# 守恆律方程組簡介

陳宜良

## 一. 簡介

守恆律方程組 (Conservation Laws) 是50年代新起的一個數學領域。其名稱之由來是因爲這類型的偏微分方程式通常是由一些物理的守恆定律所導出。比如它的一個研究對象—空氣模型方程—是導自質量、動量及能量守恆定律。守恆律方程組所涵蓋的物理模型十分廣泛, 幾乎所有的連續體力學的模型方程均屬於這種型式, 其中包括了氣體、液體、彈性體、電漿、星雲、$\cdots$等。守恆律方程組發展的目標是一套具普遍性的數學理論, 比如非線性波理論、計算方法理論、宏觀極限理論等。其發展過程常是經由深入研究許多具代表性的個別模型, 從中歸納出本質性的結果, 再發展成具普遍性的數學理論。因此, 把握具體模型是研究這個領域的一個特色, 而豐富的模型也帶給這個領域源源不絕的生機。在這篇短文裡, 我將舉幾個周遭的例子, 來介紹基本的守恆律方程式。同時以車流問題爲例, 介紹簡單的非線性波理論, 最後再提出如何快速進入這個領域的建議。

## 二. 守恆律方程組的實例

**例一.** 車流問題

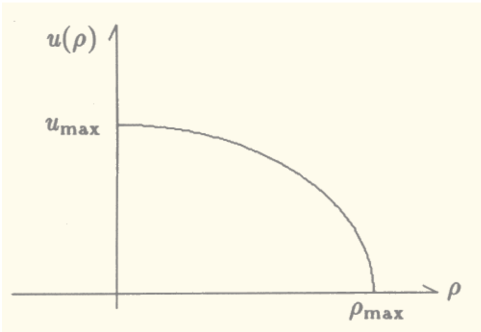
我們想要了解高速公路上車流在宏觀尺度下的變化過程。令$\triangle x$表宏觀下的小尺度, 比如宏觀下的標準尺度定爲5公里, 則$\triangle x$可定爲 200公尺。令$N(x,t)$表在$t$ 時刻在$(x-\triangle x, x+\triangle x)$區間內的車輛數。令$\rho = N/2\triangle$表車流密度,$u(x,t)$表在 $(x-\triangle x, x+\triangle x)$區間內的平均車速。由此可得通過一點 $x$的車流量爲$\rho(x,t)u(x,t)$。現在我們考慮在任意區間$(a,b)$內的車數變化, 此量爲$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)dx$。由「車數守恆律」可得此量等於通過端點 $a,b$ 的車流量之差。亦即

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)dx &= [-\rho u]_a^b \\ &= -\int_a^b (\rho u)_x dx。\end{aligned}$$

由於$(a,b)$ 爲任意區間, 因此我們導得

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0。$$

此式即爲「車數守恆律」方程式。又, 在高速公路上,$u$ 通常爲$\rho$的函數, 比如 $\rho$大時車速會減慢。因此一個模型爲$u=u(\rho)$如下圖所示:




圖一

(參考 [2])。此時, 車數守恆率可寫爲

$$\rho_t + f(\rho)_x = 0, \tag{1}$$

其中$f(\rho) = \rho \cdot u(\rho)$。這便是一個典型的單一守恆律方程式。

**例二 ・ 人潮問題**

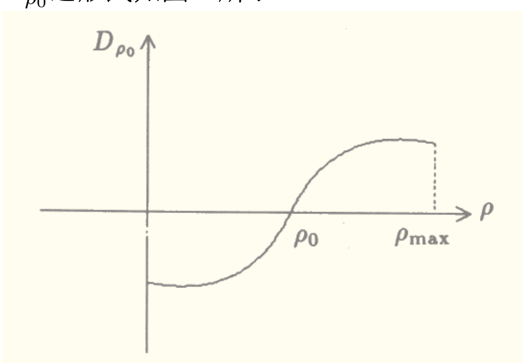
香港最近發生新年遊行人潮擠死人的意外事件, 引發我提出一個人潮流動的數學模型之想法。在二維空間裡, 令$\rho$表人潮密度,$\vec{u}$表人潮速度。引申上例可得「人數守恆律」爲

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \tag{2}$$

而$\vec{u}$與$\rho$的關係可由下式模擬:

$$\vec{u} = -D_{\rho_0}(\rho)\nabla\rho,$$

$D_{\rho_0}$之形式如圖二所示:




圖二

這裡,$\rho_0$爲一參數。當$\rho < \rho_0$時,$D_{\rho_0} < 0$表是人潮往密度高處聚集, 此用來模擬人潮在喜湊熱鬧之特質。而當$\rho > \rho_0$時, $D_{\rho_0} > 0$表示人潮太擁擠時有疏散之特徵。我們將 (3) 代入 (2) 得

$$\begin{aligned} \rho_t &= \nabla \cdot (B_{\rho_0}(\rho)\nabla\rho) \\ B_{\rho_0}(\rho) &= \rho D_{\rho_0}(\rho)。 \end{aligned} \tag{4}$$

我們稱之爲擴散-聚集 (diffusion-accumulation)方程式, 也是一種守恆律方程式。

**例三・ 洪水問題**

在河川或渠道裡, 通常垂直方向的流速較水平方向的流速小很多, 可忽略不計。又爲方便說明起見, 我們僅考慮一維的洪水問題。在這種情形下, 令$h$表水深、$u$表流速, 則水流通量爲$hu$。引用與例一相同之理由可得下列「質量守恆律」:

$$h_t + (hu)_x = 0。 \tag{5}$$

在洪水問題裡,$u$的變化需用動量守恆律來描述, 茲說明如下。考慮在任意區間$(a, b)$ 之水流的動量變化, 即$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho_0 u\, dx$, 其中$\rho_0$爲水的密度, 假設爲常數。動量守恆律爲: 水流動量的變化等於由端點所流入之動量流通量之差再加上端點所受之壓力差。動量流通量爲$(\rho_0 u)u$, 靜水壓爲$gh$,$g$爲重力加速度。因此, 動量守恆律可寫成

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_a^b \rho_0 u\, dx &= [-\rho_0 u^2 - gh]_a^b \\ &= -\int_a^b (\rho_0 u^2 + gh)_x\, dx。 \end{aligned}$$

由於$(a,b)$爲任意區間, 故得

$$(\rho_0 u)_t + (\rho_0 u^2 + gh)_x = 0。 \quad (6)$$

(5)(6) 式稱作一維的「淺水方程式」。如果河川不是水平, 設其傾斜角爲$\alpha$, 則河川受重力$\rho_0 g \tan \alpha$之影響。又, 河床有阻力, 而阻力的一個模型爲 $-C_f u^2$,$C_f$爲阻力係數。在此情況下, 動量守恆律應修正爲

$$\begin{aligned} & (\rho_0 u)_t + (\rho_0 u^2 + gh)_x \\ = \; & \rho_0\, g \, \tan \alpha - C_f u^2 \end{aligned} \quad (7)$$

(5) 和 (7) 即爲一維的洪水模型方程式。

**例四.** 空氣動力學

空氣的模型方程式可由質量、動量和能量守恆律導得。在一維時, 其方程爲

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0$$
$$(質量守恆律) \quad (8)$$
$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = (\mu u_x)_x$$
$$(動量守恆律) \quad (9)$$
$$\mathrm{E}_t + ((\mathrm{E}+p)u)_x = (\mu u u_x + \kappa T_x)_x$$
$$(能量守恆律) \quad (10)$$

這裡,$\rho$爲密度,$p$爲壓力,$u$爲速度,$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e$ 爲總能量,$e$爲內能,$T$爲溫度。$\mu$和$\kappa$均爲大於$0$ 之常數, 分別是黏性係數與導熱係數。其中熱力學之變數$\rho$,$p$,$e$,$T$要滿足兩個方程式: $p = p(\rho, e)$,$T = T(\rho, e)$, 稱作氣體的建構方程式。(8)–(10) 爲惰性氣體的方程式。

綜合上面的例子, 我們將一維守恆律方程組寫成下列一般型式:

$$u_t + f(u)_x + g(x,u) = (B(u)u_x)_x。 \quad (11)$$

其中,$u = (u_1, \ldots, u_n)^T$稱作守恆向量,$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$稱作流通向量,$g$稱作源向量或反應向量,$B$爲$n \times n$矩陣, 稱作黏性矩陣。我們又習稱 $f(u)_x$爲對流項,$g$爲反應項,$(B(u)u_x)_x$爲擴散項 (或黏性項)。

## 三. 簡單的理論

在 (11) 式中, 各項之機制概述如下: 對流項形成「非線性波」並刻畫其行進行爲; 黏性項磨光不連續解; 反應項有屬穩定化機制者, 如洪水問題裡的源項, 亦有屬不穩定化機制者, 如燃燒氣體裡的源項 [3]。茲以車流問題爲例, 簡述對流項的最簡單機制。

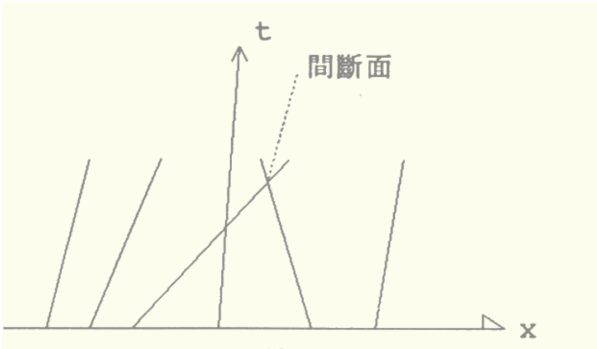
首先, 我們有下列之觀察:(1) 可寫成

$$(\frac{\partial}{\partial t} + a(\rho)\frac{\partial}{\partial x})\rho = 0,$$

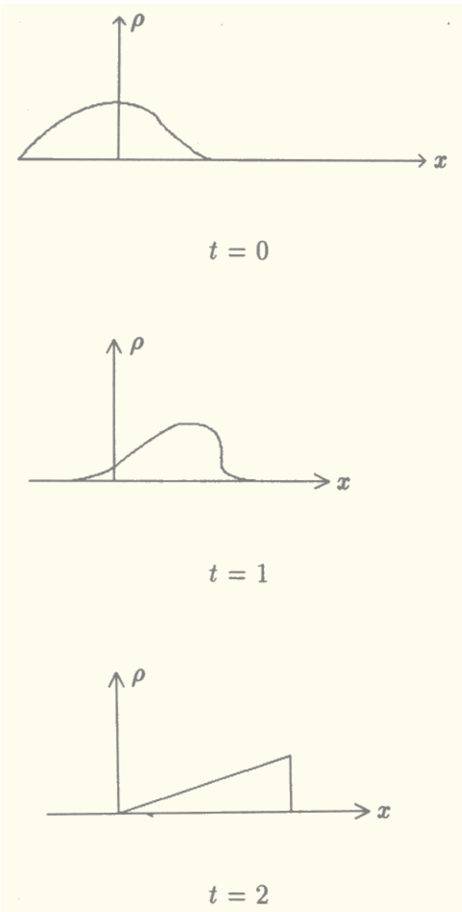
其中$a(\rho) = f'(\rho)$。此式意爲$\rho$沿曲線:$\frac{dx}{dt} = a(\rho)$ 不變, 亦即$\rho$在此曲線上爲常數, 故此曲線之斜率$a(\rho)$亦爲常數, 由此得此曲線必爲直線。我們稱這些線爲特徵線。由這個簡單的觀察, 我們可造解如下: 設 $\rho(x,0) = \rho_0(x)$爲給定之初始值。通過初始軸之任意點$(x_0, 0)$, 我們畫一斜率爲$a(\rho_0(x_0))$的直線。在此直線上, 定義解$\rho = \rho_0(x_0)$。此解亦可用下列隱函數型式表示:

$$\rho(x,t) = \rho_0(x - a(\rho)t)。 \quad (12)$$

如果$\rho_0$光滑時,(12) 是 (1) 在$t=0$附近的一個光滑解。值得注意的是當特徵線相交時 (如圖三所示),$\rho$的定義不唯一, 此時產生不連續解 (如圖四所示)。




圖三




圖四

我們習稱不連續處爲間斷面。而這些不連續解在物理學上是有意義的, 比如在車流問題中, 它反映的是塞車的情況。爲使方程 (1) 和初始條件$\rho(x,0)=\rho_0(x)$ 包含不連續解, 我們定義其弱解如下:

設$\rho$爲局部可積函數, 若對任意光滑且非零區爲緊緻集之檢定函數 $\varphi$,$\rho$均滿足

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho\varphi_t+f(\rho)\varphi_x\,dxdt+\int_{-\infty}^{\infty}\rho_0(x)\varphi(x,0)dx=0, \quad (13)$$

則我們稱$\rho$爲 (1) 的*弱解*。讀者很容易檢查光滑解仍適用弱解的定義。而對不連續的弱解, 由此定義可導得在間斷面:$x=x(t)$上,$\rho$需滿足下列跳躍條件:

$$\dot{x}[\rho]=[f(\rho)], \qquad (14)$$

其中$[u]\equiv u(x(t)+,t)-u(x(t)-,t)$,$u=\rho$或$f(\rho)$。爲了解弱解在間斷面發生後如何延續, 我們考慮下列最簡單且包含間斷面的初值條件:

$$\rho(x,0)=\begin{cases}\rho_{_L}, & x<0\\ \rho_{_R}, & x>0,\end{cases} \qquad (15)$$

其中$\rho_{_L}$,$\rho_{_R}$爲二常數。(1) 與 (15) 合稱 Riemann 問題。Riemann 問題的特點是 (1) 與 (15) 在$x\longmapsto\lambda x$,$t\longmapsto\lambda t$, $\forall\lambda$之變換下不變。因此我們可以求其自模解$\rho=\rho(\frac{x}{t})$。我們將此式代入 (1) 得

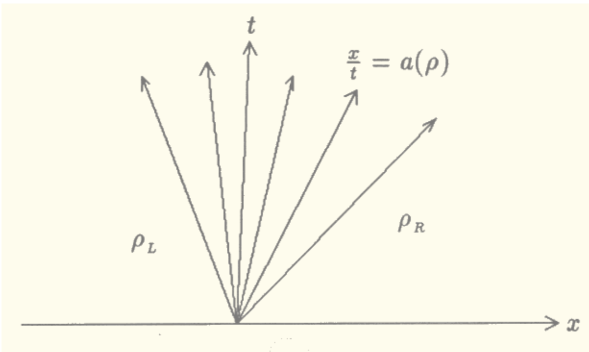
$$(a(\rho)-\frac{x}{t})\rho'=0。$$

因此, 在光滑區域裡, 如果$\rho'\neq0$則$a(\rho)=\frac{x}{t}$。現分兩種情形來造解:

**1.** $\rho_L > \rho_R$: 由$f$的圖形知在此情形下, $a(\rho_L) < a(\rho_R)$。由此, 我們造一解如下:

$$\rho(x,t)=\begin{cases}\rho_L, & x\le a(\rho_L)t\\ \rho, & a(\rho)=\frac{x}{t},\ a(\rho_L)<\frac{x}{t}<a(\rho_R)\\ \rho_R, & x\ge a(\rho_R)t\end{cases}$$

其特徵線如圖五所示:



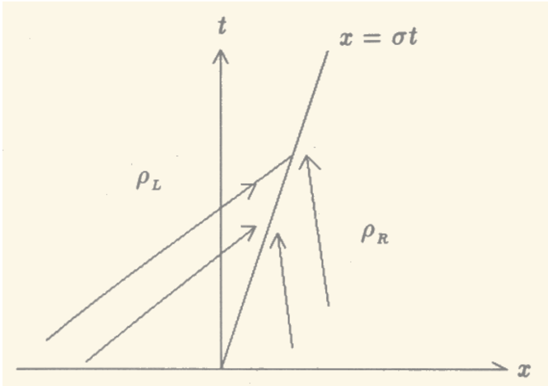

圖五

此解稱爲稀疏波(rarefaction wave), 反映的是過了收費站後車子逐漸稀疏的現象 。

**2.** $\rho_L < \rho_R$: 由(14), 我們造一不連續如下:

$$\begin{aligned}\rho(x,t) &= \begin{cases}\rho_L, & x<\sigma t\\ \rho_R, & x>\sigma t\end{cases}\\ \sigma &= \frac{f(\rho_R)-f(\rho_L)}{\rho_R-\rho_L}。\end{aligned}$$

圖示如下:



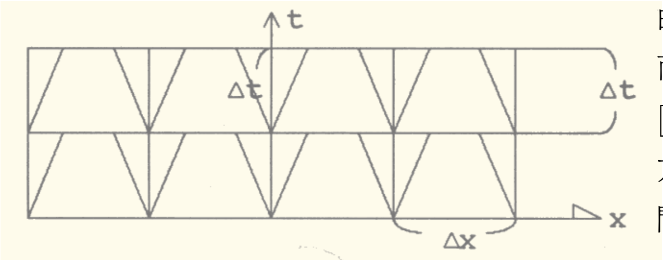

圖六

此解稱爲震波(shock wave), 反映的是收費站前的塞車的情況。這兩種波都是非線性波, 統稱爲基本波, 是由$f$的非線性所造成的。

基本波的重要性在於:(1) 它們容易被建構,(2) 它們 反映任意不連續解在間斷面附近的短時間行爲,(3) 它們也反映了一般解的長時間行爲。基於這幾點, 它們可被用來建構一般初始值的逼近解。茲舉一種建構方法如下: 我們以$\triangle x$,$\triangle t$將 $x$-$t$平面劃分成網格狀。假定逼近解$u_{\triangle x}$在$n\triangle t$前已被定義, 我們定義其在$(n\triangle t,(n+1)\triangle t)$區域內之值如下:(1) 在每一區段$(j\triangle x,(j+1)\triangle x)$裡, 令

$$\begin{aligned}& u_{\triangle x}(x,n\triangle t+)\\ =\ & \frac{1}{\triangle x}\int_{j\triangle x}^{(j+1)\triangle x} u_{\triangle x}(x,n\triangle t-)\,dx。\end{aligned}$$

(2) 由於$u_{\triangle x}(\cdot,n\triangle t+)$爲片片常數函數, 其對應的解在一小段時區裡恰爲一序列 Riemann 問題的解。我們取$\triangle t$ 使得由$n\triangle t$發出之基本波到$(n+1)\triangle t$時仍未交會 (見圖七)。




圖七

對單一守恆律方程式, 可證明 當$\triangle x \rightarrow 0$時$u_{\triangle x}$會收斂 到一弱解。

## 四. 結語

守恆律方程組所牽涉的物理現象十分豐富, 是一個有旺盛生命的領域。進入這個領域最便捷的方法是請教這方面的專家。史丹福大學的劉太平教授是這個領域的權威人士。參考書方面可讀 Smoller 書 [1]之第三部分, 由此學習基本知識和知道那些問題已被解決。而 Whitham[2]和 Courant and Friedrichs [3] 的書則提供了許多值得嚐試的問題。計算方面的東西可參考 Leveque 的書[4]。嚐試做問題和問人是進入這個領域最有效率的方法。

## 參考書目

1. J. Smoller, Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, Springer - Verlag, 1983.
2. Whitham, Linear and Nonlinear Waves.
3. Courant and Friedrichs, Supersonic Flow and Shock Waves, Springer-Verlag, 1948.
4. Leveque, Numerical Methods for Conservation Laws, Birkhäuser, 1990.

—本文作者任教於臺灣大學數學系—