例子推廣來看，對於一個給定的線性規劃問題(P)而言，在 $n$ 維空間裡，每一個頂點均由 $n$ 個超平面(hyperplane)相交而成。因為(P)一共有 $(m + n)$ 個超平面(亦即 $A\mathbf{x} = b$ 與 $\mathbf{x} = 0$ )，所以 $F$ 最多有 $C(m + n, n) = (m + n)!/n!m!$ 這麼多個頂點。讀者只需要將 $n = 100, m = 50$ 代入 $C(m + n, n)$ 便知道 $F$ 有多少個可能的頂點，要想用列舉法來解這麼一個「小型」問題，實在不是一件容易的事，更遑論解決「大型」的問題具有百萬變數與數十萬的約束條件呢？所以我們一定要設計出有效率有系統的方來解線性規劃的問題。

### III. 線性規劃的解法

在這一節裡我們簡單的來介紹三種重要的線性規劃解法，它們分別是在第一節中提過的「單形法」、「橢球法」、以及「內點法」。

#### 一. 單形法

單形法的基本概念很簡單明瞭，既然一個線性規劃的最佳解可能出現在 $F$ 的一個頂點之上，我們又不想用列舉法列出所有的頂點，那麼我們就由某一個容易求得的頂點開始，再檢查所有在 $F$ 中與它相連接的鄰近頂點。如果有任何一個鄰近頂點的函數值要來得更小，那麼我們便移動到這個鄰近頂點。接著便以此新的頂點為準再檢查與它相連接的鄰近頂點來決定向何處移動。因為 $F$ 的頂點個數有限，最後我們終於會找到一個頂點使它的函數值要比所有鄰近頂點都來得低或至少相當，或者我們可以發現到此頂點有一個

極值方向會使函數值降到無限小。據此便可判斷出現有的頂點為 (P) 的最佳解或者 (P) 的最佳解值為負無限大。我們可將單形法的重要步驟勾勒如下：

步驟一：找一個  $F$  的頂點  $\mathbf{x}^1$ ，使得  $A\mathbf{x}^1 \leq b, \mathbf{x}^1 \geq 0$ 。如果找不到，則表示  $F = \phi$  而且 (P) 無解。設定指標  $k = 1$ 。

步驟二：決定由現有頂點  $\mathbf{x}^k$  通往鄰近頂點或極值的各個方向  $\mathbf{d}_q^k$ 。

(i) 若沿著各個  $\mathbf{d}_q^k$  方向走，均會增加目標函數值，則  $\mathbf{x}^k$  已是 (P) 的最佳解。

(ii) 若沿著某一個  $\mathbf{d}_q^k$  方向走，會減少目標函數值，則做下一步驟。

步驟三：測試沿著  $\mathbf{d}_q^k$  方向走能多遠而不離開  $F$  (亦即步長  $\alpha_k$ )。

(i) 若步長  $\alpha_k$  可為無限大，則  $\mathbf{d}_q^k$  通往極值方向，而且 (P) 的最佳解值為負無限大。

(ii) 若步長  $\alpha_k$  有其上限，則沿  $\mathbf{d}_q^k$  通往較佳之鄰近頂點

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{d}_q^k$$

重新設定指標  $k \leftarrow k + 1$ ，回頭做步驟二。

前述的三個步驟僅是個大概，至於細節則需要參考其他資料。一般而言，步驟一常用「Big-M」法或者「Two-Phase」法來找第一個頂點。步驟二中的可能移動方向則由所謂的「基本矩陣」(Fundamental Matrix) 來決定。至於步驟三中的步長則由「最小比例測試」(Minimum Ratio Test) 來決定。由下圖 (圖 2) 可以看「單形法」沿著可行解集合  $F$  的邊界由一個頂點移動到另一個頂點的情形，也就是因為這個原因，單形被歸類為「邊界趨近法」。

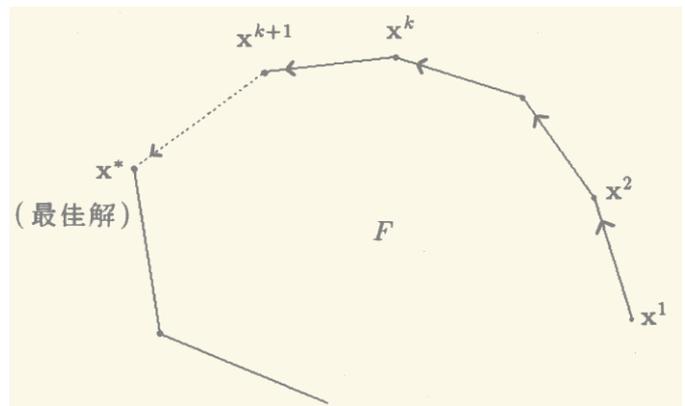


圖 2

整體而言，單形法的表現相當不錯。對於一個有  $n$  個變數及  $m$  個約束的線性規劃問題，平均起來，單形法只需要移動經過大約  $m^{0.9522} \times n^{0.3109}$  這麼多個頂點，便能求得最佳解。但是 G. Minty 和 V. Klee 兩位學者在 1971 年提出實例來驗證單形法在最差情況下的表現非常不好，對於一個  $n$  維空間裡的特殊線性規劃問題，單形法要移動經過  $2^n - 1$  個頂點才能到達最佳解。因為  $2^n$  這個數目隨著  $n$  的增長而做指數式成長，所以成長速度相當快，要用單形法來解決超大型的線性規

劃確實有值得憂慮之處。讀者不妨想像  $n = 1000$  便知道  $2^n$  有多大。也就是因為這個隱憂，所以學者專家們一直希望能找出一個解法不需要經過那麼多次計算便能達到最佳解。最好是隨著  $n$  與  $m$  的增長，總共的計算量僅做多項式函數的增加，而非指數式增加。這也就是一般所謂在「多項式時間」(polynomial-time) 內解線性規劃問題。

## 二. 橢球法

橢球法是第一個可以在多項式時間內解決一般線性規劃問題的解法。它和單形法相當不同，在這一節裡我們做一個簡單的介紹。

對於一個線性規劃問題 (P) 而言，根據給定的資料  $(A, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  我們可以定出一個息息相關的對偶問題 (Dual problem):

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } \mathbf{b}^T \mathbf{w} \\ & \text{s.t.} \\ & \quad A^t \mathbf{w} \leq \mathbf{c} \quad (\text{D}) \\ & \quad \mathbf{w} \leq 0 \end{aligned}$$

這個對偶問題 (D) 有  $m$  個小於或等於零的變數  $w_1, w_2, \dots, w_m$  以及  $n$  個約束條件。由於 (P) 和 (D) 均是由同一組資料  $(A, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  所決定，它們之間滿足所謂的對偶性質：

### 定理3:

- (i) 若 (P) 和 (D) 之一具有有限最佳解，則另一問題亦具有有限最佳解，而且  $\mathbf{c}^t \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^t \mathbf{w}^*$ 。

- (ii) 若 (P) 和 (D) 之一的最佳解值為無限大，則另一問題必然無解。

根據 (P) 與 (D) 的對偶關係，我們可將兩者的最佳解以一組最優化條件 (Optimality conditions) 聯結起來：

$$\begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, & \mathbf{x} \geq 0 \\ A^T \mathbf{w} \leq \mathbf{c}, & \mathbf{w} \leq 0 \\ \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{w} = 0 \end{cases} \quad (*)$$

若是我們能找到一組  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{R}^n$  及  $\mathbf{w}^* \in \mathbf{R}^m$  滿足上述最優化條件的線性不等式，那麼  $\mathbf{x}^*$  就是 (P) 的最佳解， $\mathbf{w}^*$  是 (D) 的最佳解。所以只要能有效的解決最優化條件的線性不等式，就能夠同時的解決一個線性規劃問題 (P) 以及它的對偶問題 (D)。而橢球法正是一種專門解決線性不等式的方法。

現在我們介紹如何以橢球法來解一組線性不等式  $Mu \leq \nu$ ，其中  $M$  是一個  $p \times q$  的矩陣， $u \in \mathbf{R}^p, \nu \in \mathbf{R}^q$ 。為了方便起見，我們利用圖3的二維空間情形來解釋，但讀者不難想像在高維空間裡用橢球來取代二維的橢圓。首先注意到的是因為  $Mu \leq \nu$  的解集合是一個多邊凸集合  $S \triangleq \{u \in \mathbf{R}^p | Mu \leq \nu\}$ 。只要  $S \neq \phi$ ，我們以原點  $u^1$  為心，足夠大的半徑做一圓  $E^1$ ，一定可以使得  $S \cap E^1 \neq \phi$ 。此時我們檢驗  $Mu^1 \leq \nu$  是否成立。若是成立，則  $u^1 \in S \cap E^1$  正是我們需要的解答。否則的話，因為  $S \cap E^1$  是一個凸集合，所以經過圓心，我們可以切掉不含  $S \cap E^1$  的半個圓，而只留下包含  $S \cap E^1$  的半個圓 (以  $\frac{1}{2}E^1$  表示之)。對  $\frac{1}{2}E^1$  而言，我們可以做出一個最小的橢圓  $E^2$ ，使得  $\frac{1}{2}E^1 \subseteq E^2$ 。這個橢圓的

圓心可由公式求得並以 $u^2$ 表示。值得注意的是 $S \cap E^1 \subseteq E^2$ ，所以我們再檢驗 $Mu^2 \leq \nu$ 是否成立。若是成立，則 $u^2 \in S \cap E^1$ 必為其解。否則經過 $u^2$ 我們又可切去半個 $E^2$ ，而使 $S \cap E^1$ 包含在另一半橢圓 $\frac{1}{2}E^2$ 之中。再使用 $\frac{1}{2}E^2$ 做出一個最小的橢圓 $E^3$ ，使得 $\frac{1}{2}E^2 \subseteq E^3$ 。我們再利用公式求出新的圓心  $u^3$ 並檢驗 $Mu^3 \leq \nu$ 是否成立。這其中的變化可參考圖3所示。

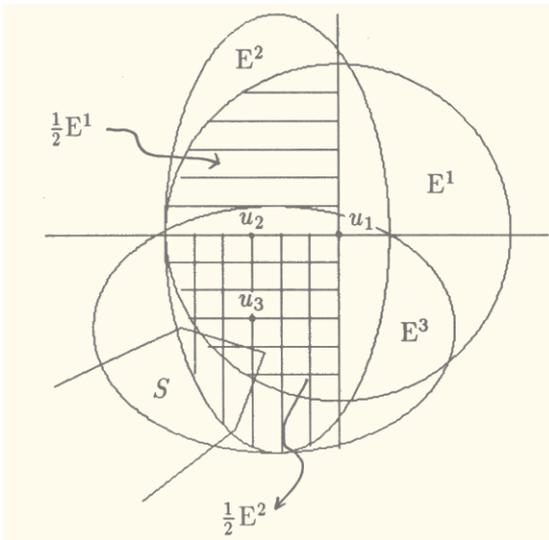


圖3

值得注意的是在 $p$ 維空間中，每次做出的橢球體積都會逐漸縮小。若是我們以 $V(E^k)$ 及  $V(E^{k+1})$ 來表示前後兩個橢球的體積，那麼可以證明出來 $V(E^{k+1}) < e^{-\frac{1}{2}(p+1)}V(E^k)$ 。也就是說 $V(E^{k+1}) < e^{-\frac{k}{2}(p+1)}V(E^1)$ 。由於  $e^{-\frac{k}{2}(p+1)}$ 依著指數式減少，可看出 $V(E^k)$ 隨著 $k$ 的增加而縮小的很快。所以在多項式時間內，新的橢球體積便可縮減至零，要是此時的球心仍不滿足

$Mu \leq \nu$ ，那麼我們可以判斷出 $S = \phi$ ，亦即原題無解。

依據前述道理，我們可將線性規劃的橢球法約略敘述如下：

步驟一：考慮最優化條件的線性不等式(\*)。

在 $(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \in \mathbf{R}^{n+m}$ 的空間中，以原點 $u^1 = (\mathbf{x}^1, \mathbf{w}^1)$ 為心，足夠大的正數 $2^{2L}$ 為半徑做一圓球 $E^1$ 。並設定指標 $k = 1$ 。

步驟二：檢驗現有球心 $u^k = (\mathbf{x}^k, \mathbf{w}^k)$ 是否滿足該最優化不等式。若滿足，則 $\mathbf{x}^k$ 是 (P) 的最佳解， $\mathbf{w}^k$ 是 (D) 的最佳解。若不滿足，則依前述方法得到一個新的橢球 $E^{k+1}$ 及其球心 $u^{k+1}$ 。

步驟三：若是 $V(E^{k+1}) = 0$ ， $u^{k+1}$ 仍不滿足最優化不等式，則 (P) 或 (D) 至少有一無最佳解。否則重新設定指標 $k \leftarrow k + 1$ ，回頭做步驟二。

至於橢球法的詳細情節，讀者可參考本文所附的參考資料，我們就此打住不再贅述。

### 三.內點法

內點法是針對單形法的「邊界趨近」觀念而改採「內部逼近」的路線。它的概念也很容易瞭解，與其像單形法一般沿著邊界由一個頂點移動到另一個頂點，為何不離開邊界而橫跨可行解集合 $F$ 的內部以期迅速逼近最佳解。這就如圖4所示：

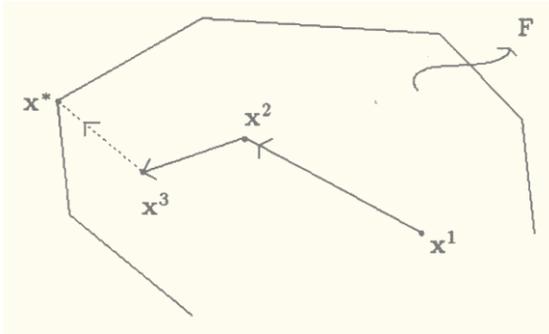


圖4

這個觀念看似容易卻不容易實行，最大的困難是在  $F$  內部時要估計與各邊界的距離，才能確定移動的步長。這樣一來計算量就相當大，反而不如單形法來的簡易。也就是因為這個原因，數十年來始終沒有人設計出來一套有效的「內點法」來解線性規劃問題。

為了方便討論起見，在本節裡我們將 (P) 化爲「等式」約束的下列形式：

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \mathbf{c}^t \mathbf{x} \\ & \text{s.t.} \end{aligned} \quad (\bar{P})$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

同時我們定義  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  爲一個「可行內點」(interior feasible) 如果  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} > 0$ 。將這些可行內點集中起來，便得到一個「可行內點解集合」 $F^0 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} > 0\}$ 。在設計內點法時，我們當然得假設  $F^0 \neq \phi$ ，否則便無內點可言。

內點法也可粗略的分爲三個步驟：

步驟一：找一個可行內點  $\mathbf{x}^1 \in F^0$ 。

設定指標  $k = 1$ 。

步驟二：決定現有解  $\mathbf{x}^k$  是否爲  $(\bar{P})$  的最佳解。若然，則輸出  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^k$ 。否則就尋求一個好的移動方向  $\mathbf{d}_x^k$ ，以及適當的步長  $\alpha_k > 0$ 。

步驟三：由  $\mathbf{x}^k$  移動到新的內點

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{d}_x^k \in F^0。$$

重新設定指標  $k \leftarrow k + 1$ ，回頭做步驟二。

有關內點法的詳細討論，讀者可參考本文所附之參考文獻。大體而言，步驟一中的尋求起始內點也有所謂的「Big-M」法與「Two-Phase」法。步驟三則是很簡單的計算問題。因此內點法的重點精神則著重於如何選取一個好的移動方向  $\mathbf{d}_x^k$ ，適當的步長  $\alpha_k$ ，以及判斷現有解是否爲最佳解這三件事情上。由於內點法的支派很多，各有各的方法，所以很難統合爲一。我們現在就介紹一種比較簡單的「Primal Affine Scaling」方法。

記得我們曾經提過內點法的最大困難是需要估計現有內點與各邊界的距離。現在我們把問題簡化一些，假想  $(\bar{P})$  的可行解集合是座落於第一象限的一個球，而現行解  $\mathbf{x}^k$  剛好落在球心上，此球的半徑是  $r > 0$ ，那麼我們面對著下列問題：

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \mathbf{c}^t \mathbf{x} \\ & \text{s.t.} \end{aligned} \quad (P_1)$$

$$\sum_{j=1}^n (x_j - x_j^k)^2 \leq r^2$$

其中  $x_j^k (j = 1, 2, \dots, n)$  代表  $\mathbf{x}^k$  的第  $j$  個座標。

要解 (P<sub>1</sub>) 很容易, 因為  $\mathbf{x}^k$  在球心, 所以距離邊界等遠, 只要我們沿著  $-\mathbf{c}$  的方向走, 便能使目標函數降到最低, 所以最佳解應為

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + r \frac{-\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|}$$

接著我們將 (P<sub>1</sub>) 變得稍微複雜一些, 將球改為第一象限  $\mathbf{R}_+^n$  來考慮下列問題:

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } \mathbf{c}^t \mathbf{x} \\ &\text{s.t.} \qquad \qquad \qquad (\text{P}_2) \\ &\qquad \qquad \qquad \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

假設現行解  $\mathbf{x}^k > 0$ , 那麼我們要如何移動到最佳解呢? 注意到  $\mathbf{x}^k$  離開各個邊界的距離分別是  $x_j^k, j = 1, 2, \dots, n$ 。所以即使沿著最佳方向走, 未必能走最大步長而達到最佳解。為了補救這個缺點, 我們可以考慮用一個一對一且映成的函數  $T_k$  將  $\mathbf{R}_+^n$  送到  $\mathbf{R}_+^n$ , 並將  $\mathbf{x}^k$  送到  $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^t$  這一點。這時候我們可用  $\mathbf{e}$  為球心開一個單位半徑的球來做一個近似解答 (approximation)。這個近似解雖然不很好, 但是至少我們從 (P<sub>1</sub>) 已經知道如何求解。其觀念可參照圖 5。

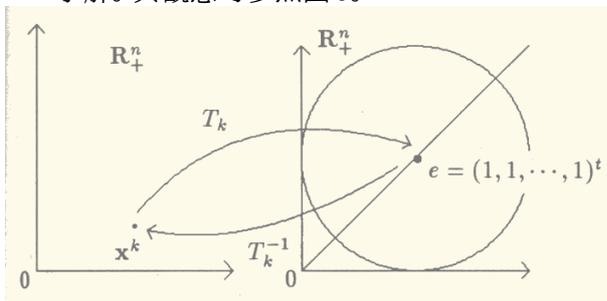


圖 5

注意到  $\mathbf{x}^k > 0$ , 所以我們可定義一個  $n \times n$  的

對角線矩陣

$$D_k = \begin{bmatrix} x_1^k & & & \\ & x_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n^k \end{bmatrix}$$

以及它的反矩陣

$$D_k^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1^k} & & & \\ & \frac{1}{x_2^k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{x_n^k} \end{bmatrix}$$

讀者可以印證一下:

$$\begin{aligned} T_k &: \mathbf{R}_+^n \longrightarrow \mathbf{R}_+^n \\ \mathbf{x} &\longrightarrow \mathbf{y} = T_k(\mathbf{x}) \triangleq D_k^{-1} \mathbf{x} \end{aligned}$$

正是一個一對一的映成函數將  $\mathbf{x}^k$  送到  $\mathbf{y}^k = T_k(\mathbf{x}^k) = D_k^{-1} \mathbf{x}^k = \mathbf{e}$ 。其反函數則為

$$\begin{aligned} T_k^{-1} &: \mathbf{R}_+^n \longrightarrow \mathbf{R}_+^n \\ \mathbf{y} &\longrightarrow \mathbf{x} = T_k^{-1}(\mathbf{y}) = D_k \mathbf{y} \end{aligned}$$

而且  $T_k^{-1}(\mathbf{e}) = D_k \mathbf{e} = \mathbf{x}^k$ 。

在上述轉化之下, (P<sub>2</sub>) 的近似問題在  $\mathbf{y}$  空間中就可寫成:

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } \mathbf{c}^t D_k \mathbf{y} \\ &\text{s.t.} \qquad \qquad \qquad (\text{P}'_2) \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n (y_j - 1)^2 \leq 1$$

應用 (P<sub>1</sub>) 的解答技巧, 我們知道在  $\mathbf{y}$  空間中的近似最佳解為

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^* = \mathbf{y}^{k+1} &= \mathbf{y}^k + \frac{-D_k \mathbf{c}}{\|D_k \mathbf{c}\|} \\ &= \mathbf{e} - \frac{D_k \mathbf{c}}{\|D_k \mathbf{c}\|} \end{aligned}$$

因此在 $\mathbf{x}$ 空間內  $(P_2)$  的近似最佳解是

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{k+1} &= D_k \mathbf{y}^{k+1} \\ &= D_k \mathbf{e} - \frac{D_k^2 \mathbf{c}}{\|D_k \mathbf{c}\|} \\ &= \mathbf{x}^k - \frac{D_k^2 \mathbf{c}}{\|D_k \mathbf{c}\|} \end{aligned}$$

既然知道如何求  $(P_2)$  的近似最佳解, 我們回過頭來看  $(\bar{P})$  的近似最佳解法。應用同樣的轉換技巧, 在 $\mathbf{y}$ 空間中  $(\bar{P})$  變成下列的近似問題:

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } \mathbf{c}^t D_k \mathbf{y} \\ &\text{s.t.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AD_k \mathbf{y} &= \mathbf{b} && (\bar{P}') \\ \sum_{j=1}^n (y_j - 1)^2 &\leq 1 \end{aligned}$$

與  $(P_2)$  相比較,  $(\bar{P}')$  多了一些等式約束條件  $AD_k \mathbf{y} = \mathbf{b}$ 。為了保持這些等式的繼續成立, 我們原來在  $(P_2)$  中的移動方向  $-D_k \mathbf{c}$  便需要投影在  $(AD_k)$  這個矩陣的零空間 (null space) 之中。依據線性代數的理論推演, 我們知道經過投影後的方向應該是  $P_k(-D_k \mathbf{c})$  其中  $P_k$  是一個投影矩陣定義為

$$P_k \triangleq [I - D_k A^T (AD_k^2 A^T)^{-1} AD_k]$$

所以  $(\bar{P}')$  的近似最佳解是

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{e} + \frac{P_k(-D_k \mathbf{c})}{\|P_k D_k \mathbf{c}\|}$$

同時  $(\bar{P})$  的近似最佳解則是

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{k+1} = D_k \mathbf{y}^{k+1}$$

$$= \mathbf{x}^k - \frac{D_k P_k D_k \mathbf{c}}{\|P_k D_k \mathbf{c}\|}$$

上式告訴了我們內點法的移動方向與步長, 至於如何判定  $\mathbf{x}^{k+1}$  是否是  $(\bar{P})$  的真正最佳解則可藉助下列定理。

**定理4:** 若是有任何一個  $j, j = 1, 2, \dots, n$ , 使得  $x_j^{k+1} = 0$ , 則  $\mathbf{x}^{k+1}$  為  $(\bar{P})$  的最佳解。寫到這兒, 我們可將「Primal Affine Scaling」內點法的重要步驟重新整理如下:

步驟一: 找一個可行內點  $\mathbf{x}^1 \in F^0$ 。

設定指標  $k = 1$ 。

步驟二: 計算移動方向  $\mathbf{d}_k = -D_k P_k D_k \mathbf{c}$ , 步長  $\alpha_k = \frac{1}{\|P_k D_k \mathbf{c}\|}$ ,

新內點  $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{d}_k$ 。

步驟三: 檢驗是否有  $x_j^{k+1} = 0, j = 1, 2, \dots, n$ 。

若成立則輸出  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{k+1}$ 。

否則重新設定  $k \leftarrow k + 1$ , 回頭做步驟二。

特別要提醒讀者的是上述內點法僅是一個最基本的架構, 它的本身並未經證明可以在多項式時間內解決一個線性規劃問題。但是只要稍加修改, 便可具備此性質。事實上自1984年 N. Karmarkar 提出第一個有效的內點法之後, 這方面的研究蔚為一時風潮, 至今仍然方興未艾。

## IV. 三種解法比較

就前述三種方法而言，單形法最老牌，研究的最為透徹，商業化的軟體程式也最成熟，許多公司行號，機關學校都曾成功的應用過。橢球法則像曇花一現，雖然在理論上證明了線性規劃問題可在多項式時間內求解，但在實際應用上反而不如單形法來的有效便捷。至於內點法則是最新的設計，理論上它比橢球法還要有效，實際應用上它也可與單形法相抗衡，不少的商業化軟體程式已經上市，前景甚佳。

若是要問單形法和內點法究竟何者較佳？這個問題並沒有一個黑白分明的答案。這兩種方法的基本設計不同，單形法沿著邊界由一個頂點移動到相鄰的頂點，內點法卻跨過可行解集合的內部去逼近最佳解。由於一個頂點的相鄰頂點個數有限，所以前者每一步移動時的計算量不大。反觀一個內點卻有著無窮多的相鄰內點，所以內點法要比較仔細的衡量每一步移動方向與步長。但正因為內點法每一步的移動考量較周詳，它就不需要做太多次的移動，至少不會像單形法有「周遊列國」繞過所有頂點的最惡劣情況發生。綜合來說，對於中小型問題而言，由於可行解集合的頂點不多，單形法的表現大體上要比內點法為佳。對於大型或超大型問題而言，可行解集合的頂點幾成天文數字，此時內點法的表現就有機會領先單形法了。

也正因為上述理由，在今天要教或要學線性規劃就要同時瞭解傳統的單形法和新創的內點法，可謂缺一不可。市面上現行的線性

規劃教科書也正面臨著改寫的挑戰。我們需要更多優秀的學者專家和學生來共襄盛舉。

## 參考文獻

1. Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., and Sherali, H. D., "Linear Programming and Network Flows" (second edition), John Wiley, New York (1990).
2. Bland, R. G., Goldfarb, D., and Todd, M. J. "The ellipsoid method: a survey", *Operations Research* 29, 1039-1091 (1981).
3. Borgwardt, K. H., *The Simplex Method: A probabilistic Analysis*, Springer-Verlag, Berlin (1987).
4. Chvatal, V., *Linear Programming*, Freeman, San Francisco (1983).
5. Dantzig, G. B., "Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities", *Activity Analysis of Production and Allocation*, edited by T. C. Koopmans, John Wiley and Sons, New York, 339-347 (1951).
6. Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1963).
7. Fang, S. C., and Puthenpura, S. C., "Linear Optimization and Extensions: Theory and Algorithms", Prentice Hall, New Jersey (1993).
8. Gass, S. I., *Linear Programming: Methods and Applications* (second edition), McGraw-Hill, New York (1964).
9. Gilmore, P. C., and Gomory, R. E., "A linear programming approach to the cutting-stock problem", *Operations Research* 9, 849-859 (1961).

10. Gilmore, P. C., and Gomory, R. E., "A linear programming approach to the cutting-stock problem-Part II", *Operations Research* 11, 863-888 (1963).
  11. Goldfarb, D., and Todd, M. J., *Linear Programming*, in *Optimization*, Hand- book in Operations Research and Management Science, edited by Nemhauser, G. L. and Rinnooy Kan, A. H. G., Volume 1, 73-170, Elsevier-North Holland, Amsterdam (1989).
  12. Hooker, J. N., "Karmarkar's linear programming algorithm", *Interfaces* 16, 75-90 (1986).
  13. Kantorovich, L. V., "Mathematical methods of organizing and planning production", (in Russian) *Publication House of the Leningrad State University*, Lennin- grad (1939), (English translation) *Management Science* 6, 366-422 (1959-60).
  14. Karmarkar, N., "A new polynomial time algorithm for linear programming", *Combinatorica* 4, 373-395 (1984).
  15. Karush, W., "Minima of functions of several variables with inequalities as side constraints", Master thesis, Department of Mathematics, University of Chicago, Chicago, Illinois (1939).
  16. Khachian, L. G., "A polynomial algorithm in linear programming", (in Russian) *Doklady Akademiia Nauk SSSR* 224, 1093-1096, (English translation) *Soviet Mathematics Doklady* 20, 191-194 (1979). translation), *Soviet Mathematics Doklady* 6, 286-290 (1965).
- 本文作者為美國北卡洛萊納州立大學 作業研究所教授兼所長，現為國立 清華大學工業工程研究所國科會客座教授—