若干機率論與分析學的關連與互動

謝南瑞

1. 前言

中山大學黃文璋教授囑筆者寫些有關機率論的可讀之文。坊間有關趣味機率論之書藉多矣, 不勞我再添一筆。或許寫些進級的東西吧!? 機率論自1933年由 A. N. Kolmogonov 提出植基於測度論的公設體系以來, 不到60年間其已密切關連於各數學分枝; 豈不見 隨機分析、隨機幾何、隨機微分方程式等之名乎。另一方面, 機率論之應用層面亦大有進展; 豈不見隨機微分方程在金融之應用乎。在此短文中, 筆者簡略談些機率論與函數論的一些關連。雖是個研究級的主題, 但不須太多的術語即可領會。

在上下文中, 我們有多處使用____號。這或者代表是某些 (自認) 幽默的用語, 或者代表是某些須嚴格定義的數學名詞, 等等。

2. 處處不可微分的連續函數

在高微教程中, 我們都習知可利用三角級數造出 Weierstrass 函數。這是個處處不可微分的連續函數。顯然, 這是個相當病態的函數。如果 Newton 不幸知道這個函數的話, 或許他會落入邏輯迷陣中, 而無微積分的創見了。我們不禁會問:

有無其它處處不可微分的連續函數? 利用機率論的一個經典結果, 我們可以答曰: 有, 且有許多。

定理 (Lévy, Paley, Wiener, Zygmund,...): 幾乎每條Brown 路徑 $W_t(w)$都是處處不可微分。我們甚至有更強的結果: 幾乎每條Brown 路徑$W_t(w)$都滿足

$$\limsup_{\substack{0<s<t\leq 1\\ t-s=h\downarrow 0}} \frac{|W_t(w)-W_s(w)|}{(2h\ln(1/h))^{1/2}} = 1。$$

或許你會不以爲然地反問: 何以你我要沈溺於病態的函數中!? 容我敍述 B. Mandelbrot 的觀點: 由自然現象之研究中所得的曲線與圖形, 絕大多數是病態的(在微小尺度下)。這個觀點, 也就是 碎形幾何學的濫觴。後者則是混沌學說的基礎; 誠所謂 What a mass 是也。

3. 由 Brown 運動至 Lévy 過程

英國植物學工作者 Robert Brown, 於18- 28年發表有關懸浮於水中之花粉的不規

則運動的觀察論文。從而我們有 Brwon 運動這個物 理名詞。它的數學建構是什麼? 附帶一提, 愛因斯坦憑其智慧, 不須嚴密的數學, 即已推導出 有意義的有關Brown 運動之物理結果。以$X(t)$,$t \in [0,\infty)$, 表時軸 $[0,\infty)$中某個時刻t之質點 (例, 花粉) 位置。顯然, 我們只能視$X(t)$爲 隨機的; 亦即, 我們只能談$X(t)$的 機率分佈而無法標示其至某個精確值(否則, 花粉就不是附有精靈似地活動, 引Brown 原文之用語)。我們以 $X(t,w)$或$X_t(w)$,$w \in (\Omega,\mathcal{F},P)$表此隨機性。視$X_t(w)$爲一隨機運動 (隨時間$t$而演化), 則爲所謂 隨機過程矣。當我們固定$w$, 而考慮$t \to X_t(w)$, 則我們得到一條樣本路徑。對每個$[0,\infty)$之子區間$I=[a,b]$, 我們以$X(I)$或$X[a,b]$表增量$X(b)-X(a)$。

假定: 1° 對任意k ($k \geq 2$) 個不重疊的$I_1,\ldots,I_k$,$X(I_1),\ldots,X(I_k)$爲獨立的。

2° $X[a,b]$與$X[0,b-a]$有相同的機率分佈。

我們聲明: 上述的假定多少是自然且合理的 —以物理眼光思之。2° 表示增量$X[a,b]$ 之機率分佈不因時間的推移而改變, 所謂 定常也。1° 表示質點運動純由外在介質而引發, 而質點自身全無貢獻 (無精靈附體) 也。

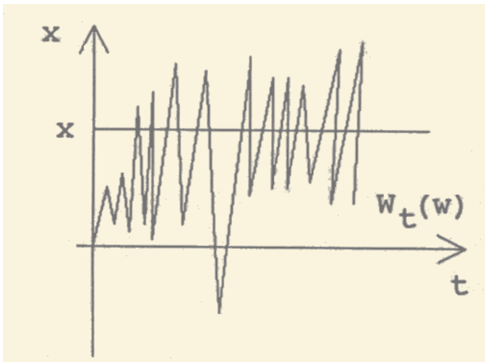
定理 (Ito, Lévy,...): 若隨機過程$X(t)$滿足上述兩假定且每條樣本路徑皆爲連續, 則增量$X[a,b]$爲 Gauss 分佈。

我們知道, 任一 Gauss 分佈皆由其期望值與變異數所決定。當上述定理中之$X[a,b]$爲期望值 0 且變異數$b-a$時, 我們得到所謂Wiener 過程, 此爲 Brown 運動的數學模型 (N. Wiener 於1923年首先研究此模型, 故名之以紀念)。

一般而言, 任一滿足上述兩假定的隨機過程, 我們皆可設定其樣本路徑爲 右連續且 左極限存在之函數; 且名之爲Lévy 過程, 以紀念偉大 (但不幸) 的法國機率學派開山祖師 Paul Lévy。除了某些特殊情形 (例,Wiener 過程與 Poisson過程) 外,Lévy 過程的樣本路徑之不連續點集是可數但處處稠密的。這又獲得了? 多病態的函數。

4. 局部時

我們將 Witner 過程的樣本路徑稱之爲 Brown 路徑。考慮一種情況的 Brown 路徑 $W_t(w)$ 的平準集$L_x(w)=\{t \in [0,1] | X_t(w)=x\}$,$x \in \mathbf{R}$。



定理 (Lévy,...): 幾乎每條 Brown 路徑的每個平準集都是一個完美 (即, 自我稠密之閉集) 且其 Lebesgue 測度爲 0。

我們知道, 在函數論中 Cantor 集是個零測度的完美集。由上述定理, 我們獲

得許多此種病態的點集。我們可證明, 上述定理中之水平集的 Hausdorff 維度爲1/2, 是以其不同於 Cantor 集。客我再敍述一次:B. Mandelbrot 視病態的函數與病態的點集爲新科學(碎形與混沌) 的基石。

我們將$[0,\infty]$視爲時軸,Lebesgue 測度是上面最自然的時測 (就分析學眼光)。但, 上述定理卻告訴我們,Lebesgue 測度並非測量有關 Brown 路徑之行爲的精良時計。

定理 (Lévy, Trotter,...): 固定 $x \in \mathbf{R}$; 對幾乎每條 $W_t(w)$, 我們有惟一的加性泛函 $\ell_x(t, w)$。此泛函於時刻 t 增值若且唯若 $W_t(w) = x$。再者, 可取成$\ell_x(t,w)$對(x,t)爲連續。

$\ell_x(t)$ 即 P. Lévy 所謂的 局部時。其也證明了

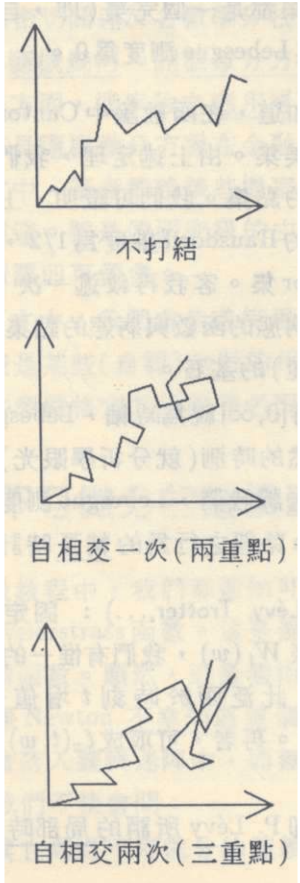
$$\ell_x(t,w) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t 1_{\{|W_s(w)-x|\le\varepsilon\}}\,\mathrm{ds}。$$

局部時是典型的隨機時計; 亦即, 我們在每條樣本路徑上都附上一個時計以測度其行爲!

對一般 Lévy 過程的局部時問題, 則涉及了相關於 Lévy 過程的 機率位勢理論。直到前些年, 劍橋大學的M. Barlow 才多少完整地解決此問題。

5. 路徑的自交

我們考慮平面或空間中的 Brown 路徑, 且問道: 它會自我打結 (自交) 嗎? 若有 k個時刻 $t_1,\ldots,t_k$使$W_{t_1}(w) = \ldots = W_{t_k}(w) = x$, 則稱$x$爲一個路徑的$k$ – 重點。如圖:



定理 (Dvoretzky, Erdös, Kakutani, Taylor, ...): 幾乎每條平面 Brown 路徑都有k – 重點 (任意$k \ge 2$), 幾乎每條空間 Brwon 路徑都有兩重點但不可能有三重點。

與前幾節不同的是, 我們極容易地畫出 (造出) 有自交的函數 (路徑)。因之, 上述定理似乎只是 純機率的樂趣了。不然, 上述50 年代的結果到了60與 70年代卻有了內涵。在從事長鏈聚合物的研究中, 化學工作者習慣將此種聚合物鏈算成一個 Brown 路徑。但上述定理卻告訴我們, 這種看法是有問題的—空間中的同一位置不能被兩個碳原子佔用; 亦即, 鏈必須是不打結的!解決的方法

是: 考慮 自我迴避的Brown 路徑而非尋常 Brown 路徑。這項研究, 至今仍是一個尖端問題。

一般 Lévy 過程的自交問題, 也是到前幾年才有令人滿意的結果, 筆者個人在這方面有些許貢獻。

6. 後語

在分析學 (函數論) 中, 我們著重函數的規則性, 例如可微分性與囿變性。一些病態的函數與集合, 例如前述的Weierstrass 函數與 Cantor 集, 都被視為反例 (=末流) 而已。在機率論中, 我們考慮隨機過程的樣本路徑, 卻儘多是病態的, 或應云, 成常態的了!對分析學工作者為病態, 對機率論工作者為常態, 兩態的位相遷移一直是筆者興趣所在。碎形理論與混沌理論之發展, 提示我們這非僅是數學的品味而實在是兼及實用的層面。莘莘學子, 亦有興趣乎!?

—本文作者任教於國立台灣大學數學系—