馬可夫隨機場簡介

依佛

近幾年利用隨機場 (random field) 來考慮影像處理還頗成功。將影像的性質, 例如亮度、 顏色等, 看成是圖 (graph) 的位置 (site) 上的隨機狀態; 而位置間的關係則由圖的邊 (edge) 來表示。馬可夫隨機場 (Markov random field) 提供這種空間 (spatial) 過程一個自然的架構。它和 Gibbs 分布的等價性不但使得在模型建構和統計推論時更具彈性 ,且可和統計物理關聯起來。而利用馬可夫性質和隨機 relaxation (或蒙地卡羅方法) 可以部分地解決此類模式先天上的解析困難。這是它在應用上成功的原因之一。

本文舉統計物理上有名的 Ising 模式來描述馬可夫隨機場及一些相關的性質。

Ising模式

$S = \{(i,j) : 1 \le i,\ j \le N\}$ 爲$N \times N$的格子。對每一格子點$s \in S$, 令$\mathcal{G}_s$表示s的鄰居,Λ_s表示在s 點的狀態所成的集合。這裡

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{i,j} &= \{(i-1,j),(i+1,j),(i,j-1),\\ &\qquad (i,j+1)\} \cap S,\\ \Lambda_{i,j} &= \{-1,+1\}。\end{aligned}$$

又令

Ω是所有影像所成的集合, 即

$$\Omega = \{x : x = (x_s)_{s \in S},\ x_s \in \Lambda_s\},$$

相鄰的格子點 s,t 以 $<s,t>$ 表示, 即

$$s \in \mathcal{G}_t (\sim t \in \mathcal{G}_s)。$$

定義

$$H(x) = -\frac{k}{T}\sum_s x_s - \frac{J}{T}\sum_{<s,t>} x_s x_t, \quad (1)$$

其中k, J, T 是參數。

利用H 我們在Ω 上定義一機率 P,

$$\begin{aligned}P(x) &= Z^{-1}\exp -H(x),\\ Z &= \sum_{y\in\Omega}\exp -H(y)。\end{aligned} \quad (2)$$

若-1,$+1$ 分別表示白色及黑色, 則參數 k, J, T決定後,$P(x)$ 便是x 這黑白影像出現的機率。

P 的形式看起來很單純, 但實際要算出Z 是個大問題, 更不必說直接從P抽樣。問題出在Ω 有2^{N^2}個元素, 對64×64 的格子, 這

已是天文數字。比較可行的方法是用隨機 relaxation 或蒙地卡羅法, 也就是造出一馬可夫鏈, 使得此鏈的極限爲P。然後利用此鏈來逼近我們所要計算的值。

令 $X_s(x)=x_s$, 則

$$\begin{aligned} & P(X_s=x_s|X_r=x_r,\ r\neq s) \\ = \ & P(X_s=x_s|X_r=x_r,\ r\in\mathcal{G}_s)。 \end{aligned} \tag{3}$$

此式就是馬可夫隨機場的意思: 給s 位置以外的資料和只給s的鄰居的資料所做出的條件機率是一樣的。此條件機率的計算非常簡單; 注意,Z 自動會被消掉。利用 (3) 可定有名的 Gibbs Sampler。

給定x,x 在 s位置的變化由下述的隨機矩陣決定:

$$\begin{aligned} P_s(x,y) &= P(X_s=y_s|X_r=x_r,\ r\neq s), \\ & \quad 假如 y_r=x_r,\forall\ r\neq s; \quad (4) \\ &= 0,其他。 \end{aligned}$$

Random Gibbs sampler:任取一位置s, 然後以 P_s 爲隨機矩陣選下一步的影像, 所對應的隨機矩陣爲

$$\frac{1}{|S|}\sum_s P_s, \tag{5}$$

$|S|$表S的元素個數。

Systematic Gibbs sampler: 將S中的位置排序, 然後依序在每個位置做更新, 這所對應的隨機矩陣爲

$$P_{s_1}P_{s_2}\dots P_{s_{|S|}}。 \tag{6}$$

當然也可同時在幾個位置上做改變, 或考慮其他方法, 我們不在本文討論。

不論起始影像,Gibbs sampler 的馬可夫鏈的極限恆爲 (2) 的P。

現回到較一般的情形。假設S和Λ_s,$s\in S$都是有限集合。任一定義在 Ω 上的機率 P 且 $P(x)>0$,$\forall x\in\Omega$, 則P可由 (3) 式左邊的條件機率唯一決定。

我們需定義鄰居系統$\mathcal{G}_s$,$s\in S$ 以便討論馬可夫隨機場: 對每一s, $\mathcal{G}_s\subseteq S$,$s\notin\mathcal{G}_s$ 且 $s\in\mathcal{G}_t$ 若且唯若 $t\in\mathcal{G}_s$。

P 是鄰居系統$\mathcal{G}_s$,$s\in S$, 的一馬可夫隨機場的定義就是 (3) 式。

Ω 上的任一正的機率一定是鄰居系統 $\mathcal{G}_s=S-\{s\}$ 的馬可夫隨機場, 但以計算的觀點來看, 這樣的系統不實用。我們要的是 $|\mathcal{G}_s|\ll|S|$ 。例如上述的 Ising 模式,$|\mathcal{G}_s|\leq 4$。

對$\mathcal{G}_s$,$s\in S$, 定義

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{C|C\subseteq S,\ C \text{ 爲一單點或對 } C \text{ 中} \\ & \quad \text{任兩相異點 } s,t,\ s\in\mathcal{G}_t\}。 \end{aligned}$$

再以 Ising 模式爲例,$C\in\mathcal{C}$則$C=\{s\}$, $s\in S$ 或$C=\{s,t\}$, s,t爲相鄰兩格子點。

機率 P 稱爲對 $\mathcal{G}_s$,$s\in S$ 的 Gibbs 分布, 假如 P 可寫成 (2) 的型式且

$$H(x)=-\sum_{c\in\mathcal{C}}V_c(x),$$

$V_c(x)$ 具有:$V_c(x)=V_c(y)$ 若 $x_s=y_s$,$s\in C$, 的性質。也就是說 $V_c(x)$ 的值由 x_s,$s\in C$決定。Ising 模式所對應的 (1) 式的H就是這型式。

P 爲$\mathcal{G}$ – 馬可夫隨機場和 P 爲 $\mathcal{G}$ – Gibbs 分布是對等的關係。

我們同樣可用 (4) 來定義 Gibbs sampler。因 (3) 式成立, 若$|\mathcal{G}_s|$不大, 計算應不難。

本文簡介至此, 有興趣者請看

D. Geman (1990), Random fields and inverse problems in imaging, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1427, 113-193, Springer- Verlag,

及其中的參考資料。

—本文作者任職於中央研究院數學研究所—