布朗運動簡介

黃文璋

布朗運動(Brownian motion) 又稱 Wiener 過程, 爲最早被徹底研究的一個過程, 與 Po- isson 過程同爲應用機率中最重要的兩個過程。

在 1827 年, 英國植物學家 Robert Brown (1773-1858) 在顯微鏡中觀察到, 懸浮於溶液中之微小的粒子, 呈現一連續而不規則的運動。當然這種現象不只在液體中才有, 如果我們稍加留意, 當陽光射進陰暗的房間時, 從光束中可看到很多飄動的灰塵, 這也是布朗運動所產生的效應。

不過布朗並非第一位提出此現象存在的人, 從 17 世紀開始, 荷蘭博物學家 Leeu- venhoek (1632-1723) 以及後來的許多科學家都先後注意到此現象。但布朗的探討引 起科學界的重視, 因此後來便以布朗運動稱呼此現象。布朗之後科學家相繼研究, 並對布朗運動產生的原因提出解釋。起初科學家以爲布朗運動的產生是由於粒子本身是"活的"(alive), 但法國數學家及物理學家 Poincaré (1854-1912) 以爲這違反熱力學第二定律 (second law of thermodynamics)。今日我們知道布朗運動之所以產生, 乃是因粒子被其四周的分子連續不斷的撞擊所造成的一種運動 (在溶液中於正常情況下, 一特定的粒子, 每秒約受到10^{20} 次的撞擊。)。

在 1905 年, 愛因斯坦 (Einstein) 利用物理中分子動力學 (kinetic molecular theory) 的原理以數學方式來描述布朗運動。他起先是要導出布朗運動可能存在, 後來才知道此運動早就被觀測到了。令$X(t)$表粒子在時間t於x軸之位置 (即只考慮一維的布朗運動) , 且設$X(t_0) = x_0$爲在起始時間t_0之位置。若假設移動對時間爲齊性 (即有定常增量,stationary increments, 則可將t_0取爲 0。另外, 獨立增量也假設成立, 且以 $f_t(x)$表布朗運動於時間t位置在x之 p.d.f.(機率密度函數)。愛因斯坦證明$f_t(x)$滿足下述偏微分方程式:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \tag{1}$$

其中D稱爲擴散係數, 爲一大於 0 之常數。若我們改變尺度, 上式可轉換爲熱力方程式 (heat equation)$\partial f/\partial t = \frac{1}{2}\partial^2 f/\partial x^2$。不難證明 (1) 式之解爲

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-(x-x_0)^2/4Dt}。 \tag{2}$$

藉由物理上的性質, 愛因斯坦證明擴散係數$D = 2RT/Nf$, 其中R爲理想的氣體係數 (gas constant),T爲絕對溫度,N爲亞佛加德羅數 (Avogadro number),f 爲摩擦係數, 此係數與溶液的黏性及粒子之性質有關。其後不久, 根據愛因斯坦所建立之模式,Perrin 經過一系列之實驗, 給了一與目前所接受之亞佛加德羅數差距不超過19%之估計值。此結果很能支持分子動力學的理論, 而在此之前仍有許多物理學家對這理論抱存疑態度的。Perrin還指出愛因斯坦的模式描述出一到處不可微之連續函數。這種函數在此模式被提出之前, 是被大多數的數學家認爲是一種刻意製造而無太多數學價值的函數。

另外,Bachelier 以賽局論來研究股票價格之波動, 並在他1900年出版的博士論文中, 提到其模式可應用到物理中的布朗運動。在他後來的研究中, 他給出一些關於布朗運動的函數之分佈。

在這段研究布朗運動的期間, 數學理論的發展卻顯得較緩慢, 此因要適當地用數學來描述此模式較困難。在 Lebesgue 提出關於測度論的論文之後約20年,Wiener(1923) 對於布朗運動首度給出較簡明的數學公式, 他並證明布朗運動的樣本路徑幾乎到處連續。在1933年,Wiener 又與 Paley 及 Zygmund 共同證出布朗運動的樣本路徑幾乎到處不可微。另外 Khintchine(1924) 發現布朗運動之疊對數法則 (law of the iterated logarithm)。

自1939年起,Lévy 對布朗運動做出許多深入而且徹底的結果, 可以說在他之後只剩一些細節方面的推廣。後來他又研究多維布朗運動, 並將結果推廣到一般的抽象空間, 特別是 Hilbert 空間。

由於 Wiener 及 Lévy 之顯著的貢獻, 布朗運動有時又被稱爲 Wiener 過程或 Wiener-Lévy 過程。

底下我們用一簡單的方式來介紹布朗運動, 即將布朗運動視爲一隨機漫步之極限。假設溶液中之某粒子平均每$\triangle t$的時間受到一次碰撞, 每次碰撞後產生一很小的移動, 此移動設爲隨機且與原來位置獨立。爲了簡便, 只考慮在某一特定方向之移動, 且設每次移動$+\triangle x$或$-\triangle x$之機率各爲p及$q = 1-p$。此粒子之移動可視爲在一維中之隨機漫步, 每次移動之單位爲$\triangle x$。若裝液體之容器很大, 則可假設此粒子之起始位置離容器之邊界均很遠。將此粒子之起始位置設爲原點, 則在時間t之位置$X(t)$可表示爲

$$X(t) = \triangle x(I_1 + \cdots + I_{[t/\triangle t]}) \qquad (3)$$

其中$I_i = 1$ 或 -1依第i次之位移爲$+\triangle x$ 或 $-\triangle x$而定,[ ] 爲高斯函數, 又

$$P(I_i = 1) = 1 - P(I_i = -1) = p。$$

適當地選取上述這些參數, 則由中央極限定理可得$X(t)$趨近一常態分佈。更明確地說 , 若令

$$\begin{aligned} \triangle x &= \sigma\sqrt{\triangle t}, \\ p &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\triangle t}}{2\sigma}\mu, \end{aligned}$$

此處μ,σ 爲二固定常數且$\sigma > 0$, 則當$\triangle t \to 0$時 (因此$\triangle x \to 0$ 且$p \to \frac{1}{2}$),

$$\frac{X(t)-\mu t}{\sigma\sqrt{t}} \xrightarrow{d} \Phi, \tag{4}$$

其中Φ爲$\mathcal{N}(0,1)$分佈。即證出

(i) $X(t)$有期望値爲μt, 變異數爲$\sigma^2 t$之常態分佈。

又因粒子在不相交時區之移動爲相互獨立, 故又有

(ii) $\{X(t), t \geq 0\}$有獨立增量。

由 (i) 及 (ii) 立即可知$X(s+t) - X(s)$有$\mathcal{N}(\mu s,\ \sigma^2 s)$之分佈 。最後由於在任一時區中之位移只與此時區之長度有關, 故

(iii) $\{X(t), t \geq 0\}$ 有定常增量。

此外尙有其它不同的方式來引進布朗運動。

令$X(t)$表溶液中某粒子於時間t在某方向之位置。設$\{X(t), t \geq 0\}$滿足下述三個條件 X:

(i)$'$ $\{X(t), t \geq 0\}$有獨立增量;

(ii)$'$ $\{X(t), t \geq 0\}$有定常增量;

(iii)$'$ 對$\forall \delta > 0$,

$$\lim_{h \downarrow 0} P(|X(t+h) - X(t)| \geq \delta)/h = 0。 \tag{5}$$

可以驗證前述隨機漫步之極限滿足此三個條件, 因此 (i)$'$-(iii)$'$ 是一種較弱的假設。底下我們解釋這些條件的意義。

首先條件 (i)$'$與下敍述等價:

$X(t+h) - X(t)$與$\{X(u), u \leq t\}$獨立,$\forall h > 0, t > 0$。

因此條件 (i)$'$表粒子在時區$[t, t+h]$之位移, 與在這之前, 即時間 0 至t之位置皆獨立。當然這只是一個粗略的假設。從物理上來看, 比較正確的說法是, 在時區 $[t, t+h]$因分子的撞擊, 而傳給粒子的動力, 與在時間t之前的運動無關。此假設只有當由在時區 $[t, t+h]$之起始速度所造成之位移, 與在時區$[t, t+h]$之動力所產生之位移相比很小才有效。由建立模式的觀點, 這是三個條件中最差的一個, 不過我們還是接受此假設。

條件 (ii)$'$則算是相當合理的假設。它表示此粒子的移動, 對時間而言爲齊性, 即在任一時區之位移的分佈, 只與此時區之長度有關, 而與此時區在何處無關。只要粒子所在之容器很大, 便可做此假設。

再看條件 (iii)$'$, 我們覺得每一粒子移動的樣本路徑應該都是連續的, 而不會有突然的跳升或降落。現將時區$[0, s]$分成n等份, 每份長度爲$h = s/n$。若此粒子之移動爲連續, 則當$h \to 0$(即$n \to \infty$) 時, 在某種意義下,

$$g(h) = \sup_{1 \leq i \leq n} |X(ih) - X((i-1)h)| \tag{6}$$

須趨近至0。至少我們希望對$\forall \delta > 0$,

$$\lim_{h \downarrow 0} P(g(h) \geq \delta) = 0。 \tag{7}$$

由條件 (i)$'$, 隨機變數$Y_i = |X(ih) - X((i-1)h)|$,$i = 1, \ldots, n$, 爲相互獨立。又由條件 (ii)$'$,$Y_1, \ldots, Y_n$有相同分佈。故

$$\begin{aligned} P(g(h) \geq \delta) &= 1 - P(\sup_{1 \leq i \leq n} Y_i < \delta) \\ &= 1 - P(Y_1 < \delta)^n \\ &= 1 - (1 - P(Y_1 \geq \delta))^n。 \end{aligned} \tag{8}$$

可看出上式趨近至 0 若且唯若$nP(Y_1 \geq \delta) \to 0$, 即

$$sP(|X(h) - X(0)| \geq \delta)/h \to 0。 \tag{9}$$

由於$s < \infty$, 再利用條件 (ii)$'$定常增量的性質便得證 (5)。

爲了簡便我們再多做一個假設, 令$X(0) = 0$。此並非一限制, 因若$X(0)$不爲0, 只須考慮過程$\{X(t) - X(0), t \geq 0\}$即可, 此過程仍滿足條件 (i)$'$-(iii)$'$。我們有下述定理。

定理1: 設$\{X(t), t \geq 0\}$爲一滿足條件 (i)$'$-(iii)$'$ 且 $X(0) = 0$之過程, 則存在常數μ及σ, 使得$X(t)$有$\mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$ 分佈。

證明: 對任意$t > 0$及$n \geq 1$, 令$h = t/n$,$Y_i = X(ih) - X((i-1)h)$。則 $X(t) = \sum_{i=1}^n Y_i$, 其中$Y_1, \ldots, Y_n$爲 i.i.d. 之 r.v.'s。令$M_n = \max_{1 \leq i \leq n} Y_i$, 則如前, 利用條件 (iii)$'$, 仍有 $M_n \xrightarrow{P} 0$。由 Breiman (1968) Proposition 9.6 (見下註) 可得$X(t)$有常態分佈。

其次證明存在常數μ及σ, 使得$E(X(t)) = \mu t$,$Var(X(t)) = \sigma^2 t$。令$k_1(t) = E(X(t))$, $k_2(t) = Var(X(t))$。則利用條件 (i)$'$及 (ii)$'$ 便得

$$\begin{aligned} k_1(t+\tau) &= E(X(t+\tau)) \\ &= E(X(t+\tau) - X(\tau)) + E(X(\tau)) \\ &= k_1(t) + k_1(\tau), \end{aligned} \tag{10}$$

及

$$\begin{aligned} & k_2(t+\tau) \\ = \ & E(X(t+\tau) - k_1(t+\tau))^2 \qquad (11) \\ = \ & E(X(t+\tau) - X(\tau) - k_1(t) + X(\tau) - k_1(\tau))^2 \\ = \ & k_2(t) + k_2(\tau)。 \end{aligned}$$

又由條件 (iii)$'$知$\tau \to 0$時,$X(t+\tau) \xrightarrow{d} X(t)$, 由於已證出對$\forall t > 0$,$X(t)$有常態分佈, 因此 $\tau \to 0$時,

$$\begin{aligned} & E(X(t+\tau)) \to E(X(t)), \\ & Var(X(t+\tau)) \to Var(X(t))。 \end{aligned}$$

故$k_1(t)$及$k_2(t)$皆爲連續函數。即得證 (見 Young (1958)) 此二函數皆爲線性函數。

註: 令$S_n = X_1^{(n)} + \cdots + X_n^{(n)}$, 其中$X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$ 爲 i.i.d. 之 r.v.'s。若$S_n \xrightarrow{d} X$, 則$\max\{X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}\} \xrightarrow{d} 0$若且唯若$X$有常態分佈。

經過上述討論, 底下我們正式給布朗運動之定義。

定義1: 一隨機過程$\{X(t), t \geq 0\}$稱爲布朗運動若其滿足:

(i) $X(0) = 0$且 $X(t)$在$t = 0$連續;

(ii) $\{X(t), t \geq 0\}$有定常及獨立增量;

(iii) 對$\forall t > 0$,$X(t)$有$\mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$之分佈, 其中 μ,σ爲二常數。

上述二常數μ及σ^2分別稱爲布朗運動之偏差(drift) 及擴散係數(diffusion coefficient)。若$\mu = 0$且$\sigma^2 = 1$, 則此過程稱爲標準(standard)布朗運動。由於若令$\widetilde{X}(t) = (X(t) - \mu t)/\sigma$, 則過程$\{\widetilde{X}(t), t \geq 0\}$爲一標準布朗運動, 即可將一任意之布朗運動轉換爲一標準布朗運動, 故我們通常只須考慮標準布朗運動。

以隨機漫步之極限來解釋布朗運動, 使我們聯想到 (幾乎所有) 此過程之樣本路

徑應該是一 t之連續函數。另外，由於爲隨機漫步之極限，每一樣本路徑永遠是很尖的 (pointy) 或說是很糾結的 (kinky) 而到處不平滑 (smoo- th)，因此$X(t)$應該 (幾乎) 到處不可微。事實上此二猜測都是對的。

由於$\{X(t), t \geq 0\}$具有獨立增量的性質，因此亦爲一 Markov 過程。又因$X(t)$有常態分佈，期望值爲0，變異數爲t，其 p.d.f. 爲

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}。 \tag{12}$$

再利用定常及獨立增量，對任意$n > 1$及$0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$，可得到$X(t_1), \ldots, X(t_n)$之聯合 p.d.f. 如下。

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ = \ & f_{t_1}(x_1) f_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1) \cdots \\ & f_{t_n - t_{n-1}}(x_n - x_{n-1})。 \end{aligned} \tag{13}$$

有了 (13) 基本上我們可算出任何想要之機率。例如，若要求在給定$X(t) = a$之下 ,$X(s)$之條件分佈,$0 < s < t$，則

$$\begin{aligned} f_{s|t}(x|a) &= \frac{f_s(x) f_{t-s}(a-x)}{f_t(a)} \\ &= \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi s(t-s)}} \exp\{-\frac{x^2}{2s} - \frac{(a-x)^2}{2(t-s)} + \frac{a^2}{2t}\} \\ &= C \exp\{-\frac{t(x - as/t)^2}{2s(t-s)}\}。 \end{aligned} \tag{14}$$

因此對$0 < s < t$，給定$X(t) = a$,$X(s)$亦有常態分佈，期望值及變異數分別爲

$$E(X(s)|X(t) = a) = as/t, \tag{15}$$

$$Var(X(s)|X(t) = a) = s(t-s)/t。 \tag{16}$$

由 (16) 得知給定$X(t) = a$,$X(s)$之條件變異數與a無關。若令$s/t = \alpha$，$0 < \alpha < 1$，則給定$X(t)$,$X(s)$之條件分佈有期望值爲$\alpha X(t)$變異數爲 $\alpha(1-\alpha)t$之常態分佈。

由 (13) 可得$X(t_1), \ldots, X(t_n)$有多變量常態分佈，因此標準布朗運動過程爲一高斯過程 (Gaussian process)。高斯過程之定義爲

定義2: 設有一隨機過程$\{X(t), t \geq 0\}$，若對任意$n > 1$及$0 < t_1 < \cdots < t_n$,$X(t_1), \ldots, X(t_n)$有n變量之常態分佈，則$\{X(t), t \geq 0\}$稱爲高斯過程。

由於多變量常態分佈可由邊際期望值及共變異數的值所決定，因此標準布朗運動也可定義爲一高斯過程，期望值爲$E(X(t)) = 0$，且對$\forall s \leq t$

$$\begin{aligned} & Cov(X(s), X(t)) \\ = \ & Cov(X(s), X(s)) \\ & \quad + Cov(X(s), X(t) - X(s)) \\ = \ & s, \end{aligned}$$

其中最後一等式用到$Var(X(s)) = s$及獨立增量的性質。

定理2: 一高斯過程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 爲標準布朗運動，若且唯若 $E(X(t)) = 0$且$Cov(X(s)$,$X(t)) = \min\{s, t\}$,$\forall s, t \geq 0$。

系理1: 若$\{X(t), t \geq 0\}$ 爲偏差爲μ， 擴散係數爲σ^2之布朗運動 ，則$Cov(X(s), X(t)) = \sigma^2 \min\{s, t\}$。

參考文獻

布朗運動發展至今, 此過程及它的各種推廣, 在許多領域諸如經濟學、交換理論 (communication theory)、生物學、管理科學、數理統計及量子力學中都有廣泛的應用。

Karlin and Taylor (1975) Chapter 7 對布朗運動做了很詳盡的介紹, 本文很多題材取自該處。Karlin and Taylor (1980) Chapter 15 也有許多關於布朗運動之例子及應用。Lévy(1954) 一書中有關布朗運動的章節不論在觀念及結果方面都非常豐富。Itô and McKean (1965) 及 Freedman (1971) 是兩本較深但也很重要的書。李育嘉 (民國74年) 及謝南瑞 (民國81年) 也是兩篇值得參考的相關著作。

1. Breiman, L. (1968), Probability, Addison-Wesley, Reading, Mass.
2. Bachelier, L. (1900), Théorie de la spécul- ation, Ann. Éc. Norm. Sup. s.3 17, 21-86.
3. Einstein, A. (1905), Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, Ann. Phys., 17.
4. Itô, K. and McKean, H. P. Jr. (1965), Diffusion Processes and Their Sample Paths, Springer-Verlag, Berlin.
5. Karlin, S. and Taylor, H. M. (1975), A First Course in Stochastic Processes, 2nd ed., Academic Press, New York.
6. Karlin, S. and Taylor, H. M. (1980), A Second Course in Stochastic Processes, Academic Press, New York.
7. Lévy, P. (1954), Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires, 2nd ed., Ganthier-Villars, Paris.
8. Paley, R., Wiener, N., and Zygmund, A. (1933), Note on random functions, Math. Zeit., 37, 647-688.
9. Wiener, N. (1923), Differential space, J. Math. Phys., 2, 131-174.
10. Young, G. S. (1958), The linear functional equation, Amer. Math. Month. 65, 37-38.
11. 李育嘉 (民國74年), 漫談布朗運動, 數學傳播, 第9卷第3期,22-31。
12. 謝南瑞 (民國81年), 若干機率論與分析學的關連與互動, 數學傳播第16卷第4期。

—本文作者任教於國立中山大學應用數學系—