反幻方定理

梁培基、邱荷生

一、 幻方與反幻方

若把n^2個連續自然數$1, 2, \cdots, n^2$, 按照某種規則排成一個n階方陣, 使得每行、每列及兩條對角線上n個元素之和都相等, 則稱這個方陣爲幻方。圖1是一個3階和幻方。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

圖1

對於任意的$n \geq 3$, 都可構造出n階幻方, 而且有很多種構造方法。

若把n^2個連續自然數$1, 2, \cdots, n^2$, 按照某種規則排成一個n階方陣, 使得每行、每列及兩條對角線上n個元素之和都不相等, 則稱這個方陣爲反幻方。

當$n \geq 3$的奇數時, 馬丁·加德納 (Martin Cardner) 給出一個構造反幻方的方法[1], 圖2是他構造的3階與5階反幻方。

1	$\to$	2	$\to$	3
				$\downarrow$
8	$\to$	9		4
$\uparrow$				$\downarrow$
7	$\leftarrow$	6	$\leftarrow$	5

1	2	3	4	5
16	17	18	19	6
15	24	25	20	7
14	23	22	21	8
13	12	11	10	9

圖2

二、 反幻方的構造

我們給出一個方法, 對於任意$n \geq 3$階的反幻方, 都可以構造出來, 圖3是$n = 3, 4, 5$ 階的反幻方。

1	2	7
3	4	8
5	6	9

1	2	3	13
4	5	6	14
7	8	9	15
10	11	12	16

1	2	3	4	21
5	6	7	8	22
9	10	11	12	23
13	14	15	16	24
17	18	19	20	25

圖3

這種構造方法可用下述定理來說明。

定理: 若$n(n \geq 3)$階方陣爲$A = [a_{ij}]$

$$a_{ij} = \begin{cases} (i-1)(n-1)+j & i = 1, \cdots, n, \\ & j = 1, \cdots, n-1 \\ n(n-1)+i & i = 1, \cdots, n, \\ & j = n \end{cases}$$

則A是一個n階反幻方。

證: A的各列元素之和爲:

$$\begin{aligned} a_i &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \\ &= \frac{3}{2}(n-1)n+(i-1)(n-1)^2+i, \\ &\qquad i=1,\cdots,n \text{ 。} \end{aligned}$$

A各行元素之和爲:

$$\begin{aligned} b_j &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \\ &= n_j+\frac{1}{2}(n-1)n(n+1)-n(n-1), \\ &\qquad j=1,\cdots,n-1\text{。} \\ b_n &= n^2(n-1)+\frac{1}{2}n(n+1)\text{。} \end{aligned}$$

A的左對角線上元素之和爲:

$$c=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}=\frac{1}{2}n^2(n-1)+2n-1\text{。}$$

A的右對角線上元素之和爲:

$$\begin{aligned} d &= a_{1,n}+a_{2,n-1}+a_{3,n-2}+\ldots+a_{n,1} \\ &= [n(n-1)+1]+[a_{21}+(n-2)] \\ &+ [a_{31}+(n-3)]+\cdots+[a_{n-1,1}+1]+a_{n1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i1}+\frac{1}{2}(n-2)(n-1)+n(n-1)+1 \\ &= (n-1)(\frac{n^2-n+2}{2})+\frac{1}{2}(n-2)(n-1) \\ &+ n(n-1)+1 \\ &= \frac{1}{2}n^2(n-1)+n(n-1)+1\text{。} \end{aligned}$$

顯然,b_n大於任何其它n個元素之和, 以及$a_i < a_{i+1}$, $b_j < b_{j+1}$。因此, 要證明A是反幻方, 只須證明:

(一) $a_i \neq b_j$ $i=1,\cdots,n$, $j=1,\cdots,n-1$。

(二) $c\neq d$。

(三) $c\neq a_i$, $i=1,\cdots,n$。

(四) $c\neq b_j$, $j=1,\cdots,n-1$。

(五) $d\neq a_i$, $i=1,\cdots,n$。

(六) $d\neq b_j$, $j=1,\cdots,n-1$。

假若$a_i=b_j$, 即

$$\begin{aligned} &\frac{3}{2}n(n-1)+(i-1)(n^2-2n)+2i-1 \\ =\ & nj+\frac{1}{2}(n-1)n(n+1)-n(n-1)\text{。} \end{aligned}$$

必有 $n|(2i-1)$。因 $0<2i-1<2n$,這只有 $2i-1=n$。先以$2i-1=n$代入上式, 並以n除上式後可得

$$\begin{aligned} &\frac{5}{2}(n-1)+(i-1)(n-2)+1 \\ =\ & j+\frac{1}{2}(n-1)(n+1)\text{。} \end{aligned}$$

再以$n=2i-1$代入上式後可得

$$5(i-1)+(i-1)(2i-3)+1=j+(i-1)2i\text{。}$$

由此可得 $(i-1)|(j-1)$, 即 $j-1=k(i-1)$。代入上式, 並以$i-1$除上式後可得

$$5+2i-3=k+2i\text{。}$$

由此可得$k=2$, 即$j=2i-1=n$。矛盾。若$i=1$, 則有$n=1$。也矛盾。故 (一) 是對的。

假若$c=d$, 即

$$\frac{1}{2}n^2(n-1)+2n-1=\frac{1}{2}n^2(n-1)+n(n-1)+1,$$

即 $n|2$。

這也是矛盾的, 故 (二) 也是對的。

假若$c = a_i$,$i = 1, \cdots, n$。即

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(n-1)n^2 + 2n - 1 \\ = & \frac{3}{2}(n-1)n + (i-1)(n-1)^2 + i。\end{aligned}$$

這必有$(n-1)|2(i-n)$。即或者$(n-1)|2$, 或者$(n-1)|(i-n)$。

若$(n-1)|2$, 則有$n = 3, i = \frac{9}{5}$。矛盾。

若$(n-1)|(i-n)$。即或者$i = 1$, 或者$i = n$。

若$i = 1$, 則有$\frac{1}{2}n^2 + 2 = \frac{3}{2}n$, 即$n|4$。令$n = 4$, 則得$10 = 6$, 矛盾。

若$i = n$, 則有

$$\frac{1}{2}n^2 + 1 = \frac{3}{2}n(n-1)^2。$$

即$n = 1$。這也是矛盾的。故 (三) 也是對的。

假若$c = b_j$,$j = 1, \cdots, n-1$。即

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(n-1)n^2 + 2n - 1 \\ = & nj + \frac{1}{2}(n-1)n(n+1) - n(n-1)。\end{aligned}$$

這樣必有$n|2$。這是矛盾的。故 (四) 是對的。

假若$d = a_i$,$i = 1, \cdots, n$, 即

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}n^2(n-1) + n(n-1) + 1 \\ = & \frac{3}{2}(n-1)n + (i-1)(n-1)^2 + i。\end{aligned}$$

此時必有$(n-1)|2(i-1)$, 即$(n-1)|2$ 或$(n-1)|(i-1)$。

若$(n-1)|2$, 則有$n = 3, i = \frac{11}{5}$。矛盾。

若$(n-1)|(i-1)$, 即或者$i = 1$, 或者$i = n$。

若$i = 1$, 則得$n^2(n-1) = n(n-1)$。

這只有$n = 0$ 或 1。矛盾。

若$i = n$, 則得

$$\frac{1}{2}n^2 + n = \frac{3}{2}n + (n-1)^2 + 1,$$

即$n^2 - 3n + 4 = 0$, 也矛盾。故 (五) 是對的。

假若$d = b_j$,$j = 1, \cdots, n-1$。即

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}n^2(n-1) + n(n-1) + 1 \\ = & nj + \frac{1}{2}(n-1)n(n+1) - n(n-1) \end{aligned}$$

即$n|2$。矛盾。故 (六) 是對的。(定理證完)

推論: 在上述定理的$A = [a_{ij}]$中

$$\begin{aligned} & a_{ii} + a_{(n-i+1)(n-i+1)} = a_{i(n-i+1)} + a_{(n-i+1)i} \\ & \quad (i, j = 2, \cdots, n-1) \end{aligned}$$

證明:

$$\begin{aligned} & a_{ii} + a_{(n-i+1)(n-i+1)} \\ = & (i-1)(n-1) + i + (n-i+1-1)(n-1) \\ & + n - i + 1 \\ = & (i-1)(n-1) + (n-i)(n-1) + n + 1 \\ = & (n-1)^2 + (n+1), \\ & a_{i(n-i+1)} + a_{(n-i+1)i} \\ = & (i-1)(n-1) + n - i + 1 + (n-i+1-1) \\ & (n-1) + i \\ = & (n-1)^2 + (n+1) \qquad \text{(證完)} \end{aligned}$$

三、 反幻方的變換排列

我們對反幻方$A = [a_{ij}]$實施轉置變換及鏡像反射變換, 變換後的方陣仍然是反幻方。因此, 我們有

引理1・如果$A=[a_{ij}]_{n\times n}$是反幻方, 那麼

$$\begin{aligned} B &= [b_{ij}] = [a_{j,n+1-i}] \\ C &= [c_{ij}] = [a_{n+1-i,n+1-j}] \\ D &= [d_{ij}] = [a_{n+1-j,i}] \\ E &= [e_{ij}] = [a_{ji}] \\ F &= [f_{ij}] = [a_{n+1-i,j}] \\ G &= [g_{ij}] = [a_{i,n+1-j}] \\ H &= [h_{ij}] = [a_{i+k,j+k}] \\ & \text{其中 } k=(n+1)-(i+j) \end{aligned}$$

也都是反幻方。

證明: 顯然。

還可對本文所構造之反幻方$A = [a_{ij}]$的行 (列) 作對換, 而得到反幻方。我們有

引理2・對換反幻方$A=[a_{ij}]$的對稱行 (列), 得到的方陣仍然是反幻方。

證明: 由推論可得引理2成立。

參考文獻

[1] 白羊, 反幻方, 科學畫報,1987年2期。

—本文作者分別任職於河南省封邱縣科協與河南省數學學會—