數播信箱

潘戌衍來函(陳永川答覆)

敬啓者:

貴刊第十五卷第四期, 陳永川先生的文章「隨想二則」中提到的大數吃小數的故事。故事大意是在一個晚會, 主持人要求每個人寫一個數, 然後求這些數的平均, 誰寫的數最接近平均數, 誰就是最幸運的人, 而可以獲得禮物。而陳先生以爲這不是公平的遊戲, 因爲他可以用一個很大很大的數來獲得禮物。事實上, 陳先生的想法是有些差失的, 因爲陳先生雖然可以用一個很大很大的數來使得平均也變得很大很大, 但是這兩者的差距增大的速度卻比平均數與另外的數的差距增大的速度更大, 比較仔細的說明如下:

假設有 n 個數目 $a_1,\cdots,a_n\in\mathbf{R}$ 並假設 $n\geq 3$ (因爲 $n=1,2$ 的情況顯然而無趣), 又假設, $a_1,\cdots,a_{n-1}$ 的平均爲 k, $a_n\geq\max\{a_1,\cdots,a_{n-1}\}$ 即 $\dfrac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}=k$, 則在前 $n-1$ 個數中必然至少有一個數 (假設爲 a_1)$\geq k$。

今 $\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}=\dfrac{a_n+(n-1)k}{n}$ 爲 n 個數的平均。則

$$\begin{aligned}|a_n-\frac{a_n+(n-1)k}{n}| &= \frac{n-1}{n}|a_n-k|\\ &= \frac{n-1}{n}(a_n-k)\\ |\frac{a_n+(n-1)k}{n}-a_1| &\leq |\frac{a_n+(n-1)k}{n}-k|\\ &= \frac{1}{n}(a_n-k)。\end{aligned}$$

顯然 $\dfrac{1}{n}(a_n-k)\leq\dfrac{n-1}{n}(a_n-k)$ (因爲 $n\geq 3$, $a_n\geq k$)。

其實我們有一個更簡單的想法, 如果把這 n 個不等的數依大小排成一列, 不管如何 ,只要 $n\geq 3$, 那麼最接近平均數的一定不可能是最大或最小的數

潘戌衍

答潘先生來信

謝謝潘先生的正確意見。爲了能體現出文中關於大數吃小數的思想, 我們可以把文中的平均數改爲總和的三分之二, 那麼文中的一切推理皆可成立。大數吃小數的思想是, 當 n 個數相加時, 如果有一個數很大很大, 那麼我們就可把其餘的數當零對待。於是我們可以假設這 n 個數爲 $0,0,\cdots,0,M$。其總和的三分之二爲 $\frac{2}{3}M$, 從而問題變爲比較 $M-\frac{2}{3}M$ 和 $\frac{2}{3}M-0$ 。所以一個很大很大的數可以獲得禮物。對於文中的此一錯誤, 我向貴刊和讀者表示歉意。

陳永川　覆