簡介隨機過程

彭南夫

自古代起, 人類就對生與死, 成長與退化深深地感慨。宇宙萬物時而周而復始, 時而一去不返。到達爾文時, 他的進化論確實帶給人們一陣錯愕。從十七世紀起, 牛頓以數學來了解物理上的意義, 才使人類拓展對宇宙的觀念。但如果說, 一切事物的變化都遵循著某種規則, 那麼解決一些方程式 (如微分方程式) 就足夠了, 頂多一些可容忍的小誤差。事實並不然, 我們舉個簡單的例子:

一個小鎮上今天有人口51,226人, 我們預測十年後成長至60,863人。如果誤差在數百人之內 ,這並沒有什麼不妥之處。但一個4口之家, 如果我們預測一個月後有2.37人, 這一點意義也沒有。事實上, 人口數可能是0,1,2, 3, 4或5等, 也就是說, 它有一個機率分佈。這機率分佈是隨時間改變的。我們有興趣的是, 這家人的人口數、死亡的時間或生產的時間等, 這個過程就叫做隨機過程。

在探討隨機過程中, 我們常假設它具有馬可夫性質; 簡單地說, 如果知道今天的人口數, 那麼明天的人口數就與昨天的人口數無關。乍看之下, 這性質好像無啥驚人之處, 也與現實情況不完全相符。但它在現有數學工具上較易控制, 而且也可對現實情況作第一步的近似。以下幾個例子, 可讓讀者更易了解隨機過程的含義:

(1) **賭徒破產問題**:(gambler's ruin problem)

賭徒有a元, 莊家有$n-a$元, 每賭一次輸贏一元。賭徒每賭完一次後剩下的資本, 即形成一具馬可夫性質的隨機過程。賭徒輸光或莊家輸光的時間與機率, 一向是受矚目的問題。

(2) **普阿松過程**:(Poisson process)

商店從一早開門到經過t時間爲止, 算算光顧的客人總數; 或接線生到t時間爲止, 接到轉接電話的總數; 這些經過實驗證明, 可以稱的上是普阿松過程。

(3) **衍生過程**:(branching Process)

一個姓氏的家族, 他們的子嗣如果結婚生子, 就是繁衍; 否則就沒有衍生。觀察他們第一代、第二代、. . . 的人口數, 就好像一個樹圖 (tree graph)。幾個有趣的問題是 :這家族生生不息的機率、最後滅種的機率等。

(4) **生—死過程**:(birth and death process)

如果一群生物各自獨立生活著, 則全體生殖率或死亡率即爲個別生殖率或死亡率之和。(這約略可以解釋爲什麼大都市的出生嬰兒與死亡人數比小都市多)。這種生—死過程常能很充分地解釋很多眞實情況。

(5) **排隊過程**:(queueing process)

顧客隨機地到櫃台接受服務, 如果服務員來不及處理, 則顧客要排隊。電腦使用者不斷地送訊號到主機, 如果還未輪到主機處理, 則需等候。這些排隊人數的機率分佈, 當然是隨著時間改變。

(6) **掠食—被掠食模式**:(prey-predator model)

掠食族有生與死的情形, 而被掠食族不但有生與死, 更有被掠食情形。因此被掠食族的死亡率不但與本身有關, 更和掠食者有關。他們之間形成有趣的相互關係。

(7) **擴散過程**:(diffusion process)

一粒花粉在水中, 受到水分子的撞擊, 而產生微量的移動, 而撞擊的頻率卻很大。這是有名的布朗運動 (Brownian motion)。這種連續性的變化與前述的例子不同, 但有時候可視爲他們的極限。例如: 人口數很大的群體, 個體的變化相對地很小, 但如果變化得十分頻繁 ,這可近似這種擴散過程。

参考文獻

1. "The Elements of Stochastic Processes wi- th Applications to the Natural Sciences", N. J. Bailey, 1964, John Wiley. Inc.

2. "Stochastic Processes", S. M. Ross, 1980, John Wiley. Inc.

—本文作者任教於國立交通大學
統計研究所—