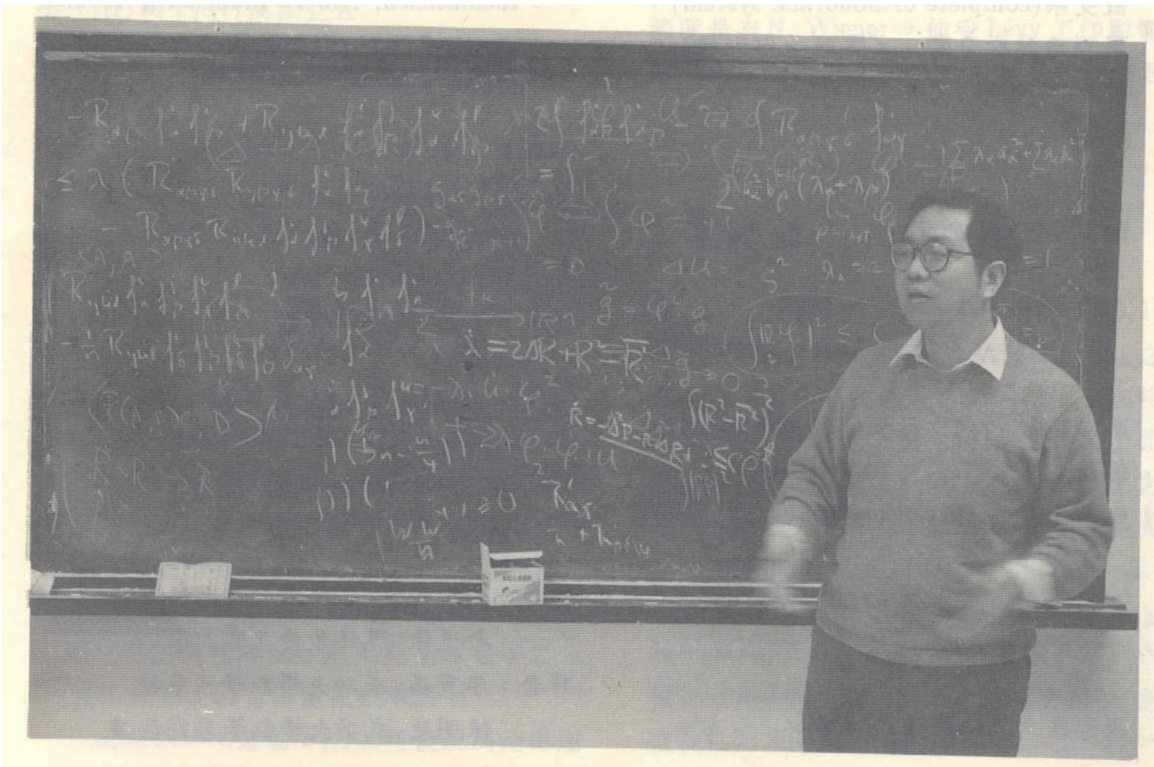
丘成桐院士演講:

現代幾何的發展

時 間:81年3月26日 (星期四)
地 點:師大分部理學院大樓
B102教室
記 錄:林信安(師大數研所一年級)



今天我要講講幾何的發展, 當然這其中有些是我個人的觀點, 不一定每個人會同意。談到幾何的對象與方法可分爲動態、靜態兩方面, 靜態就是幾何圖形, 動態是指幾何圖形經過運動而成爲另一個幾何圖形的過程, 目前尙未瞭解很多。

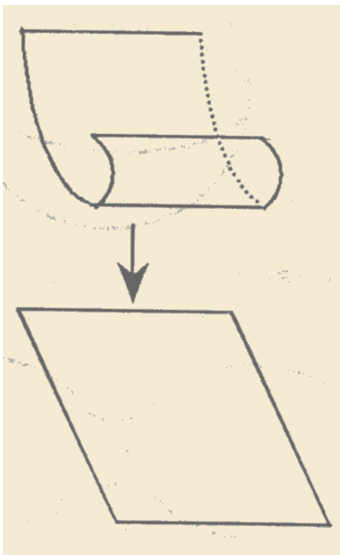
幾何的研究與自然現象是很接近的, 亦與基本物理、工程有著密切的關係, 自然界的現象可分成抽象美的幾何、基本物理、工程, 幾何就是從這三方面推導出來的, 而幾何的研究也會影響這三方面的研究, 總而言之, 這三方面對幾何的影響是互相的。從前埃及時代主要研究平面、立體幾何, 這當然是因爲有工程上的需要, 順著科學的發展, 到了牛頓力學發展後, 平面幾何已不夠去描述運動現象, 於是有微積分的產生, 有了微積分, 就可以討論曲線、曲面; 另一方面,Euler、Lagrange 爲了應用積分到流體, 因而有了變分法的發展。18世紀變分法引進幾何, 是幾何上重大的發展 ,這影響到了後來微分幾何的研究。

18 世紀微分幾何的問題是集中在研究曲線 (直線與平面的關係), 另一方面也開始研究一個嵌入$\mathbf{R^3}$ 的曲面 $\sum \hookrightarrow \mathbf{R^3}$, 這是從

Gauss 開始的,Gauss 對微分幾何主要的貢獻是研究 Gauss 曲率與內在幾何間的關係。內在性是指只與度量有關而與曲面在空間中之寫法無關, 例如一張紙曲率 $K = 0$, 將其捲起來,intrinsic geometry 不變, 曲率 $K = 0$, 但 extrinsic geometry 有變化, 而 Gauss 就是證明了 Gauss 曲率爲 intrinsic geometry 的不變量。另一方面,Complex Analysis 的引進, 對微分幾何的研究有很深的影響,Complex Analysis 是爲了研究流體力學, 而發展出來的; Lobatchevsky 研究曲率 $K = -1$ 的雙曲空間, 這個研究與平行公理有很大的的關係, 這是幾何發展的重要里程碑。

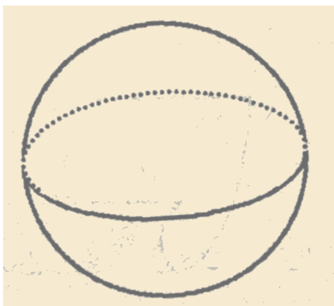
19世紀 G. B. 黎曼繼承 Gauss 的思想, 將 2 維的曲面之研究, 推廣到高維空間上, 而形成了黎曼空間, 這個空間形成之後, 爲幾何的研究開啓了新的一頁。

$(M_1, d_1), (M_2, d_2)$ 何時可將它們看成同一空間, 即何時可找到 $\varphi : M_1 \to M_2$ 使距離沒有變化 ,i.e. $\varphi^*(d_2) = d_1$, 例如將捲起來的紙攤平

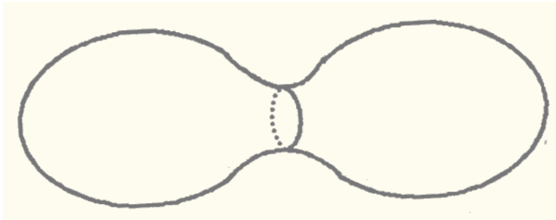


這是幾何上一個很重要的問題, 是唯一性的問題。一般而言, 曲率 K 是一個重要的 invariant。例如, 一張平坦的紙 $K = O$ 無論如何不能"相等"於球面 $K = 1$, 後來又引進了連絡 (connection), 這是微分的推廣, 主要是 Christoffel,Ricci,Levi-Civita 等人的貢獻, 它們不是在平坦的空間中研究微分的問題, 發現一般平坦的空間 $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial y}f) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial x}f)$,$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial y}V) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial x}V)$, 但在不平坦的曲面上 $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial V}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial V}{\partial x})$ 與曲面的曲率有關。

19世紀末期,Flex Klein 認爲大部份的微分幾何可用李群 (離散群) 去解釋, 很多幾何現象可看成 homogeneous space, 當初很多人認爲很多微分幾何旳現象不能看成變換群, 到了 E. Cartan 對李群的分類有很大的影響, 他引進了活動標架法,20世紀初期,Cartan 、Flex Klein 對幾何的看法與 Gauss、黎曼的幾何方法結合 ,才得出一種新的方法—— 活動標架法。Poincaré 考慮變分法在微分幾何上的應用, 他是考慮測地線 (geodesic) 的問題: 在 $\mathbf{R^3}$ 上的封閉曲面上, 找一條封閉的測地線, 例如



在球上的大圓



Morse 則將此問題考慮到高維度上, 如何去找封閉測地線。有關測地線的問題尙有 ,在二維的封閉曲面上至少有3條不自交的封閉測地線, 這是很有名的問題, 直到最近才有詳細的證明。Morse 理論在微分幾何, 工程上有重大的貢獻, 開始了微分幾何上大範圍的幾何研究。測地線問題在高維度上的推廣是最小曲面 (minimal surface) 的問題, 最初是 Weierstrass 引進 Complex Analysis 的方法, 這是 Complex Analysis 影響微分幾何的一個例子。

從測地線, 最小曲面的研究, 微分方程開始對微分幾何的研究產生影響, 近十年來, 這方面的發展尤其神速, 但對非線性拋物型偏微分方程我們尙不明瞭, 因此對於動態的幾何並不清楚。例如 Rauch 考慮固定兩點的測地線, 研究不是最短距離的測物線, 而考慮 index 理論經過擾動 (Perturbation) 後的情形, 而 index 理論是由 O.D.E. 中的 Sturm-Liouville 來的,Rauch 發現曲率與拓樸性間有密切的關係, 這是從 Morse 理論得到的。

在大域幾何方面,Gauss-Bonnet 定理 $\int_{M^2} K = 2\pi\mathcal{X}(M)$,(其中$M$ 爲定向二維緊緻曲面) 是一個代表, 陳省身先生將這個公式推廣到高維度的情形。陳省身也引進了 Chern class 討論曲率與拓樸性之間的關連,

而 Rau- ch 則是討論距離、曲率、拓樸性三者之間的關係。

基本上而言, 微分幾何是一門在物理, 工程等各方面都是應用極廣的學問, 當然也是這些方面上的重要工具。謝謝!