

1992 年加拿大數學競賽試題

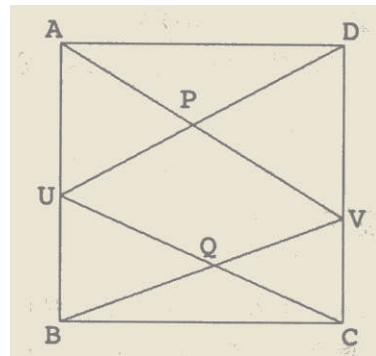
王子俠譯

1. 試證 $1 \times 2 \times \dots \times n$ 能被 $1 + 2 + \dots + n$ 整除之充分且必要條件為: $n + 1$ 不為奇質數。
2. 設 x, y, z 為非負實數。試證不等式

$$x(x - z)^2 + y(y - z)^2 \geq (x - z)(y - z)(x + y - z)$$

並決定出等號成立的情形。

3. 在附圖中, $ABCD$ 為一正方形。 U 及 V 分別表在邊 AB 及 CD 上之任意內點。試決定出所有 U 及 V 的位置, 使得四邊形 $PUQV$ 之面積為最大。



4. 試解方程式 $x^2 + \frac{x^2}{(x + 1)^2} = 3$ 。
5. 假定一副牌由一張百搭 (Joker) 及其他 $2n$ 張牌組成, 而對 $1, 2, \dots, n$ 中之每一個數 k 均有兩張牌的號碼是 k 。今欲將此 $2n + 1$ 張牌排成一列, 滿足下述條件: 百搭在當中, 而對任意整數 k ($1 \leq k \leq n$), 在兩張號碼為 k 的牌中間恰好有 $k - 1$ 張牌。
 - (a) 試求出所有使這種排列可能之 n ($n \leq 10$) 之值。
 - (b) 對那些 n 之值所求之排列為不可能?

—本文譯者任教於加拿大滑鐵盧之 Wilfrid Laurier 大學並為加拿大數學競賽委員會之會員—