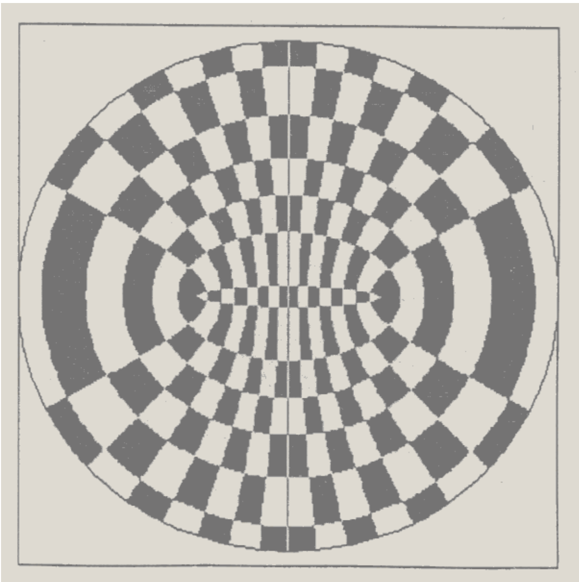
# 計算橢圓積分

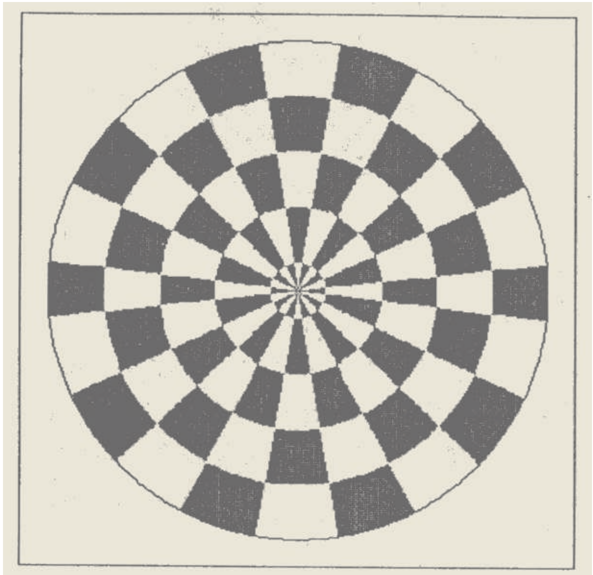
平斯

形形色色的曲線裡,截錐曲線 (conic section) 是學解析幾何時最先遭遇到的。它們不外是把兩個焦點固定之後, 取距離之和或差爲定值的軌跡, 形成橢圓和雙曲線,(見圖一)

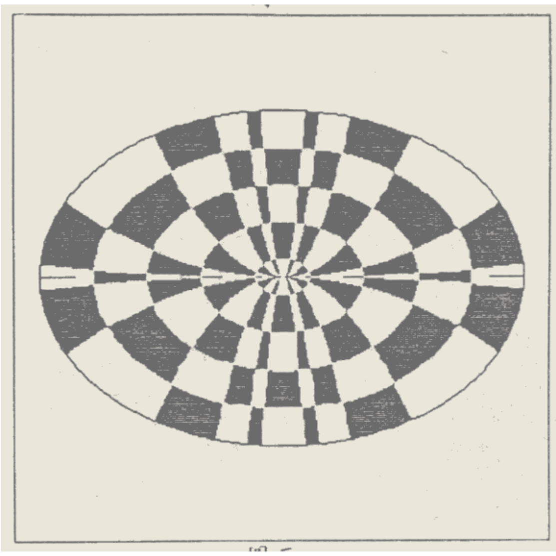


圖一

或者把兩個焦點重疊起來, 退化成圓和直線,(見圖二) 再利用這些線組都是垂直相交的原理, 得到拋物線作爲橢圓的垂直軌跡 (Orthogonal Trajectory)(見圖三)。希臘古典幾何的重要成果之一, 就是阿波龍 (Apollonius) 有系統的研究這些曲線。而榮耀歸於眞主,



圖二

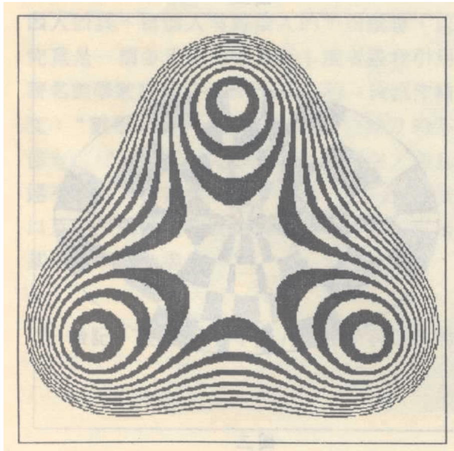


圖三

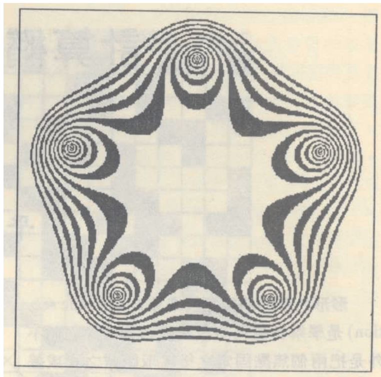
被阿拉伯人留傳了下來。截錐曲線這個家族還有一些近親, 比方把焦點增加成三個, 就成了弧三角形 (見圖四)。

圖四

這樣的曲線十分類似德國工程師 F. Wenkel 設計的輪轉引擎。還有一些遠親, 比方把和差換成乘積, 則有卡西尼的卵形線(Ovals of Cassini), 以平面上複數坐標來表示, 這些線普遍可以表示成 $|z^n - 1| = C$。(見圖五)



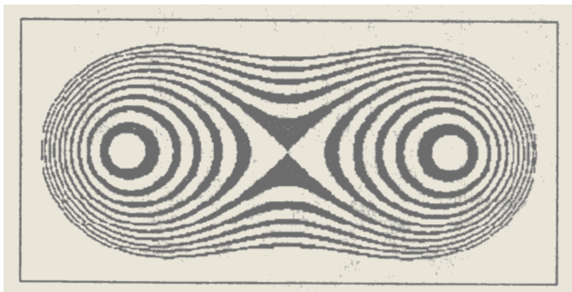
$n = 3$



$n = 5$

圖五

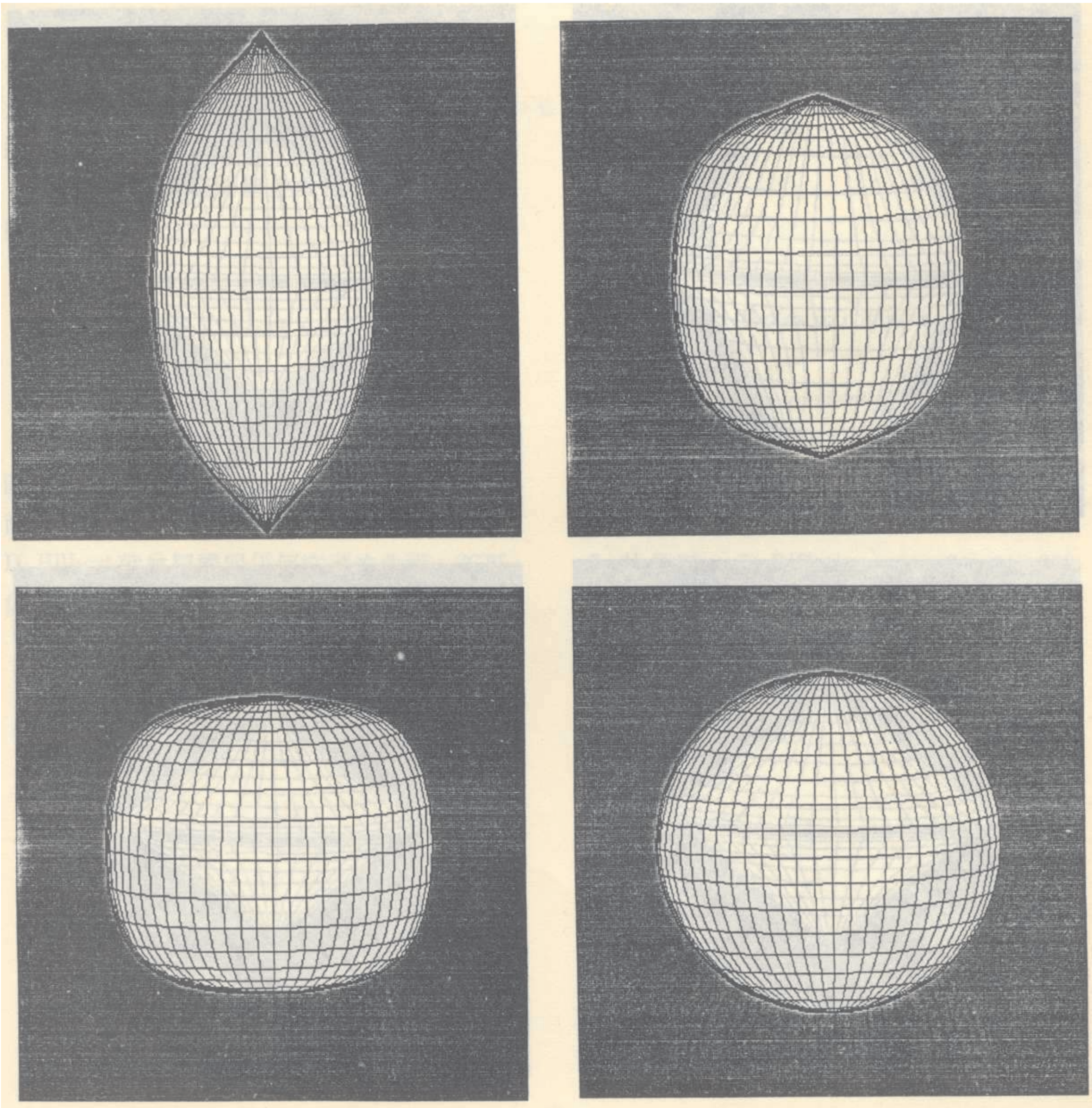
卵形線個個風流蘊藉, 玲瓏有致。其中翹楚, 尤爲綺麗的是$n = 2$ 時, 特別又稱爲白努力雙扭線(Lemniscate of Bernoulli)(見圖六)



圖六

雙扭線和橢圓, 親上加親的緣故是計算

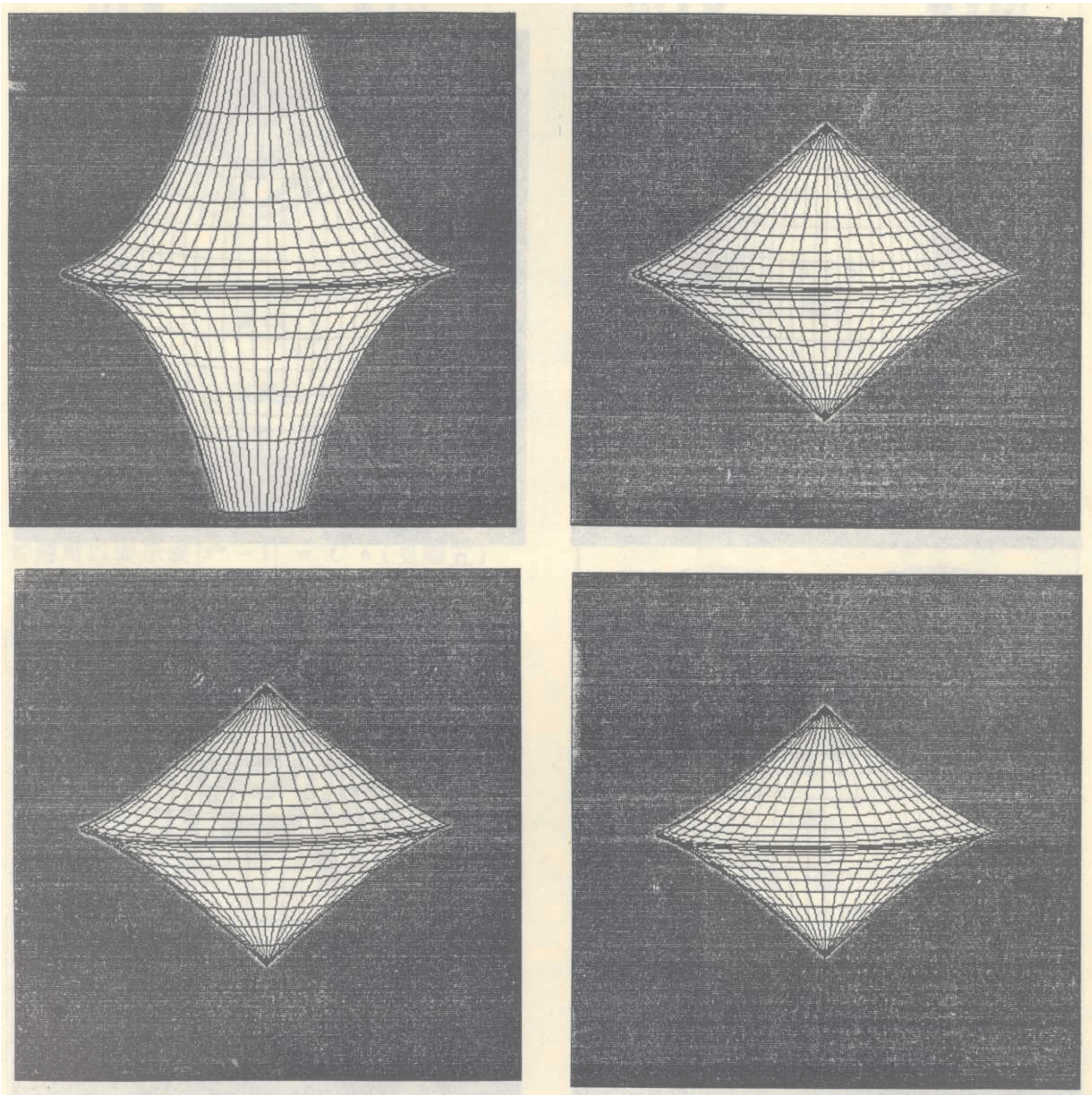
它們長度的積分, 十分類似。法國人列讓德 (A. Legendre) 把它們分類成兩種: 雙扭線積分 $F(u,k)=\int_0^u(1-k^2\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta$ 和橢圓積分 $E(u,k)=\int_0^u(1-k^2\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta$。這樣不起眼的積分 ,實在令那些課堂上張牙舞爪, 考試時流血漂杵的微積分老師漏氣。這也難怪, 翻開歷史, 多少人花了畢生精力, 都參它不透, 即使像上述列讓德這樣的口徑, 從 1786 開始, 就格物了四十年。這方面的知識, 點點滴滴, 纍積起來也相當可觀。最早是意大利的法南諾公爵 Count Fagnano 在 1718 發現雙紐線積分, 有個倍角公式 $2F(u,k)=F(w,k)$,$\omega=2u\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}/(1-k^2u^4)$ 這情況和正弦反函數完全一致。卅年後, 歐拉 L. Euler 進一步得到複角公式, 並且推廣到其他的橢圓積分。然而眞正的貢獻, 應該歸於兩個彼此激烈競爭的人: 一個是落魄江湖的早逝青年亞培 N. Abel, 另一個是出口刻薄的富家子弟雅各比 C. Jacobi。前者高瞻遠矚, 後者推演精練, 兩人眞是一時瑜亮, 聯手把橢圓函數論炒的火熱。不料鷸蚌相爭, 漁翁得利, 老謀深算的高斯 C. Gauss 也沒有閒著, 他不著聲色的建立模函數, 奠定了代數幾何超越論的基礎。



圖七

俱往矣, 可惜這些輝煌的理論, 並不能用來計算橢圓積分, 最後終得依靠數值方法。計算的工具, 希望機器要大、要快。事實上, 硬體的發展有一定的局限, 只好在設計軟體的時候, 力求精妙。有這樣的需求, 古典的理論才重新被發掘出來。近來美國人卡森 B. Carlson 利用倍角公式, 設計了橢圓積分巧妙的計算方法。這是古爲今用, 最典型的例子。我們接下來, 就要借這些算法來描繪曲面。

球面對每一個方向都對稱, 是最完美的旋轉面, 當然是常曲率。但是具有常曲率的旋轉面不必然是球面。這種曲面的產生曲線可用橢圓積分來表示



圖八

$$
\begin{aligned}
& X_k(u,v) \\
= \quad & (k\cos u\cos\frac{v}{k}, k\cos u\sin\frac{v}{k}, E(u,k))
\end{aligned}
$$

把$k$視爲連續改變的參數, 則上式表示球面一系列的扭變, 彷彿把籃球剖開之後再捲成橄欖球的過程。(見圖七)

既然是捲的, 自然就有重疊, 因此這些曲面是浸入而不是嵌入。接下來, 馬上就會有疑惑: 如果剖開球面一道口之後, 浸入的球面可以連續的扭變, 那麼只是鑿了少許幾個洞呢? 伍鴻熙在1970解答了這個問題: 凡是凸的曲面, 例如球面, 剔了幾個點之後, 還是剛性的, 不能扭變。

把上述式子裡的產生曲線, 用超三角函

數改寫

$$\begin{aligned} & Y_k(u,v) \\ = \ & (k\cosh u\cos\frac{v}{k}, k\cosh u\sin\frac{v}{k}, G(u,k)), \end{aligned}$$

$$G(u,k) \ = \ \int_0^u \sqrt{1-k^2\sin\mathrm{h}^2\theta}\ d\theta$$

圖八是一系列曲率爲 $-1$ 的旋轉面。當然這些面都有稜邊, 或奇點。因爲早在1901希伯特 D. Hilbert 就曾經證明任何完備的曲面, 不可能完全浸在三維歐氏空間裡, 還仍有負的常曲率。這種把曲面浸入的現象, 基本上是偏微分方程式, 解的存在性問題。像上述的各式曲面 ,不僅能浸入, 還能扭變, 用偏微方的行話來說, 就是解不是唯一, 那是常曲率的特殊情況。一般曲面來說, 即使是局部解, 也很難找, 尤其是當曲率正負變號的時候。林長壽1983 的博士論文, 精闢的解答這個問題, 同時也打開了一片新天地, 陸陸續續才有中村, 天野等人的後來發展。不論如何, 這些解要寫出來一定非常複雜, 絕不像上述的曲面, 可以用雖然不簡單, 但是很清爽的橢圓函數表示出來。

## 參考資料


1. C. Siegal: *Topics in complex function theory.*
2. F. Klein: *Development of Mathematics in the 19th century.*
3. B. Carlson: *Numer Math.* 33, 1-16(1979).
4. 伍鴻熙:*Ann. of Math.*, 95, 1-20 (1970).
5. 林長壽:*J. Diff Geometry*, 21, 213-230 (1985).