順序統計量性質

黃文璋

本文介紹隨機過程中一有用的性質, 即順序統計量性質 (order statistic property)。我們先用到達過程 (arrival process) 來定義 Poisson 過程。

定義1: 設$\{A(t), t \geq 0\}$ 爲定義於某機率空間之一隨機過程, 且設$A(t)$ 對t 非漸減, 取值在非負整數, 又設$A(0) = 0$。假設對幾乎所有樣本路徑,$A(t)$ 爲一每次只跳升一個單位的右連續的階梯函數, 且$A(t) < \infty$, $\forall t > 0$。則$\{A(t), t \geq 0\}$稱爲一到達過程。

定義2: 一個到達過程$\{A(t), t \geq 0\}$ 稱爲一參數爲λ, $\lambda > 0$, 之齊性Poisson 過程, 若下述二條件成立:

(i) 此過程有獨立增量;

(ii) 對任意$s, t \geq 0$,$A(s + t) - A(s)$有參數爲λt之 Poisson 分佈。

定義3: 一個到達過程稱爲一非齊性 Poisson 過程, 若下述二條件成立:

(i) 此過程有獨立增量;

(ii) 對任意 $s, t \geq 0$,$A(s + t) - A(s)$ 有參數爲$a(s + t) - a(s)$ 之 Poisson 分佈, 其中$a(t) = E(A(t))$稱爲期望函數, 爲一非漸減之連續函數。

其中一連續時間之隨機過程$\{X(t), t \in T\}$ 稱爲有獨立增量(independent increments) 如果對$\forall t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, 隨機變數

$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1}) \tag{1}$$

爲獨立。

齊性 Poisson 過程與許多重要的分佈 (如 Poisson、指數、gamma 及常態分佈) 均有密切的關係, 底下給與二項分佈及均勻分佈之一些關係。令$\{A(t), t \geq 0\}$ 爲一參數λ 之 Poisson 過

程, 又令$\{X_n, n \geq 1\}$ 表到達時距之數列,$\{S_n, n \geq 0\}$ 表到達時間之數列。即X_1 爲第一個事件發生之時刻, 且對$\forall n \geq 2$,X_n 爲第 $(n-1)$個與第n 個事件間之時間長度。而$S_0 = 0$,$S_n = X_1 + \cdots + X_n$,$n \geq 1$。

設 $0 \leq u \leq t$ 且 $k \leq n$, 則由獨立增量的性質可導出

$$\begin{aligned} & P(A(u)=k|A(t)=n) \\ = \; & P(A(u)=k, A(t)-A(u)=n-k)\Big/P(A(t)=n) \\ = \; & \frac{(e^{-\lambda u}(\lambda u)^k/k!)[e^{-\lambda(t-u)}(\lambda(t-u))^{n-k}/(n-k)!]}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!} \\ = \; & \binom{n}{k}\Big(\frac{u}{t}\Big)^k\Big(1-\frac{u}{t}\Big)^{n-k}。 \end{aligned} \tag{2}$$

即若問給定至時間t已有n 個到達, 則其中會有多少個到達是在u之前發生? 答案爲有 $\mathcal{B}(n, \frac{u}{t})$ 分佈。在 (2) 式中若令$k = n = 1$, 即得

$$P(X_1 \leq u|A(t)=1) = P(A(u)=1|A(t)=1) = \frac{u}{t}。 \tag{3}$$

也就是說, 若已知至時間t恰有一事件發生, 則此事件之發生時刻爲在$[0, t]$上之均勻分佈。此結果是合理的, 因齊性 Poisson 過程有獨立及定常增量, 故$[0, t]$之每一等長子區間似乎應有相同的機率包含此點, 易言之此點均勻分佈在$[0, t]$上。

前述結果可加以推廣, 而導出 Poisson 過程具有一重要的順序統計量性質。首先我們說明順序統計量的觀念。

設 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 爲n個隨機變數, 則$Y_{(1)}$, $Y_{(2)}$, $\ldots$, $Y_{(n)}$ 稱爲對應於$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 之順序統計量, 其中$Y_{(i)}$爲$Y_1, \ldots, Y_n$中之第i個小的值,$1 \leq i \leq n$。若Y_i's 爲 i.i.d. (獨立且有共同分佈) 之連續型隨機變數, 其共同之 p.d.f.(機率密度函數) 爲f_Y, 則順序統計量$Y_{(1)}, \ldots, Y_{(n)}$之聯合 p.d.f. 爲 (可參考 Hogg and Craig(1978))

$$f(y_1, \ldots, y_n) \;=\; n!\prod_{i=1}^{n} f_Y(y_i), \quad y_1 < y_2 < \ldots < y_n。 \tag{4}$$

例如若Y_i,$i = 1, \ldots, n$, 皆在$[0, t]$ 上均勻分佈, 則$Y_{(1)}, \ldots, Y_{(n)}$ 之聯合 p.d.f. 爲$f(y_1, \ldots, y_n) = n!/t^n$,$0 \leq y_1 < y_2 < \ldots < y_n \leq t$。

齊性 Poisson 過程具有隨機性 (常被稱爲 random process), 此因其可視爲在$[0, \infty)$ 上有無限多個點"隨機"地散佈著。更明確地說我們有下述定理, 此爲 Epstein(1960) 爲檢定一更新過程是否爲 Poisson 過程所證出。

定理1: 設$\{A(t), t \geq 0\}$ 爲一參數λ 之 Poisson 過程, 則在給定$A(t) = n$ 之條件下,n個到達時刻$S_1, \ldots, S_n$之分佈, 與n 個獨立且皆在$[0, t]$上均勻分佈之隨機變數的順序統計量之分佈相同。

證明: 我們將求給定$A(t) = n$,$S_1, \ldots, S_n$ 之條件 p.d.f.。設 $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1} = t$, 且取$h_i > 0$充分小使得$t_i + h_i < t_{i+1}$, $\forall i = 1, \ldots, n$, 則顯然

$$
\begin{aligned}
& P(t_i \leq S_i \leq t_i + h_i, i = 1, \ldots, n | A(t) = n) \\
= \quad & \frac{P(\text{在}\forall[t_i, t_i + h_i]\text{中恰有一事件,}[0, t]\text{之其餘部分沒有事件})}{P(A(t) = n)} \\
= \quad & \frac{(\prod_{i=1}^{n} \lambda h_i e^{-\lambda h_i}) e^{-\lambda(t - h_1 - h_2 - \ldots - h_n)}}{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n!} \\
= \quad & \frac{n!}{t^n} \prod_{i=1}^{n} h_i\text{。}
\end{aligned} \tag{5}
$$

故

$$
\frac{P(t_i \leq S_i \leq t_i + h_i, i = 1, \ldots, n | A(t) = n)}{h_1 \ldots h_n} \; = \; \frac{n!}{t^n},
$$

同時令$\forall h_i \to 0$,$i = 1, \ldots, n$, 即得給定$A(t) = n$,$S_1, \ldots, S_n$之條件 p.d.f. 爲

$$
f(t_1, \ldots, t_n) \; = \; \frac{n!}{t^n}, \qquad 0 \leq t_1 < \ldots < t_n \leq t, \tag{6}
$$

得證。

註: 直觀上通常我們說, 在給定n個事件於$[0, t]$ 間發生之條件下, 此n 個事件之發生時刻$S_1, \ldots, S_n$, 若不考慮其大小順序, 則其分佈就如n 個獨立且在$[0, t]$上均勻分佈之隨機變數一般。易言之, 若我們有一組n 個$[0, t]$ 上均勻分佈之獨立隨機變數之觀測值, 將其按大小排列, 則可視爲一給定$A(t) = n$ 之齊性 Poisson 過程的n個到達點, 這也是一種產生齊性 Poisson 過程的方法。另外 Karlin and Taylor (1975) Chapter 4 Theorem 2.3, 用求分佈函數的方法來證明本定理也可參考。

仿照定理 1 我們可得到下述類似的結果。

系理1: 觀測一參數爲λ之 Poisson 過程直至第n個事件發生 (n爲事先給之一正整數), 則在$S_n = t$之條件下, 此$(n-1)$個到達時刻$S_1, \ldots, S_{n-1}$之分佈, 與$(n-1)$個獨立且皆在$[0, t]$上均勻分佈之隨機變數的順序統計量之分佈相同。

許多作者如 Epstein (1960) 及 Parzen (1962) 等, 藉助定理1來檢定一過程是否爲 Poisson過程, 其想法如下。

假設我們觀測一齊性 Poisson 過程由時間0至t, 設在這期間共有n個事件發生, 且其發生時刻爲$0 < S_1 < S_2 < \ldots < S_n \leq t$, 則

$$T_n \ = \ \sum_{i=1}^{n} S_i \ \stackrel{d}{=} \ \sum_{i=1}^{n} U_i,$$

其中$U_i,i = 1, \ldots, n$, 爲n個 i.i.d. $\mathcal{U}[0,t]$之 r.v.'s 。利用中央極限定理, 當n充分大時,T_n近似於常態分佈, 期望值爲$E(T_n) = nE(U_1) = nt/2$, 變異數爲$\mathrm{Var}(T_n) = n\,\mathrm{Var}(U_1) = nt^2/12$。

例如有一過程, 設由時間$t = 0$至10中, 共有$n = 12$個事件發生。則因若此爲 Poisson 過程, 由上面推導知, 事件發生時刻之和T_{12}近似於$\mathcal{N}(60{,}100)$ 分佈。因此若T_{12}滿足

$$60 - 1.96 \cdot 10 \ \leq \ T_{12} \ \leq \ 60 + 1.96 \cdot 10,$$

則在顯著水準(level of significance) 爲95%之下, 我們接受觀測的事件是源自 Poisson 過程的假設。

前面提到顯著水準爲95%, 表若此過程確爲 Poisson, 則我們會接受"此爲 Poisson 過程"的假設之機率爲95%。但是值得注意的是, 若無定理1之逆定理 (假設有其他過程亦具有定理1所述 Poisson 過程的性質), 即使假設此過程爲更新過程, 我們也有可能接受此爲另一過程的假設。

現在我們來給一到達過程具有順序統計量性質的定義。

定義4: 設$\{A(t), t \geq 0\}$ 爲一到達過程。若對$\forall n \geq 1$, 只要$P(A(t) = n) > 0$, 給定$A(t) = n$, 相繼的到達時刻$S_1, \ldots, S_n$之聯合分佈與n 個 i.i.d. 之 r.v.'s, 且其共同分佈$F_t(x)$滿足$F_t(0) = 0$,$F_t(t) = 1$, 之順序統計量相同, 則稱此過程*有順序統計量性質*。

在期望函數$m(t) = E(A(t))$滿足$0 < m(t) < \infty$,$\forall t > 0$, 之假設下, 我們先列出兩個關於順序統計量性質的結果 (見 Crump (1975))。

定理2:設$\{A(t), t \geq 0\}$ 有順序統計量性質且對應之 d.f. 爲$F_t(x)$ 則

(i) $F_t(x) = m(x)/m(t), 0 \leq x \leq t$;

(ii) $m(t)$ 爲一連續函數。

證明: 對$\forall x \in [0, t]$,

$$m(x) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} iP(A(x) = i | A(t) = k) P(A(t) = k)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k} i\binom{k}{i}(F_t(x))^i(1-F_t(x))^{k-i}P(A(t)=k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} kF_t(x)P(A(t)=k) \qquad (7) \\ &= F_t(x)m(t), \end{aligned}$$

得證 (i)。其次若$m(t)$在$x_0 \in (0,t]$不連續, 則由 (i) 知F_t在x_0給一正的機率, 因而在x_0會有兩個以上之跳升的機率爲正, 這與$\{A(t), t \geq 0\}$ 爲到達過程之假設不合, 得證 (ii)。

定理3: 設$\{A(t), t \geq 0\}$ 有順序統計量性質, 則$\{A(t), t \geq 0\}$ 爲一 Markov 過程。

證明: 對任意$k > 1, 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} = t$, 及整數 $0 = n_0 \leq n_1 \leq \ldots \leq n_k \leq n_{k+1} = n$, 我們有

$$\begin{aligned} & P(A(t)=n|A(t_i)=n_i, i=1,\ldots,k) \\ = \ & \frac{P(A(t_i)=n_i, i=1,\ldots,k|A(t)=n)P(A(t)=n)}{P(A(t_i)=n_i, i=1,\ldots,k-1|A(t_k)=n_k)P(A(t_k)=n_k)} \\ = \ & \frac{\binom{n}{n_1, n_2-n_1, \ldots, n-n_k}\prod_{i=1}^{k+1}((F_t(t_i)-F_t(t_{i-1}))^{n_i-n_{i-1}}P(A(t)=n)}{\binom{n_k}{n_1, n_2-n_1, \ldots, n_k-n_{k-1}}\prod_{i=1}^{k}(F_{t_k}(t_i)-F_{t_k}(t_{i-1}))^{n_i-n_{i-1}}P(A(t_k)=n_k)} \\ = \ & \frac{\binom{n}{n_k}(m(t_k))^{n_k}(m(t)-m(t_k))^{n-n_k}P(A(t)=n)}{(m(t))^n P(A(t_k)=n_k)} \\ = \ & P(A(t)=n|A(t_k)=n_k), \end{aligned}$$

其中由第二個至第三個等式我們乃利用定理2 $F_t(x) = m(x)/m(t)$, 即得證。

下述定理可見 Feigin(1979) 由於證明略爲煩瑣在此從略。利用 Freedman(1962) 之結果, Huang and Shoung (1991) 提供一較簡短的證法。

定理4: 設$A \equiv \{A(t), t \geq 0\}$爲一到達過程, 且$\lim_{t\to\infty} m(t) = \infty$。則$A$有順序統計量的性質, 若且唯若存在一參數爲1之齊性 Poisson 過程N及一與N獨立之非負 r.v. W, 而N, W及A皆定義在同一機率空間, 使得

$$A(t) \ = \ N(Wm(t)), t \geq 0, \text{ a.s.。} \qquad (8)$$

註: 可看出$E(W)=1$。又利用定理2(i), 不難導出$F_t(x)=x/t$(即在 $[0,t]$上之均勻分佈) 若且唯若 $m(t)=at$, 其中a爲某大於0之常數。亦即$F_t(x)=x/t$ 時 ,(8) 可簡化爲

$$A(t) \ = \ N(Wat), t\geq 0, \ \text{a.s.。} \tag{9}$$

底下我們看如何利用 (8) 證明當$\lim\limits_{t\to\infty}(t)=\infty$ 時, 若一到達過程$\{A(t),t\geq 0\}$有順序統計量的性質, 必亦有 Markov 性質。事實上只要先給定W, 便可得

$$\begin{aligned} & P(A(t)=n|A(t_i)=n_i, i=1,\ldots,k) \\ = \ & \frac{E(e^{-Wm(t)}W^n)}{E(e^{-Wm(t_k)}W^{n_k})}\cdot\frac{(m(t)-m(t_k))^{n-n_k}}{(n-n_k)!} \\ = \ & P(A(t)=n|A(t_k)=n_k)\text{。} \end{aligned} \tag{10}$$

當$m'(t)$ 存在時, 由 (10) 亦可求出在時間t會有第$(n+1)$ 個出生之出生率 $\alpha_n(t)$如下。

$$\begin{aligned} \alpha_n(t) \ &= \ \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}P(A(t+h)=n+1|A(t)=n) \\ &= \ \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{E(e^{-Wm(t+h)}W^{n+1})}{E(e^{-Wm(t)}W^n)}\cdot(m(t+h)-m(t)) \\ &= \ m'(t)\frac{E(e^{-Wm(t)}W^{n+1})}{E(e^{-Wm(t)}W^n)} \\ &= \ -\frac{d}{dt}\log|\phi^{(n)}(m(t))|, \end{aligned} \tag{11}$$

其中

$$\phi(u) \ = \ E(e^{-uW}), \qquad \phi^{(n)}(u) \ = \ (-1)^n E(e^{-uW}W^n)\text{。} \tag{12}$$

定理4指出當$\lim\limits_{t\to\infty}m(t)=\infty$時, 一到達過程有順序統計量的性質若且唯若其爲一 (可能要經時間尺度變換) 混合 Poisson 過程。當$\lim\limits_{t\to\infty}m(t)=\gamma<\infty$ 時, 順序統計量性質則會導至 Kallenberg (1976) 所稱的混合樣本過程 (mixed sample process)。

定義5: 設Z爲一取非負整數值之 r.v.,F爲一連續之 d.f. 且$F(0)=0$ 。令$D(0)=0$且

$$D(t) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{, 若}Z=0, \\ \\ \#\{j|T_j\leq t, j=1,\ldots,k\} & \text{, 若}Z=k\geq 1, \end{cases} \tag{13}$$

其中對$\forall k\geq 1$, 當$Z=k$時,$T_1,\ldots,T_k$爲以F爲其共同分佈之 i.i.d. 的 r.v.'s。則$\{D(t),t\geq 0\}$ 稱爲一 (基於 d.f.F及 r.v.Z之) 混合樣本過程。

混合樣本過程可描述諸如底下的情況。假設在時間$t=0$時有Z個粒子 (Z爲一 r.v.), 粒子的壽命設爲 i.i.d., 以F爲其共同 d.f., 則$D(t)$ 即等於在$(0,t]$中死掉的粒子數。

由於假設F爲連續, 混合樣本過程之幾乎所有樣本路徑每次只跳升一個單位, 且由其定義可知此過程之樣本路徑爲非漸減及右連續。另外, 若令

$$g(s) \ = \ E(s^Z), |s| \le 1, \tag{14}$$

表Z之母函數, 則易證

$$E(s^{D(t)}) \ = \ g(1-(1-s)F(t)), t \ge 0。 \tag{15}$$

底下定理取自 Puri (1982)。

定理5: 混合樣本過程$\{D(t), t \ge 0\}$ 有 Markov 及順序統計量的性質。
證明: 若$E(Z) = g'(1) < \infty$, 則由 (15) 知

$$E(D(t)) \ = \ g'(1)F(t) < \infty, \forall t > 0, \tag{16}$$

此時利用定理2, 若能證出$\{D(t),\ t \ge 0\}$ 具有順序統計量性質, 便可得到其亦有 Markov 性質。底下針對一般的情況我們直接證明$\{D(t), t \ge 0\}$ 有前述二性質。

對任意$k > 1$及$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} = t$,$0 = n_0 \le n_1 \le \ldots \le n_k \le n_{k+1} = n$, 由$D(t)$ 之定義可得

$$\begin{aligned}
& P(D(t_i) = n_i, i = 1, \ldots, k+1) \\
= & \sum_{m=n}^{\infty} P(D(t_i) = n_i, i = 1, \ldots, k+1, Z = m) \\
= & \sum_{m=n}^{\infty} P(D(t_i) = n_i, i = 1, \ldots, k+1 | Z = m) P(Z = m) \\
= & \sum_{m=n}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^{k+1} \binom{m - n_{i-1}}{n_i - n_{i-1}} (F(t_i) - F(t_{i-1}))^{n_i - n_{i-1}} \right] (1 - F(t))^{m-n} P(Z = m) \\
= & \prod_{i=1}^{k+1} \frac{(F(t_i) - F(t_{i-1}))^{n_i - n_{i-1}}}{(n_i - n_{i-1})!} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{m!}{(m-n)!} (1 - F(t))^{m-n} P(Z = m) \\
= & \prod_{i=1}^{k+1} \frac{(F(t_i) - F(t_{i-1}))^{n_i - n_{i-1}}}{(n_i - n_{i-1})!} g^{(n)}(1 - F(t)),
\end{aligned} \tag{17}$$

其中

$$g^{(n)}(t) \ = \ \sum_{m=n}^{\infty} \frac{m!}{(m-n)!} t^{m-n} P(Z = m) \tag{18}$$

表母函數$g(t)$之n次導數。同理可求得$P(D(t_i)=n_i,i=1,\ldots,k)$, 若此項爲 正, 則由此項與 (17) 便得

$$\begin{aligned}
&P(D(t)=n|D(t_i)=n_i,i=1,\ldots,k)\\
=\ &\frac{(F(t)-F(t_k))^{n-n_k}}{(n-n_k)!}\cdot\frac{g^{(n)}(1-F(t))}{g^{n_k}(1-F(t_k))}。
\end{aligned}\tag{19}$$

仿上述方法可求出$P(D(t)=n|D(t_k)=n_k)$, 而此值恰與 (19) 之右側相同。即得證 $\{D(t)$ $,t\geq 0\}$有 Markov 性質。

次對任意$n\geq 1$及$0<t_1<t_2<\cdots<t_n<t$, 同理可得

$$\begin{aligned}
&P(t_i<S_i\leq t_i+dt_i,i=1,\ldots,n,D(t)=n)\\
=\ &\sum_{m=n}^{\infty}P(t_i<S_i\leq t_i+dt_i,\ i=1,\ldots,n,D(t)=n|Z=m)P(Z=m)\\
=\ &\sum_{m=n}^{\infty}\frac{m!}{(m-n)!}\left[\prod_{i=1}^{n}F(dt_i)\right](1-F(t))^{m-n}P(Z=m)\\
=\ &g^{(n)}(1-F(t))\prod_{i=1}^{n}F(dt_i),
\end{aligned}\tag{20}$$

其中$S_1<S_2<\cdots<S_n$表$\{D(t),t\geq 0\}$之首n個跳升時刻,$F(dt_i)=F(t_i+dt_i)-F(t_i)$。又由 (17) 可得

$$P(D(t)=n)\ =\ \frac{1}{n!}(F(t))^n g^{(n)}(1-F(t))。\tag{21}$$

由 (20) 及 (21) 便得

$$P(t_i<S_i\leq t_i+dt_i,i=1,\ldots,n|D(t)=n)\ =\ n!\prod_{i=1}^{n}\frac{F(dt_i)}{F(t)}。\tag{22}$$

上式即對應n個 i.i.d. 以$F(x)/F(t),x\in[0,t]$, 爲其共同分佈之隨機變數的順序統計量之分佈。故得證$\{D(t),t\geq 0\}$ 有順序統計量的性質。

前述 Markov 過程$\{D(t),t\geq 0\}$ 亦可視爲一出生過程。當$F'(t)=f(t)$存在, $\forall t\geq 0$, 且$P(Z\geq n)>0$, 利用 (17) 我們可求出在時間t會有第$(n+1)$個出生之出生率$\rho_n(t)$如下。

$$\begin{aligned}
\rho_n(t)\ &=\ \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}P(D(t+h)=n+1|D(t)=n)\\
&=\ \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{(F(t))^n(F(t+h)-F(t))g^{(n+1)}(1-F(t+h))/n!}{(F(t))^n g^{(n)}(1-F(t))/n!}\\
&=\ \frac{g^{(n+1)}(1-F(t))}{g^{(n)}(1-F(t))}f(t),n=0,1,2,\ldots。
\end{aligned}\tag{23}$$

換句話說, 在以上之假設下, 混合樣本過程與一以出生率如 (23) 之出生過程所描述的過程是一樣的。

綜上所述, 我們列出一刻劃順序統計量性質的定理, 證明見 Puri(1982)。

定理6: 設$A=\{A(t),t\geq 0\}$ 有順序統計量性質。若$\lim\limits_{t\to\infty} m(t)=\infty$, 則定理4之結果成立。若$\lim\limits_{t\to\infty} m(t)=b<\infty$, 則存在一取值在非負整數之 r.v. Z, 與A定義在同一機率空間, 且若令

$$\widetilde{F}(x)=\begin{cases} m(x)/b, & x\geq 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \tag{24}$$

及令$\widetilde{D}(t)$表依據Z及$\widetilde{F}$所定義出之混合樣本過程, 則

$$A(t) \;=\; \widetilde{D}(t), a.s., \forall t\geq 0。 \tag{25}$$

上述這幾個關於順序統計量性質的結果, 都是限制在期望函數$0<m(t)<\infty,\forall t>0$, 的條件下。至於較一般的情況, 若允許$m(t)$可以等於$\infty$, 可參考 Puri (1982)。Puri 亦給出一(非齊性) 出生過程會有順序統計量的性質, 其出生率要滿足之充要條件。另外我們考慮的過程都是到達過程, 即$A(0)=0$, 若$A(0)\neq 0$, 則令 $\widetilde{A}(t)=A(t)-A(0)$, 如此$\widetilde{A}(0)=0$, 便可對過程$\widetilde{A}(t)$討論其順序統計量性質。

最後在$0<m(t)<\infty,\forall t>0$, 之假設下,Crump(1975) 證出一齊性出生過程, 若有順序統計量的性質, 則其出生率必爲下述三種形式之一:

$$\lambda_i \;=\; \lambda,\ i=0,1,\ldots, \tag{26}$$

$$\lambda_i \;=\; \lambda+i\alpha,\ i=0,1,\ldots, \tag{27}$$

$$\lambda_i \;=\; (b-i)\alpha,\ i=0,1,\ldots, \tag{28}$$

其中$\alpha>0$,b爲正整數,λ_i表第$(i+1)$個出生之出生率。上述第一種情況即爲參數λ之 Poisson 過程; 第二種情況即爲有移民進來之線性出生過程 (即 Yule 過程), 移民及出生率分別爲λ及α; 在第三種情況,$A(t)$表一死亡率爲α之線性死亡過程, 一開始有$A(0)=b>0$, 至時間t之死亡數。當然極容易可驗證上述三種過程皆具有順序統計量之性質。

底下我們來看一些應用的例子。

(A) 設顧客依一參數爲λ之齊性 Poisson 過程 $\{A(t),t\geq 0\}$進入某車站, 若車子在時間t離開車站, 我們想求在$(0,t)$間到達顧客之等待時間總和的期望值$E(\sum_{i=1}^{A(t)}(t-S_i))$, 其中$S_i$表

第i個顧客之到達時刻。先給定$A(t)$, 則

$$\begin{aligned} E\Big(\sum_{i=1}^{A(t)}(t-S_i)|A(t)=n\Big) &= nt-E\Big(\sum_{i=1}^{n}S_i|A(t)=n\Big) \\ &= nt-E\Big(\sum_{i=1}^{n}U_{(i)}\Big) \\ &= nt-E(\sum_{i=1}^{n}U_i\Big) \\ &= nt-nt/2 \\ &= nt/2。\end{aligned}$$

此處用到給定$A(t)=n$,$S_1,\ldots,S_n$之聯合分佈與$U_{(1)},\ldots,U_{(n)}$ 之聯合分佈相同, 其中$U_{(1)}\leq\cdots\leq U_{(n)}$ 爲n個 i.i.d. $\mathcal{U}(0,t)$之隨機變數$U_1,\ldots,U_n$之順序統計量, 另外$\sum_{i=1}^n U_{(i)}$ 當然等於$\sum_{i=1}^n U_i$。故

$$E\Big(\sum_{i=1}^{A(t)}(t-S_i)\Big) = tE(A(t))/2=\lambda t^2/2。$$

(B) 假設顧客依一期望函數爲$a(t)$之非齊性 Poisson 過程$\{A(t),t\geq 0\}$進入某一系統, 每一顧客相互獨立地又立即有 $p(\tau)$之機率被分到第一個部門, 有$q(\tau)=1-p(\tau)$之機率被分到第二個部門 ,τ爲其到達時刻。令$B_1(t)$,$B_2(t)$分別表至時間t被分到第一個及第二個部門之顧客數。又設$\int_0^t p(\tau)da(\tau)$存在,$\forall t>0$。則

定理7: $\{B_1(t),t\geq 0\}$ 及$\{B_2(t),t\geq 0\}$爲二相互獨立之 Poisson 過程, 且期望函數分別爲$\int_0^t p(\tau)da(\tau)$及$\int_0^t q(\tau)da(\tau)$。

證明: 對任意$m>1$及$0=t_0<t_1<\cdots<t_m$, 若證出 $B_1(t_1)$,$B_1(t_2)-B_1(t_1)$,...,$B_1(t_m)-B_1(t_{m-1})$,$B_2(t_1)$,$B_2(t_2)-B_2(t_1)$,...,$B_2(t_m)-B_2(t_{m-1})$相互獨立且皆有 Poisson 分佈便可以了。現在

$$\begin{aligned} & E\left(\prod_{i=1}^{m}u_i^{B_1(t_i)-B_1(t_{i-1})}\prod_{i=1}^{m}v_i^{B_2(t_i)-B_2(t_{i-1})}\right) \\ = \ & E\left(E\Big(\prod_{i=1}^{m}u_i^{B_1(t_i)-B_1(t_{i-1})}\prod_{i=1}^{m}v_i^{B_2(t_i)-B_2(t_{i-1})}\Big|A(t_m)=n\Big)\right)。\end{aligned} \tag{29}$$

而給定$A(t_m)=n$, 此n個到達時刻與由分佈函數爲

$$F_{t_m}(x) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ a(x)/a(t_m), & 0\leq x\leq t_m, \\ 1, & x>t_m, \end{cases} \tag{30}$$

所產生之n個樣本的順序統計量之聯合分佈相同。因此對任意$1 \le i \le m$,

$$\begin{aligned}
& B_1(t_i) - B_1(t_{i-1}) \\
= \; & \#\Big\{I(\tau_{(j)}) = 1 \text{且} \tau_{(j)} \in (t_{i-1}, t_i], j = 1, \ldots, n\Big\} \\
= \; & \#\Big\{I(\tau_j) = 1 \text{且} \tau_j \in (t_{i-1}, t_i], j = 1, \ldots, n\Big\}, \qquad (31)
\end{aligned}$$

其中$\tau_{(1)} \le \cdots \le \tau_{(n)}$爲$n$個 i.i.d. 以 (30) 爲其共同 d.f. 之 r.v.'s $\tau_1, \ldots, \tau_n$之順序統計量,$I(\tau) = 1$或2依在時間τ到達的那位顧客被分到第一個或第二個部門而定。

同理

$$\begin{aligned}
& B_2(t_i) - B_2(t_{i-1}) \\
= \; & \#\{I(\tau_j) = 2 \text{且} \tau_j \in (t_{i-1}, t_i], j = 1, \ldots, n\}。 \qquad (32)
\end{aligned}$$

因此在給定$A(t_m) = n$之下, 此n個在$(0, t_m]$間到達的顧客, 每一個分別有p_i與 q_i的機率會在$(t_{i-1}, t_i]$間被分到第一個與第二個部門, 其中

$$\begin{aligned}
p_i &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} p(\tau) da(\tau)/a(t_m), \qquad (33) \\
q_i &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} q(\tau) da(\tau)/a(t_m), \qquad (34)
\end{aligned}$$

且與其他事件皆獨立。故若給定$A(t_m) = n$,$(B_1(t_1), \ldots, B_1(t_m) - B_1(t_{m-1})$,$B_2(t_1), \ldots, B_2(t_m) - B_2(t_{m-1}))$有多項分佈$\mathcal{M}(n, p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m)$。另外, 因$A(t_m)$有參數爲$a(t_m)$之 Poisson 分佈, 故 (29) 又等於

$$\begin{aligned}
& E\Big(\sum_{i=1}^m u_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} p(\tau) da(\tau)/a(t_m) + \sum_{i=1}^m v_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} q(\tau) da(\tau)/a(t_m)\Big)^{A(t_m)} \\
= \; & \exp\Big\{-\Big(a(t_m) - \sum_{i=1}^m u_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} p(\tau) da(\tau) - \sum_{i=1}^m v_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} q(\tau) da(\tau)\Big)\Big\} \\
= \; & \exp\Big\{-\sum_{i=1}^m (1 - u_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} p(\tau) da(\tau) - \sum_{i=1}^m (1 - v_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} q(\tau) da(\tau)\Big\} \\
= \; & \prod_{i=1}^m \exp\Big\{-(1 - u_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} p(\tau) da(\tau)\Big\} \prod_{i=1}^m \exp\Big\{-(1 - v_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} q(\tau) da(\tau)\Big\},
\end{aligned}$$

得證。

當然若$p(t) \equiv p$,$q(t) \equiv q = 1 - p$時,$E(B_1(t)) = pa(t)$,$E(B_2(t)) = qa(t)$。另外由定理7又立即可得

系理2: 設$\{A_1(t), t \geq 0\}$,$\{A_2(t), t \geq 0\}$爲二獨立之 Poisson 過程, 期望函數分別爲$a_1(t)$及$a_2(t)$。令$A(t) = A_1(t) + A_2(t)$, 則疊和 (superposition)$\{A(t), t \geq 0\}$爲一期望函數爲 $a_1(t) + a_2(t)$之 Poisson 過程。

參考文獻

1. Crump, K. S. (1975), On point processes having an order statistic structure, Sankhyā A, 37, 396-404.

2. Epstein, B. (1960), Tests for the validity of the assumption that the underlying distribution of life is exponential (Part I), Technometrics, 2, 83-101.

3. Feigin, P. D. (1979), On the characterization of point processes with the order statistic property, J. Appl. Prob., 16, 297-304.

4. Freedman, D. A. (1962), Invariants under mixing which generalize de Finetti's theorem, Ann. Math. Stat. 33, 916-923.

5. Hogg, R. V. and Craig, A. T. (1978), Introduction to Mathematical Statistics, 4th ed., Macmillan, New York.

6. Huang, W. J. and Shoung, J. M. (1991), On a study of some properties of point processes, To appear in Sankhyā A.

7. Kallenberg, O. (1976), Random Measures, Akademie-Verlag, Berlin; Academic Press, London.

8. Karlin, S. and Taylor, H. M. (1975), A First Course in Stochastic Processes, 2nd ed., Academic Press, New York.

9. Parzen, E. (1962), Stochastic Processes, Holden-Day, San Francisco.

10. Puri, P. S. (1982), On the characterization of point processes with the order statistic property without the moment condition, J. Appl. Prob., 19, 39-51.

—本文作者任教於國立中山大學應用數學系—