

# 絕妙的數學家 (六)

矢野健太郎著

顏一清譯

## 十一 菅原正夫(Sugahara Masao,1902-1970)

簡介：菅原正夫是一位 Complex Multiplication 的研究者。他歷任東京文理科大學教授，東京大學教養學院教授以及東京大學理學院教授。

他的兄長菅原健是我在東京高等學校時的化學老師，後來成為名古屋大學教授。他是 UNESCO (聯合國教育科學及文化組織) 的委員，經常出差歐洲，我在歐洲幾次遇到他。

正夫教授對俗事一切不關心，是我很喜愛的數學家之一。

### 1. 答案紙上的塗鴉

東京大學教養學院的入學考試常常因考生太多，單憑教養學院的教授改卷嫌人手不足，慣例上要從理學院這邊調幾個人去幫忙。有一年我也在理學院去應急改入學考試試卷的教授之列。

考生的答卷上並不盡然寫考試問題的答案。當然答得出問題的人會把答案寫在答卷上，評分者就看答案是否正確。

但是解不出問題的學生不會就此交白卷，常常在卷子上塗鴉，最簡單的例子是寫：

「很遺憾!明年再來，請多多關照!」

但有時候會囉囉嗦嗦寫一些跟問題無關的事。

我關在一間辦公室幫忙改卷子時，當時在當教養學院教授的菅原教授進來，給我看一份考卷，他說：

「又有一張塗得烏七八黑的卷子，我一點都不知道他在寫些甚麼。矢野君，你看得懂他寫的事兒嗎?」

我一看考卷，那不是文章，而是某一種表。我往表仔細一看，連不是推理小說迷的我多少也看懂下列的目次：

愛倫·坡「莫爾街的殺人事件」

愛倫·坡「黃金蟲」

可南·道以爾「夏洛克·福爾摩斯的冒險」

可南·道以爾「有斑紋的繩子」

可南·道以爾「巴斯曷維爾府的狗」

S·S·范·待恩「格林府的殺人事件」

S·S·范·待恩「主教殺人事件」

亞加沙·克里斯蒂「誰都不在了」

亞加沙·克里斯蒂「斯泰爾莊的怪事件」

亞加沙·克里斯蒂「阿區魯以特殺人事件」

亞加沙·克里斯蒂「東方快車殺人事件」

亞加沙·克里斯蒂「A B C 殺人事件」

亞加沙·克里斯蒂「死於尼羅河」

莫利斯·路布蘭「奇岩城」

莫利斯·路布蘭「813」

我就半猜地說：「寫在這裡的全是外國推理小說家的作品。寫這份卷子的孩子一定是個推理小說迷，解不出問題來，只好列出在浪人生活中唸過的推理小說來殺時間。」

這麼一說，這位老實的菅原教授信以為真欽佩地說：

「噢！那麼矢野君也都讀了這一些推理小說囉。」就出去了。

老實說，我不怎麼懂得推理小說，尤其是外國人寫的。上列的幾個作品我以前可能唸過，現在可記不起來。因為這樣，我隨便說的應景話讓老實人菅原教授照單全收，還一副很佩服的樣子，這才走開，害得我覺得對他做了壞事，很不自在。

## 2. P T A 很囉嗦

有一次東京大學教養學院的同事 H 對我說：「這所大學最近的 P T A (家長會) 很囉嗦。」我不清楚大學裡到底有沒有 P T A，想問個究竟，就說：「那到底是什麼意思？」

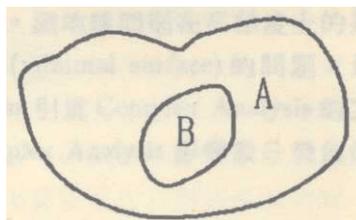
據他講，菅原正夫的兒子考進教養學院來，透過他，至少那一位數學老師講課怎樣，菅原教授都一清二楚，所以不得不小心。比如菅原教授說過：「真糟喔，有些老師沒有給『面積』好好下定義就開始用這個詞兒。」

聽到這，我覺得菅原教授抱怨是不對的。大學的教養學院也修微積分，但是教授法不

是以嚴密組織微積分的態度（對大學數學系就不是這樣）來教，而是訴之於直觀概念，介紹給學生微積分是怎樣的一門學問，處理那些事，有那些應用等概念便是。

「面積」這個名詞從小學開始便使用，我們在直觀上十分了解它的意義，在這前提之下我們才進行討論的。

例如下圖中圖形 B 完全含在圖形 A 中，則我們說 A 的面積比 B 的面積大，在直覺上我們認為這是對的，再進行討論。這種微積分美國人叫做 intuitive calculus。



但是對尊重嚴密性的數學家來說，我們從小學就毫不在乎地使用「面積」這個名詞，事實上應該弄清楚「圖形的面積」是什麼再使用。像 A 面積大於 B 面積也該以面積的定義來證明的。

在大學的教養學院教的是直觀微積分，這對純數學家菅原教授來說，要依賴直觀這種事令他不能忍受。

## 3. 張開眼睛睡覺的方法

大學每一部門大概都會是這樣吧：學生一到了最高的第四年就定出自己較專長的比較細的科目，針對著這門專長科目找出適當的老師好好做一年的畢業研究。比如我熟知的數學系裡，四年級的學生定出數學中較細的專門課程，像群論、函數論或是微分幾何學

等，然後跟隨各科目專長的師長，他們會聚在一起開討論會。

在數學方面來說，學生會跟教授商量，選出適當的論文或書（一般說來，都是外文的），閱讀後在老師面前說明，討論會便以這種形式進行。當然跟隨同一位老師的同學們也都要出席這個會。

如果學生選擇的是新的論文，老師會覺得好像跟學生一起在唸這篇論文，聽學生的說明，也就不會累。但是如果學生挑的是非常有名的書，老師對書的內容已經很熟習，聽學生的說明會多少無聊，在夏日炎炎的下午，老師會不知不覺愛暈起來。

這是菅原正夫當東京大學數學系教授不久後的事，他跑來我的辦公室，說：「矢野君，我聽說這數學系裡有老師會張開著眼睛睡覺的特技，能不能告訴我到底是誰，我好去請教他？」

我從來沒有聽說過這回事，所以那一次無法幫他任何忙。

## 十二 遠山啓 (Tōyama Hiraku, 1909-1979)

**簡介：**遠山啓曾任東京工業大學教授，後為該校榮譽教授。他的專長是代數學。他在學術方面的評價頗高。不過他也以導入嶄新的「水管式教學法」為數學教育改革上盡了力而被大家所熟知。

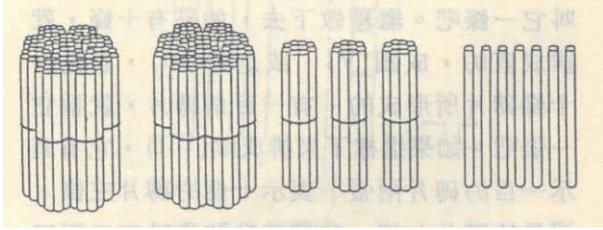
### 1. 水管式教學法

以這本書的目的來說，詳細講解「水管式教學法」是不妥的。不過我至少介紹一下它特性之一的“使用磁磚 (tile)” 思考法吧。

算術中最重要的事項之一是，我們要讓孩童完全了解我們計算數字用的是十進法，而表達數字用的是定位數的原理。也就是說，用十進法又定位的方式是這樣的組合，使得我們能以 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 十個數字來表達任何自然數。比如，我們要讓孩童曉得寫 237 表示的是二百三十七，而寫 506 表示的是五百零六這回事。為做好它，從古時候人們都已經下過種種工夫了。就中我認為最常用到的是使用計算棒的方法。

所謂的計算棒是跟火柴棒差不多一樣粗細而稍長的棒棒，如果像火柴棒那樣沒顏色就太沒趣了，所以著有各種顏色。

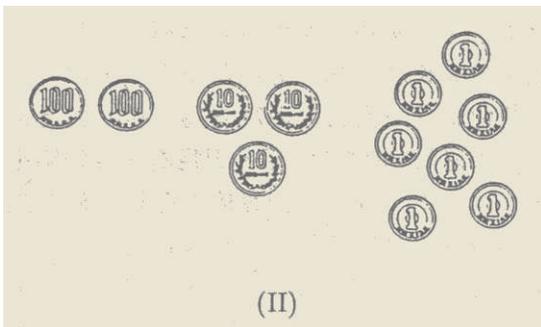
就先讓孩子們數棒棒，算十枝束成一把叫成十。如果還有多餘的計算棒，再數，能數到十又束成一把。這樣繼續下去，假使有十把便綁成一大束，而叫它為一百。如此這般，而結果如圖 (I) 的話，因為有一百的兩網，十的三把，分散的計算棒有七枝，便教孩子們這裡有兩百三十七枝計算棒。而寫成 237。即最右邊的 7 表示零散的計算棒有七枝，右二的 3 表示十枝的有三把，右三的 2 字表示一百枝的有兩網。這就是定位原理的數字表示法。當然也該教孩童如果沒有零星的計算棒，它的位置上要寫 0，十枝的一把也沒有，它的位置也該寫上 0。



(I)

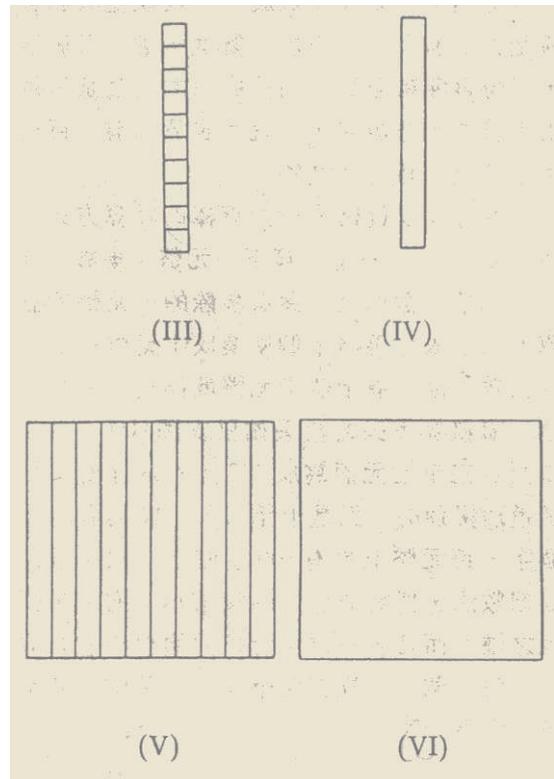
這種由計算棒完成的十進位教學法好像很有道理。如果要找瑕疵，十枝成把的計算棒是否確有十枝，不能一看就知道，要確信，還得拆開來重算，何況成百的一捆是不是由十枝的十把組成，也就是說真的有一百枝呢？這也很難說清楚的。

也有人以貨幣代替計算棒的計算方式。即一元、二元... 這樣算下一元幣，集攏十個以十元幣一個取代，還有多餘的一元幣的話繼續數下去，再有十個便換成十元幣一個。這樣做下來，有十個十元幣就換為百元幣一個、繼續算下去的結果如果成圖 (II)，就說有兩百三十七元而寫成 237 元。這樣看來好像道理蠻通的，但是十元幣上已經寫有 10 這個字，百元幣上也有 100 這個字，為了教進位記數法，把寫有金額的貨幣用上有本末倒置之嫌；而且看一枚十元幣要領會出它含有一元幣十個，一枚百元幣含有十元幣十個是不太容易的事。



(II)

爲了要除掉上述至今有的教學用具上的缺點，而想出來的便是數磁磚。這兒所說的磁磚是建築上使用的小正方形磚塊。收集它們十塊排成直的一條便成圖 (III)，也可以表示成圖 (IV)，它是由十個磚片排列成的，就叫它一條吧。繼續做下去，如果有十條，就排成直的，成圖 (V)，或是圖 (VI)，它是由十條磚片所形成的，有一百個磚片，就稱它一張吧。如果這樣下來排成圖 (VII)，它有表示一百的磚片兩張，表示十個的磚片三條，零星的磚片七塊，我們就教孩童叫它二百三十七而寫成 237。

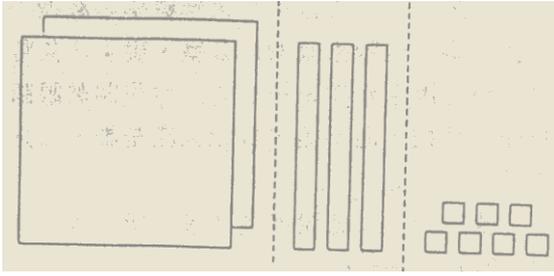


(III)

(IV)

(V)

(VI)



(VII)

這種方法沒有用計算棒或是用貨幣計數的缺點，也就是說，不會一看沒法弄清楚到底各自的集合表示多少。在這兒清清楚楚地有一百的兩張，十的三條，散開的有七片，非常方便。

以上是利用磁磚，把十進法的組合跟定位的原理讓孩童用數數字來了解的一例。用磁磚做加法，如  $237 + 578$ ；或是減法，如  $465 - 187$  的運算都可以很自然地讓孩子們懂得個中道理。

我初聞這種方法覺得真好！可惜孩童們常常還用小手來盤算，往往欠缺能夠讓他們了解十進法和定位原理的教學工具。

## 2. 討厭和尚連袈裟也憎 (譯註：日本俗語，有趣，所以直譯出來，意同「憎屋及烏」)

大概是昭和三十五年 (1960年) 間的事吧，遠山啓注意到小學算術教學上的一些缺點，於是修改這些，提倡被稱為「現代水管方法」的新方法。也結成研究它的團體「數學教育協議會」，致力於推行水管方法的研究。但是他的思想左傾，我聽說日本自民黨有「不受歡迎人物」的黑名單，他的名字就在裡面。在這兒，是不是可以套上「討厭和尚連袈裟也憎」這句俗語呢，當時的文部省以「超出學習

指導要領的範圍」而硬不承認這種由「水管式方法」的指導方式。

但是依據一九八二年七月二十七日的朝日新聞的刊載，教師們在教室裡用「水管式方法」做指導實驗的結果功效昭彰的事逐漸廣泛地被承認。於是現今的文部省在它的「學習指導要領」也納入「水管式指導法」，因此上面所說的用磁磚數數字等也出現在文部省檢定過的教科書裡面了。

就我所知道的範圍內，在補習班裡也出現採用「水管方法」，而稍為改良磁磚的思考方法，使孩童用手操作來理解十進法的組合方式和定位的原理。

## 3. 「借過來」的說法不妥

說起遠山啓，他的「水管式教學法」和「磁磚指導法」太有名了，所以也就從這些講起。其實算術的細節上我們長久沒有留意到的事，他也可以講出一針見血的話出來。比如，大家怎麼算  $43 - 18$ ？我們大概都會這麼做：看個位數，從三無法減去八，就從十位數處借十過來，從這個十減去八剩二，再加上被減數個位數的三，成五。由於被減數的十位數被借去十，所以它的數字由四變成三，從三減去一成二，解答為  $43 - 18 = 25$ 。

但是遠山啓說「從十位數處借十過來」這種表達方式不好，理由是借來並不還。「借來」這種表現法來自英文的 borrow，可是借過來不還的確在教育上不好。

現在把這個問題用磁磚來試做看看。四十三用磚片可表示成圖 (VIII)，從它要減去

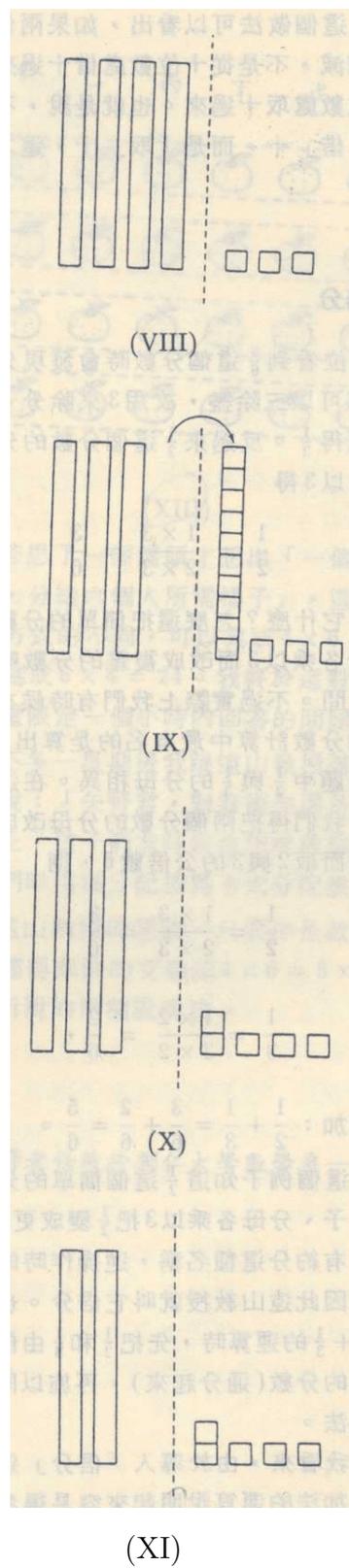
十八, 第一位的磁磚不足去掉八片, 就從十位

的地方移過來一條磚片如圖 (IX), 則從一位

的磚片可拿掉八片而成圖 (X)。再從十位數

減去十就簡單了, 結果成圖 (XI), 答案便是

二十五。



從這個做法可以看出，如果兩個個位數不能相減，不是從十位數處借十過來，而是從十位數處取十過來。也就是說，不是從十位數「借」十，而是「取」十，這才是正確的。

#### 4. 倍分

諸位看到  $\frac{3}{6}$  這個分數時會發現分子分母雙方都可以三除盡，故用 3 來除分子、分母，簡化得  $\frac{1}{2}$ 。反過來  $\frac{1}{2}$  這個分數的分子與分母各乘以 3 得

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$$

你們叫它什麼？怎麼還把簡單的分數，分子、分母各乘以 3 而改成複雜的分數呢？有人會這樣問。不過實際上我們有時候有這種必要。如分數計算中最有名的是算出  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ 。這個問題中  $\frac{1}{2}$  與  $\frac{1}{3}$  的分母相異。在這種情形之下，我們得把兩個分數的分母改成同樣的數，因而取 2 與 3 的公倍數 6，則

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6},$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6},$$

兩數相加： $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$ 。

由這個例子知道  $\frac{1}{2}$  這個簡單的分數有時須要分子、分母各乘以 3 把  $\frac{1}{2}$  變成更複雜的  $\frac{3}{6}$ 。但是有約分這種名稱，逆操作時的名稱倒沒有，因此遠山教授就叫它倍分。也就是說，做  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$  的運算時，先把  $\frac{1}{2}$  和  $\frac{1}{3}$  由倍分改

成同分母的分數（通分起來），再施以同分母分數的加法。

以我看來，由於導入「倍分」這個名詞，分數加法的運算說明起來容易得多，難道不是麼？

#### 5. 卡片分配法

前些時，我接到從名古屋打來的電話。對方跟我講如下的事。

有一所名古屋的小學算術考試出了這樣的問題：「將橘子分給六人，每人各得四個，橘子共有幾個？」

這個問題大多數學童都答成

$$4 \times 6 = 24 \quad (\text{個}),$$

其中有孩子答成

$$6 \times 4 = 24 \quad (\text{個})$$

而老師給他零分。老師認為照题目的性質來說應該想成四乘以六，做成六乘以四好奇怪，所以雖然答案對，還是要給零分。

可是家長會的人認為明明答案對，給零分太過分了，因而鬧開來。

講到這兒，對方徵求我的意見說：「矢野教授，您認為四乘以六才對，而六乘以四不對；還是覺得四乘以六，六乘以四都可以呢？」

剛好那時候我想出我專門的微分幾何學中的一個有趣的定理，正在埋頭檢討它的正確性，我的思路被打斷了，還被迫聽那冗長的話，心裡著實不高興，就說：「不是那一樣都可以嗎？」

對方於是說：「我知道了，那麼恰好一個小時以後我再給您電話，能不能那時把您認

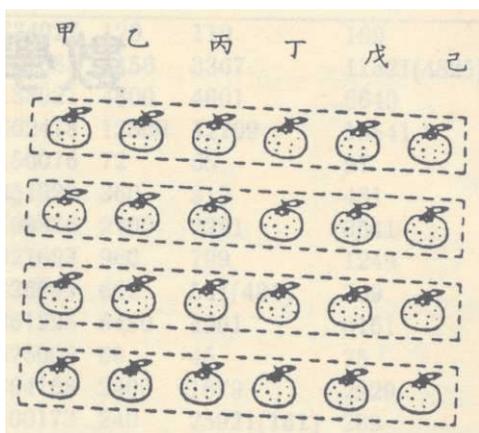
爲四乘六或是六乘以四都可以的意見跟理由都告訴我?」

我不禁問他:「爲什麼要在恰好一個小時後問這個問題呢?」

他說:「其實我是名古屋廣播電台的人,從現在正一小時後我打電話給您,您說四乘以六,六乘以四都可以的理由出來,那您的話直接就由電台播送出去。」

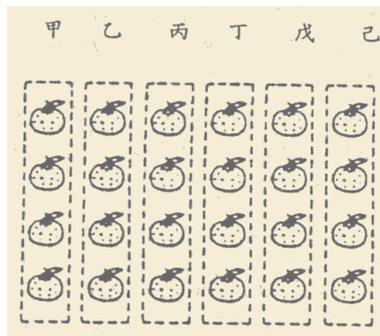
不是開玩笑!我是爲了重要的工作被打斷了不高興才說出「不是那一樣都可以嗎?」,結果被迫得在一個小時內要想出在上面的問題上四乘以六,六乘以四都行,而且人人都信得過的理由出來。

終於我花了一個小時,絞盡腦汁想出來的說明是這樣子的:現在要把橘子分給甲、乙、丙、丁、戊、己六個人,每個人各得四個,一般的想法是先給甲四個橘子,再給乙四個,這樣分下去,最後己得四個。把這種分法畫成圖形可成圖 (XII)。因此所需要的橘子數是四個橘子有六堆,所以算成  $4 \times 6 = 24$  才自然。



(XII)

但是每個人得四個橘子,分給六個人的方法也有這種分法:先給六個人各一個橘子,反覆做四次,六個人每人各得四個橘子,畫成圖形便成圖 (XIII)。如果這樣想,一個人有四個橘子,六個人便需要有四堆六個的橘子,因此算法自然寫成  $6 \times 4 = 24$ 。



(XIII)

我苦思了一個鐘頭才想出「一個人得四個橘子,分給六個人所需橘子」,這個問題因思考方式的不同,可以寫成  $4 \times 6 = 24$ ,也可以寫成  $6 \times 4 = 24$ 。我終於這般回話,解決了這限定一個小時內回答的問題。

差不多一星期後我跟遠山教授講起這件事。他說:「矢野君,對算術你還是外行啊。實際上,孩子們有時候會想成你那樣。我們叫這種分配法爲卡式分配法。」

照遠山教授的想法,只要你是數學教師,就該懂得乘法的交換法  $4 \times 6 = 6 \times 4$ ,有如上面所說的兩種說明法。

—本文譯者任教於輔仁大學數學系—