Brown運動與 Lévy 泛函分析 (上)*

飛田武幸 著

李育嘉

陳明廷 合譯

0. 引言:

在 Brown 運動, 加法過程,Markov 過程等機率論研究領域中,P. Lévy 認爲與其將它們各別處理, 還不如先由泛函分析著手, 再引入上述機率論一系列的研究中而觀其所扮演的角色, 一方面可更展現其輝煌的一面, 同時亦可觸覺到其至今仍繼續影響世人的思想, 且可將這些研究的前端中某些未來展望的問題變爲近代的模式來處理, 此亦爲 Lévy 之貢獻。

Lévy (1886–1971) 的 100 年誕辰之紀念活動已經結束了, 今天能再認識其偉大業績, 特別是由泛函分析觀點來探討他在機率論方面的工作, 尤其是對 Brown 運動研究方法的改觀方面, 實意義深遠。

吾人之目標爲回到 Lévy 所用的隨機過程理論根源之一的泛函分析, 經由再認識其思想而探討出其研究的方針。爲此, 本文的大綱如下:

I. 首先, 想看如何將泛函的分析引入隨機分析內。

II. 對於多變數參數之 Gauss 隨機場 (Ran- dom field) 的泛函分析處理法, 及

III. 應用方面, 尤其是物理學上的問題的再認識。對於這些問題, 若篇幅許可的話擬詳加論述。

1. 泛函數

定義於區間 $[0,1]$ 上之函數 $x(t)$, 其平方的積分爲有限, 即

$$\| x \|^2 = \int_0^1 |\, x(t)\,|^2 \, dt < \infty \,,$$

記其全體爲 $L^2[0,1]$。此爲 Hilbert 空間, 是一代表性的無限維向量空間。定義在此空間上之實數值函數 $U(x)$, $x \in L^2[0,1]$, 爲函數之函數, 稱之爲泛函數, 多半表示與通常的函數有所區別。

*原文刊登於"數學研討"第27卷, 第3期,72 − 76 頁 (1980), 日本評論社, 東京。

定義域爲無限維時之此種泛函數, 當然也可考慮微分或積分等的運算, 以致分析學的研究仍可進行。對於此種無限維分析學 Lévy 之想法是, 一方面將其投影在有限維空間上施以運算後再讓維度趨於無限而考慮其極限。另一方面是直接對無限維的特性作精密的觀察然後在其上處理而作新的嘗試。對此兩方面, 吾人對後者將可看出其意義深沉的成果。

具體成果是由他的學位論文 (1911 年) 開始及以後多篇論文的發表, 這些論文皆收集在 1951 年文獻 [L.3] "函數分析的基本問題" 中。Lévy 自己曾對其所作的泛函分析工作做評價, 由在 1971 年國際科學史學會他所提出的論題"曲線之函數與泛函數微分方程式" 一文中更可看出其重要性。

這方面雖是 Lévy 的業績, 不過從函數或曲線的泛函數之定義開始, 其全微分 (即變分), 泛函數微分方程式, 可積分條件,Green 函數之變分或 Hadamard 方程式等問題還應繼續作詳細研究。泛函數積分之研究中所需考慮的平均值, 無限維回轉群 (group of rotations),Laplacian 等問題及無限維的調和分析均僅以粗糙的形式提出, 但這些合起來形成一種體系。

目前最深具意義者是在這些一連串的工作中可以處處看出相對應於近代分析或隨機分析中的結果。

泛函數之定義域所選擇的函數空間是以上述 $L^2[0,1]$ 爲基準, 而考慮其種種變形, 例如 Orlicz 空間, 其理論已明確顯示出對偶空間的重要性。以一種發展而言,1940 年 Lévy 考慮對 Brown 運動的隨機積分所衍生而成之隨機面積作詳細研究。此隨機面積一直被作爲 Brown 運動之典型二次泛函數在處理, 後來 Kolmogorov 等人於二次統計量中看到它的存在, 又其他如角運動量之量子化, 群之表現等, 隨機面積在想像不到的地方繼續活躍著。如此 Lévy 所引導之基本概念在意外的地方具重要地位之事例在其他地方也可看出幾個, 這些事實可顯示出他對重要觀念有深入的洞察力。

2. 泛函數微分

在無限維空間 $L^2[0,1]$ 上之泛函數 $U(x)$ 之微分, 當然指的是變分。用座標 $x=(x_1,x_2,\cdots)$ 表示 $x\in L^2[0,1]$ 而考慮 $U(x)$ 的偏微分 $\frac{\partial}{\partial x_n}U(x)$, 不如由 x 變爲 $x+\delta x$ 時取 U 之微小變化之主要部分 δU, 此即爲其變分, 可表爲

$$\delta U=\int_0^1 U'_x(x;t)\delta x(t)\,dt, \qquad (1)$$

這個等式稱爲 Volterra 公式, 這裡 $U'_x(x;t)$ 表泛函數微分。描述 $U(x)$ 變化的這個公式, 當 U 代以隨機過程 $X(t)$ 時, 從結果來看,$X(t)$ 可想像爲 X 時間上之變化 $\delta X(t)$ 對各時點獨立之更新過程所表示之隨機變分方程式之解, 此方程式下回再談。

二階之泛函數微分有兩類, 可表爲$U''_{x^2}(t)$ 與 $U''_{x,y}(t,s)$。對 x 之微小變化 δx 作 Taylor 公式之展開吾人可得

$$\begin{aligned}&U(x+\delta x)\\ =\;& U(x)+\int_0^1 U'_x(t)\delta_{x(t)}\,dt\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 U''_{x^2}(t)(\delta_{x(t)})^2\,dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 U''_{xy}(t,s)\delta_{x(t)}\delta_{x(s)}\,dsdt$$

$$+O(\delta_x)^3。\qquad(2)$$

Lévy 之 Laplacian $\triangle_L$ 便定義爲

$$\triangle_L U=\int_0^1 U''_{x^2}(t)\,dt。\qquad(3)$$

又 Volterra 之 Laplacian $\triangle_V$定義爲

$$\triangle_V U=\int_0^1 U''_{xy}(t,t)\,dt。\qquad(4)$$

它們分別表 $L^2[0,1]$ 上不同部分的分析。特別是 $\triangle_L$ 及由此所發展的調和泛函數在隨機分析上爲重要的觀念。

3. 泛函數之平均與白雜訊測度

在 $L^2[0,1]$ 上,Lebesgue σ-有限測度並不存在。於是代替由測度而來之泛函數積分的方法之一是考慮泛函數之平均值。在 $L^2[0,1]$ 上之一單位球 V 上 U 之平均值是先取 V 之 n 維截面 V_n, 計算 U 限制在 V_n 之函數 U_n 之平均值 m_n ($=U_n$ 在 V_n 上之積分值$/V_n$ 之體積)。若 $\lim m_n=m$ 存在時,m 定爲 U 在 V 上之平均值。

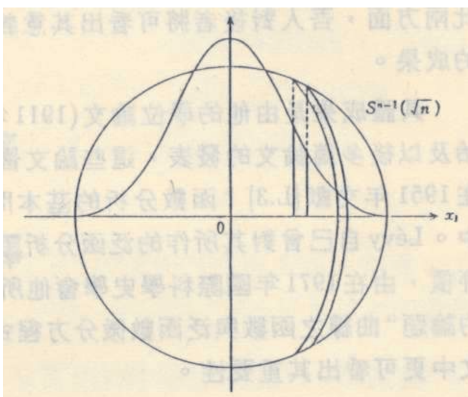
此事可如下理解之。因爲無限維球 V 之平均值與球面

$$S=\left\{x\in V:\int_0^1 |x(t)|^2\,dt=1\right\}$$

之平均值相同。S 之元素 $x(t), 0\le t\le 1$, 以階梯函數來近似時, 可得等式

$$\sum_1^n x_i^2\triangle_i=1,\quad \triangle_i=\frac{1}{n}。$$

這表示 n 維空間內點 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 $\sqrt{n}$ 爲半徑之球面 $S^{n-1}(\sqrt{n})$ 上。在此球面上考慮其均勻分配的機率測度, 此爲這球面之曲面面積之常數倍, 這個測度投影在一維空間上 (如 x_1 軸), 則當 n 很大時與 Gauss 分佈相近。此說明自由粒子之速度分佈爲 Gauss 分佈時與 Maxwell 公式所說明的相吻合。粗言之, 吾人變成要考慮在無限維球面 $S^\infty(\sqrt{\infty})$ 上之均勻分配的機率測度 μ, 由此可得對各座標軸方向之標準且獨立之 Gauss 分佈, 即座標軸 $\{x_i\}$ 可視爲具相同標準 Gauss 分佈之獨立隨機變數序列。泛函數 $U(x)$ 之平均值無他, 當 U 寫成 $U(x)=U(x_1,x_2,\cdots)$ 而視之爲獨立隨機變數序列 $\{x_i\}$ 之函數時, 恰爲機率論上之平均值。



例如 泛函數

$$U(x)=\int_0^1\cdots\int_0^1\varphi(x(t_1),\cdots,$$

$$x(t_p); t_1, \cdots, t_p)\, dt_1 \cdots dt_p \quad (5)$$

計算其對 V 之平均值時可得

$$(2\pi)^{\frac{-p}{2}} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_1, \cdots, \xi_p;$$
$$t_1, \cdots, t_p) \exp\left[-\frac{1}{2}\sum \xi_k^2\right] d\xi^p dt^p \qquad (6)$$

此爲 Gâteaux 公式。

上述所出現之 $\{x_i\}$, 均遵循著相同標準 Gauss 分佈的獨立隨機變數序列, 稱之爲白雜訊 (white noise), 其分佈當然擴散在無限維空間, 但如剛剛所述, 可想像爲球面 $S^\infty(\sqrt{\infty})$ 上之均勻分佈。關於此事吾人需再稍微仔細的看看。

以 l^2 表數列 $a = (a_1, a_2, \cdots)$ 滿足 $\|a\|^2 \equiv \sum a_n^2 < \infty$ 之全體, 以 $\|a\|$ 爲範時 l^2 成 Hilbert 空間。視上述白雜訊爲隨機向量 $x = (x_1, x_2, \cdots)$, 由大數法則, 則

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)}{N} \to 1$$

幾乎確實成立, 故 x 不屬於 l^2。考慮 l^2 之部份空間

$$e_1 = \left\{ a \in l^2 : \|a\|_1^2 \equiv \sum_1^\infty n^2 a_n^2 < \infty \right\}。$$

以 $\|\ \ \|_1$ 爲範時 e_1 成爲一 Hilbert 空間, 其對偶空間記作 e_1^*。顯然

$$e_1 \hookrightarrow l^2 \hookrightarrow e_1^* \qquad (7)$$

成立。回到 x, 由 Schwarz 不等式, $a \in e_1$ 時可得

$$\begin{aligned} \left|\sum_n a_n x_n\right| &= \left|\sum_n (na_n)\left(\frac{x_n}{n}\right)\right| \\ &\le \|a\|_1 \left(\sum_n \left(\frac{x_n}{n}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}。\end{aligned}$$

獨立隨機變數之和

$$\sum_n \left(\frac{x_n}{n}\right)^2$$

之平均值 $\sum\limits_n n^{-2}$與變異數 $\sum\limits_n (\frac{2}{n^4})$ 均收斂, 故保證其爲概收斂。此保證隨機向量 x 之特徵泛函數 $C(a)$ 存在且可計算如下:

$$\begin{aligned} C(a) &= E\{\exp[i\langle x, a\rangle]\} \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}\|a\|^2\right], \quad a \in e_1, \end{aligned}$$

此處 $\langle\, ,\, \rangle$ 爲 e_1 與 e_1^* 之序對

$$\langle x, a\rangle = \sum_n a_n x_n。$$

參考以上論述,Lévy 泛函數平均值的取法的想法用吾人的語言表示出來更容易被了解。若注意上述所見獨立隨機變數序列 $\{x_i\}$ 爲由 $L^2[0,1]$ 之元素 x 的座標表現而來時, 取相當於 e_1 之 $L^2[0,1]$ 的適當之子空間 E_1 (其實定 E_1 之拓樸爲使 $i: E_1 \hookrightarrow L^2[0,1]$ 成 Hilbert Schmidt 型者即可), 類似 (7) 吾人可得

$$E_1 \hookrightarrow L^2[0,1] \hookrightarrow E_1^*. \qquad (8)$$

此時對應於 e_1^* 上之隨機向量 x 之分佈爲 E_1^* 上之機率測度 μ。於是 μ 之特徵泛函數

$$C(\xi) = \int_{E_1^*} \exp[i\langle x, \xi\rangle] d\mu(x), \quad \xi \in E_1,$$

非爲

$$C(\xi) = \exp\left[-\frac{1}{2}\|\xi\|^2\right], \quad \xi \in E_1 \quad (9)$$

不可。

如此, 吾人所考慮之泛函數 $U(x)$ 之集合, 可定爲 Banach 空間 $L^1(E_1^*,\mu)$,U 之平均值可視爲對 μ 之積分。如此的積分雖非直接對應 Gateaux 之公式, 但吾人之設定可以說是爲了使 Lévy 的想法盡量活躍起來。今在 (8) 中 $L^2[0,1]$ 代之以 $L^2(\mathbf{R^1})$ 而不變其基本的論述。此時所定 E_1^* $(\supset L^2(\mathbf{R^1}))$ 上之機率測度稱爲白雜訊測度。由於此測度爲 Gauss 型, 有時稱爲 E_1^* 上之標準 Gauss 測度。又參數 (時間) 限制在 $[0,1]$ 時在 (8) 之 E_1^* 上所得之測度仍稱之爲白雜訊測度。因此,$L^p(E_1^*,\mu)$, $p\geq 1$ 之元素稱爲白雜訊泛函數或稱爲 Brown 泛函數。後者之稱謂是衆所週知 (次節), 此由於白雜訊是 Brown 運動對於時間微分而得來。

4. Brown 運動與加法過程

由於泛函數之積分已有完善的理論基礎, 吾人應致力於微分法的推展。但是在此之前, 言及與產生白雜訊有密切關係之 Brown 運動, 應先看 Brown 泛函數實值上的意義爲何？然後對尙不清楚的微分法或變分之觀念努力作深入的理解。

前節裡獨立隨機變數序列是以自然的形態登場。對其部分和 S_n, $n\geq 1$ 之系列的考慮也一樣。此處 n 代之以連續之參數 t, 而考慮 S_n 對應之 $X(t)$, $t\geq 0$ 時, 不知變爲如何？此爲具獨立增量之隨機過程, 即任意選取 $t_0<t_1$ 時,$X(t_1)-X(t_0)$ 與 $\{X(s), s\leq t_0\}$ 爲獨立。此種過程稱之爲加法過程。特別是當此過程爲隨機連續時：即對任意 $\varepsilon>0$ 與 t_0, 具有

$$P(|X(t)-X(t_0)|>\varepsilon)\to 0 \quad (t\to t_0)$$

之性質者, 樣本函數爲第一種不連續且爲右連續時稱爲 Lévy 過程。再者 $X(t+h)-X(t)$ 之分佈僅與 h 有關 (即具定常數增量) 時可得如下式所示的 Lévy-Itô 分解

$$\begin{aligned} X(t) &= mt+\sigma B(t) \\ &\quad + \lim_{p\to\infty}\int_{p>|u|>\frac{1}{p}}\left(uP_{du}(t)-\frac{tu}{1+u^2}dn(u)\right), \\ &\quad t\geq 0。 \end{aligned} \tag{10}$$

此處 m 爲常數,$B(t)$ 爲 Brown 運動,$P_I(t)$,I 爲曲間, 爲 Poisson 過程, 若 $I\cap I'=\emptyset$ 則 $P_I(t)$ 與 $P_{I'}(t)$ 爲獨立且

$$E(P_I(t))=t\cdot n(I),$$

dn 爲 $\mathbf{R^1}\setminus\{\mathbf{0}\}$ 上具台之測度, 且滿足

$$\int\frac{u^2}{1+u^2}\,dn(u)<\infty$$

(由此可知上述 (10) 中關於 $P_{du}(t)$ 之積分的定義), 其中 lim 表概收斂之意。如此的 $X(t)$ 之分解爲唯一的。

上述分解除明顯部分 mt 外,Brown 運動部分爲連續樣本函數 (sample function), 而剩下部分爲可跳躍樣本函數。Lévy 是應用 (10) 於滿足無限可分解法則特性之函數訂定之, 此被認爲具很大意義。以現在的觀點來看,(10) 之分解爲機率論中最美麗基本定理之一, 實不能忍受讓它僅留在機率論中。

此時 Brown 運動 $B(t)$, 可被視爲是由連續之 Lévy 過程而定之樣本函數, 且可導出爲 Gauss 型。特別是 $B(t)-B(s)$, 其平均值爲 0, 變異數爲 $|t-s|$ 且遵循 Gauss 分佈。由加法性, 若取時間微

分 $\frac{d}{dt}B(t) = \dot{B}(t)$, 以形式上而言可得各 (時) 點獨立之系統 $\{\dot{B}(t)\}$。其嚴謹之定義在 [1] Gel'fand and Vilenkin 書中有詳論。$\dot{B}(t)$ 之樣本函數可視爲$ 3 中 E_1^* 之元素, 取 $\xi \in E_1$ 時,$\langle\dot{B},\xi\rangle$ 爲平均值爲 0, 且變異數爲 $\|\xi\|^2$之 Gauss 型隨機變數。因此 $\exp[i\langle\dot{B},\xi\rangle]$ 之特徵泛函數 $C(\xi)$ 可由 (9) 式而得。吾人應注意 $\{\dot{B}(t)\}$ 之分佈爲白雜訊測度 μ, 於是稱 $\{\dot{B}(t)\}$ 爲白雜訊, 爲廣義之隨機過程。如此, 前節中爲了考慮泛函數平均而自然的引入白雜訊測度 μ, 由座標獨立之隨機變數序列之討論開始到部分和 S_n, 然後是類似連續過程而到加法過程, 再取 Brown 運動作爲典型, 取時間微分而建立白雜訊及其機率分佈, 再次發現 μ。在研究泛函數積分或函數空間之自然測度時, 吾人應注意這些觀念相互之間有著密切的關連。

在 1920 年代, 仍然在思考函數空間上的測度是有 N. Wiener。他受 Lévy 工作影響, 導入今日所謂 Wiener 測度, 以吾人之語言而言, 可以說是 Brown 運動機率分佈。

5. 回轉群

Lévy 之著作 [L.3] 內, 曾考慮 $L^2[0,1]$ 之某種回轉 (rotation), 對於 Laplacian $\triangle_L$ 之研究有用。吾人在注意此事的同時, 也應特別注意$ 3 中所見之事實, 即 μ 在形式上而言爲無限維球面 $S^\infty(\sqrt{\infty})$ 上具均勻分配之測度, 而試導入無限維回轉群。這種群是由於吉澤尙明氏的提倡而有如下之定義。取$ 3 中之空間 E_1 或取具更強的拓樸的核型空間 (nuclear space), 今以 E 來表示。E 之自同構 (automorphism) g 爲E之回轉意指 (i)g爲E 之線性同胚函數 (linear homeomorphism mapping),(ii) 對任意 $\xi \in E, \|g\xi\| = \|\xi\|$。$E$ 之回轉之集合記作 $O(E)$ 而稱之爲 E 之回轉群。也有簡稱爲 (無限維) 回轉群。

設 g 爲 E 之回轉。其共軛函數 g^* 可由

$$\langle x, g\xi\rangle = \langle g^*x, \xi\rangle, \quad x \in E^*, \quad \xi \in E,$$

定之。如吾人所期待的,$O(E)$ 使白雜訊測度不變:

$$g^*\mu = \mu。 \tag{11}$$

爲使泛函數之分析使回轉群 $O(E)$ 活躍, 吾人於是以回轉群 $O(E)$ 所產生之機率調和分析作爲目標來進行討論。

首先, 由於 $O(E)$ 爲非常大的群, 吾人從尋找與已知之群同構 (isomorphism) 的 $O(E)$ 之子群開始。

1) 取 E 之所有有限維子空間 F 之回轉群的代數和, 所得之集合記爲 G_∞。G_∞ 可視爲 $O(E)$ 之子群, 其元素稱爲有限維回轉。

2) Lévy 群 g; 設 $\{\xi\}$ 爲 $L^2(\mathbf{R^1})$ 之完全正規直交系 (complete orthonormal system),$\mathbf{N}$ 爲自然數全體,π 爲 $\mathbf{N}$ 之自同構 (automorphism)。$\xi = \sum a_n\xi_n$ 時, 令

$$g_\pi\xi = \sum a_n\xi_{\pi(n)},$$

則 g_π 可定義 E 之變換, 此時, 令

$$g \;=\; \{\, g_\pi \in O(E) : \forall\varepsilon > 0, \exists N, \tag{12}$$

$$\forall n > N, \#[i \leq n; \pi(i) > n] < \varepsilon n. \}$$

$\#[\cdots]$ 表 [ ] 內之元素個數。顯然 g 成一個群。

3) 由 $\mathbf{R^1}$ 之自同構 (automorphism) 之族,

$$(g_t\xi)(u) = \xi(\psi_t(u))\sqrt{\left|\frac{\partial}{\partial u}\psi_t(u)\right|}, \quad t \in \mathbf{R^1},$$

所定義之單參數群 $\{g_t\}$ 族。

這些子群對泛函數之分析均有用, 同時也是看通整個情形的強力工具, 尤其是對與微分算子有關連之問題特別有效。其詳細問題在以下各節裡再進行討論。

參考文獻

Lévy 之著作

[L.1] Théorie de l'addition des variables alé- atoires, Paris, Gauthier-Villars, 1937, 2éme éd. 1954.

[L.2] Processus stochastiues et mouvement brownien, Paris, Gauthier-Villars, 1948, 2éme éd. 1965.

[L.3] Problémes concrets d'analyse function- elle, Paris, Gauthier-Villars, 1951.

[L.4] Quelques aspects de la pensée d'un ma- thématicien, Albert Blanchard, 1970. 飛田-山本譯, 一機率論研究者之回想, 岩波書店, 1973.

其他參考著作

[1] I.M. Gel'fand and N. Ya Vilenkin, Generalized functions, vol. 4, 俄語 1961; 英譯 Academic Press 1964.

[2] 飛田武幸, 布朗運動, 岩波書店, 1970. (日文)

[3] —, 白雜訊, 數學研討, 1982 年 6 月號, 38–42. (日文)

作者: 飛田武幸, 日本名古屋大學教授, 1991 年退休, 現任教於名城大學.

譯者: 李育嘉, 成功大學數學系教授.
陳明廷, 成功大學數學系副教授.