# 隨機矩陣的乘積

蔡志賢

## (一) 導言

本文最主要的目的是概略地介紹近四十年來一個廣爲研究與應用的數學領域——隨機矩陣的乘積。爲求簡單起見, 我們將省略許多數學上的假設。

設$A_1,\ A_2,\ A_3\ \ldots$ 均爲 $d\times d$ 的隨機矩陣, $\vec{X}(0)=(x_1,x_2,\ldots,x_d)$ 爲 $R^d$ 上的一個非零向量, 令

$$\|\vec{X}(0)\|=\sqrt{(x_1)^2+(x_2)^2+\ldots+(x_d)^2}。$$

我們所想知道的是當$n$很大的時候 $\|\vec{X}(n)\| = \|A_n\cdot A_{n-1}\cdot\ldots\cdot A_1\ \vec{X}(0)\|$ 的增減情形。下面兩個例子可以幫助我們瞭解問題的來源。

**例**1: 假設有一種生物的生存情形如以下所描述。(i) 該生物只在秋天生產下一代, (ii) 每個個體最長活四年,(iii) 夏天時爲$k$歲, 而下一個夏天仍活著的比率爲$b_k$, $k=0,1,2,3$,$b_3=0$,(iv) 夏天時爲$k$歲, 在當年秋天每一個個體平均生產$a_k$個下一代。若$x_k(n)$ 爲在第$n$ 年夏天年紀爲$k$歲的個數, 由 (i)∼(iv) 可得到以下的等式。

$$\begin{aligned}
x_0(n+1) &= a_0x_0(n)+a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\\
&\quad +a_3x_3(n)\\
x_1(n+1) &= b_0x_0(n)\\
x_2(n+1) &= b_1x_1(n)\\
x_3(n+1) &= b_2x_2(n)
\end{aligned}$$

我們可將上列等式以向量與矩陣來表示

$$\begin{aligned}
\vec{X}(n+1) &= \begin{pmatrix} x_0(n+1)\\ x_1(n+1)\\ x_2(n+1)\\ x_3(n+1)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3\\ b_0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0(n)\\ x_1(n)\\ x_2(n)\\ x_3(n)\end{pmatrix}\\
&= A\vec{X}(n),
\end{aligned}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3\\ b_0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b_2 & 0\end{pmatrix}。$$

如果這些$a_k$ 及 $b_k$ 均爲常數, 也就是說每年的存活率及平均生產個數都相同, 那麼

$$\vec{X}(n)\ =\ A\vec{X}(n-1)=A^2\vec{X}(n-2)=\cdots$$

$$= A^n\vec{X}(0)。$$

在此我們只考慮最開始的情況 $\vec{X}(0)$是固定的。不難看出當$n$很大時,$\|\vec{X}(n)\|$ 的增減情形是由矩陣$A$的固有值的絕對值的大小來決定。當矩陣$A$有一個絕對值大於1的固有值時, $\|\vec{X}(n)\|$ 將會隨時間的增長而呈指數成長。反之, 當矩陣$A$的所有固有值的絕對值都小於1時, 則呈指數遞減。

如果這些$a_k$及$b_k$ 每年都會改變, 而出現的方式又是根據某個機率分佈, 那麼矩陣$A$會隨年份的不同而隨機出現。這些矩陣就是我們所稱的隨機矩陣。向量 $\vec{X}(n)$ 的表示式這時應修改爲

$$\vec{X}(n) = A_n \cdot A_{n-1} \cdots A_1\vec{X}(0)。$$

這時我們便遇到一個隨機矩陣乘積的問題。

**例**2:設$f$爲由$R^d$到$R^d$的 (非線性) 平滑函數, $f(\vec{X}) = (f_1(\vec{X}), f_2(\vec{X}), \ldots, f_d(\vec{X}))$。考慮下列序列

$$\begin{aligned}
&\vec{X}(0),\\
&\vec{X}(1) = f(\vec{X}(0)),\\
&\vec{X}(2) = f(\vec{X}(1)) = f^2(\vec{X}(0)),\\
&\quad\vdots\\
&\vec{X}(n) = f^n(\vec{X}(0)), \cdots。
\end{aligned}$$

如果$\vec{X}(0)$ 是一個固定的向量, 那麼 $\{\vec{X}(n)\}$ 便是一個固定的向量序列。如果 $\vec{X}(0)$是個隨機向量, 則$\{\vec{X}(n)\}$ 是一串隨機向量, 也就是我們常稱的隨機過程。在此我們考慮函數$f$自始至終都是固定的。現在我們關心的問題是該過程對初始條件 $\vec{X}(0)$ 的敏感程度如何, 也就是說當 $\vec{X}(0)$ 有很小的變動時, 整個過程是否會受到很大的影響。

先回想平滑函數的 Jacobian 矩陣的定義。

$$\|f(\vec{X}+\vec{h}) - f(\vec{X}) - A_f(\vec{X})\vec{h}\| = o(\|\vec{h}\|),\quad 當\vec{h}\to\vec{0},$$

其中矩陣$A_f(\vec{X})$ 的$i-j$元素爲 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{X})$。因此當 $\vec{h}$ 很小時,

$$f^n(\vec{X}(0)+\vec{h}) \approx f^n(\vec{X}(0)) + A_{f^n}(\vec{X}(0))\vec{h}。$$

可見當$\vec{h}$ 很小時,$f^n(\vec{X}(0)+\vec{h})$ 與 $f^n(\vec{X}(0))$ 的差距最主要是由矩陣$A_{f^n}(\vec{X}(0))$ 來決定。由鏈鎖法則

$$A_{g\cdot f}(\vec{X}) = A_g(f(\vec{X}))\cdot A_f(\vec{X})。$$

可得

$$\begin{aligned}
&A_{f^n}(\vec{X}(0))\\
=\ &A_f(f^{n-1}(X(0)))\cdot A_f(f^{n-2}(\vec{X}(0))\cdots\\
&A_f(f(\vec{X}(0))\cdot A_f(\vec{X}(0)))\\
=\ &A_f(\vec{X}(n-1))\cdot A_f(\vec{X}(n-2))\cdots\\
&A_f(\vec{X}(1))\cdot A_f(\vec{X}(0))。
\end{aligned}$$

令$A_n = A_f(\vec{X}(n))$。因爲$\vec{X}(0)$ 是隨機的, 所以$\{A_n\}$ 是一串隨機矩陣。而

$$\begin{aligned}
&\|f^n(\vec{X}(0)+\vec{h}) - f^n(\vec{X}(0))\|\\
\approx\ &\|A_{n-1}\cdot A_{n-2}\cdots A_0\vec{h}\|。
\end{aligned}$$

可見整個過程對初始條件 $\vec{X}(0)$ 的敏感程度決定於隨機矩陣 $A_0, A_1, A_2, \cdots$ 的乘積。

## (二)Lyapunov 指數與 Oseledec 定理

從 1950 年代起已有許多數學家投入隨機矩陣乘積的研究。在1960年,H. Furstenberg 與 H. Kesten 證明以下的結果。

**定理**1: 設$\{A_n\}$爲獨立的隨機矩陣, 那麼對任一與$\{A_n\}$無關的非零向量 $\vec{X}(0) \in R^d$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A_n \cdots A_1 \vec{X}(0)\| = r$$

的機率爲 1,$r$ 爲一個固定常數。

定理 1 中的$r$ 被稱爲 Lyapunov 指數。上述定理最主要是告訴我們, 當$n$很大時, 絕大多數的$\|A_n \cdots A_1 \vec{X}(0)\|$ 都近似於 $e^{rn}$。因此,$r > 0$ 表示$\|A_n \cdots A_1 \vec{X}(0)\|$ 將呈指數成長, 而$r < 0$ 時則呈指數遞減。在1963 年 H. Furstenberg 證明行列式爲1的 $2 \times 2$ 隨機矩陣乘積的 Lyapunov 指數$r$ 恆爲大於零的實數。

上述的結果都是在$\vec{X}(0)$ 給定之後才考慮 $\|A_n \cdots A_1 \vec{X}(0)\|$。因此 $\vec{X}(0)$ 是與$\{A_n\}$ 無關的。但是如果 $\vec{X}(0)$ 與 $\{A_n\}$ 有關, 則可能出現不同的結果。在1968年 V. I. Oseledec 發表了他對這種情形的研究結果, 他的結論是

**定理**2: 對於$d \times d$ 的隨機矩陣乘積, 存在常數 $r_1 > r_2 > \cdots > r_k$,$1 \le k \le d$, 且存在$R^d$ 的隨機子向量空間 $S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_k$, 使得若$\vec{X}(0) \in S_i$ 則

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A_n \cdots A_1 \vec{X}(0)\| \le r_i$$

且若$\vec{X}(0) \in S_i \setminus S_{i+1}$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A_n \cdots A_1 \vec{X}(0)\| = r_i$, 其中 $i = 1, 2, \ldots, k$,$S_{k+1} = \{\vec{0}\}$。

在此我們所稱的隨機子向量空間是指會隨 $\{A_n\}$ 而變動的子向量空間。Oseledec 的定理告訴我們, 針對一串特別的$\{A_n\}$, 我們可以找到$R^d$的一組子向量空間, 使得在不同方向的初始條件$\vec{X}(0)$,$\|A_n \cdots A_1 \vec{X}(0)\|$ 會有不同的成長 (或遞減) 速率, 下面的例子可以幫助我們瞭解以上的敍述。

**例**3: 假設有一個人的財產每年會加倍, 也就是說如果今年財產是正的, 明年會更富有, 如果今年的財產是負的 (欠錢), 明年會欠更多。但是每年可能有一些意外增減 (意外之財或意外損失)。如果$U_n$ 代表第$n$ 年的財產,$b_n$ 表第$n$ 年的意外增減, 我們將有下列等式

$$u_{n+1} = 2u_n - b_{n+1}。$$

解上列差分方程而得

$$u_n = 2^n u_0 - \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i} b_i = 2^n (u_0 - \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} b_i)。$$

因爲是意外的增減, 我們可假設$b_n$是隨機的。針對一組特殊的$\{b_n\}$, 如果最開始的財產不等於 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} 2^{-i} b_i$ (在此假設對任意$i$,$|b_i| \le M$) , 那麼$|u_n|$ 將會呈指數成長, 即$|u_n| \approx 2^n = e^{n \log 2}$。

如果我們將差分方程改寫成向量與矩陣的形式

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -b_{n+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ 1 \end{pmatrix}。$$

令

$$\vec{X}(n)=\begin{pmatrix}u_n\\1\end{pmatrix},A_n=\begin{pmatrix}2 & -b_{n+1}\\0 & 1\end{pmatrix},$$

則 $\vec{X}(n)=A_{n-1}\cdots A_0\vec{X}(0)$。我們可將 $A_{i-1}\cdots A_0$ 的乘積算出

$$A_{n-1}\cdots A_0=\begin{pmatrix}2^n & -2^n a_n\\0 & 1\end{pmatrix},$$

其中$a_n=\sum_{i=1}^{n}2^{-i}b_i$。不難看出 Lyapunov 指數 $r_1=\log 2$,$r_2=0$。令 $a_\infty=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}b_i$, 則當$\vec{X}(0)=\begin{pmatrix}a_\infty\\1\end{pmatrix}$ 時

$$\begin{aligned}\vec{X}(n)&=A_{n-1}\cdots A_0\vec{X}(0)\\&=\begin{pmatrix}2^n & -2^n a_n\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_\infty\\1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2^n(a_\infty-a_n)\\1\end{pmatrix}。\end{aligned}$$

但是 $|a_\infty-a_n|=|\sum_{i=n+1}^{\infty}2^{-i}b_i|\le 2^{-n}M$。因此不論$n$多大,$\|\vec{X}(u)\|$ 都是有界的。由$\begin{pmatrix}a_\infty\\1\end{pmatrix}$ 所展的向量空間即 Oseledec 定理中的$S_2$。如果$\vec{X}(0)$ 不與 $\begin{pmatrix}a_\infty\\1\end{pmatrix}$ 同方向, 不難算出 $\|\vec{X}(u)\|\approx 2^n$, 即定理中的$S_1$爲整個平面 $R^2$。

所以, 如果我們知道所有的$b_i$, 且選擇初始條件 $\vec{X}(0)=\begin{pmatrix}a_\infty\\1\end{pmatrix}$, Oseledec 定理告訴我們 $\|\vec{X}(u)\|$ 將不呈指數成長。而其它的選擇, 刻意不選$\begin{pmatrix}a_\infty\\1\end{pmatrix}$或隨意亂選, 都將得到$\|\vec{X}(n)\|\approx e^{n\log 2}$的結果。

## (三) 結語

由於隨機矩陣乘積的應用很廣, 其本身又是個很有趣的數學問題, 四十年來已有很多數學家投入研究的行列, 也已得到許多結果。但是還有很多問題尙未有圓滿的答案。例如, 除了少數極特殊的情形外,Lyapunov 指數是無法很完整的表示出來的。在 [3]中, 有許多未解決的問題被提出。在 [2]中, 對隨機矩陣的乘積有極詳細的介紹。有興趣的讀者可參閱這兩本書。

## 參考文獻


[1] C. M. Newman, Lectures Notes, University of Arizona.

[2] P. Bougerol and J. Lacroix, “Products of Random Matsices with Applications to Schrödinger Operators,” Birkhäuser, 1985.

[3] J. Cohen, H. Kester and C. M. Newman, “Random Matrices and Their Applicati- ons,” Contemparary Mathematics Vol. 50 , AMS, 1986.


—本文作者任教於國立中山大學
應用數學系—