高中生應該知道的數值方法

石厚高

筆者自民國五十一年開始執教中等學校, 除了最早的三年是教初中, 其它的二十六年都是教的高三, 也多次輪到全年級的月考或期考命題, 多年來我都是公認命題最“窩囊” 的老師, 不及格的學生很少, 都是不到百分之十很正常, 今年我也“神勇”了一次, 全年級不及格將近二分之一。

本學期建中高三理組第一次月考由筆者命題 (見附錄) , 我在2月26日開學接獲通知, 查查進度應考完第一章 [數值方法], 它是高中數學裡教師與學生都很感冒的一章, 太多的誤差公式, 要學生把結果算到第幾位小數, 精確到第幾位小數, 正確到第幾位小數, 誤差是多少, 都很讓人煩惱。不使用微積分來討論這一章, 那麼本章的內容倒是可圈可點, 再把那些誤差公式刪除, 就更無話可說了。當然阿基米德誤差公式要保留。某校校刊的學生對話很有意思

甲生: 我們班的數學老師最偉大。

乙生: 爲甚麼?

甲生: 他一出題就全校學生不及格了。

乙生: 嘻嘻!他比我們班數學老師差得太多了。

甲生: 你們班的數學老師更偉大嗎?

乙生: 他一出題就全校數學老師都不及格了。

數學習題是自己作的, 老師講的都明白, 就課本例題與習題僅作數據變更的命題方式而言 ,考試時能細心保持平常水準的學生應有80分以上的成績, 應該得到鼓勵。如果這次月考要考範圍以前講過的也都記得, 都能融會貫通, 應該有90分以上的成績。所以我命題的原則是取材自課本的例題與習題佔百分之八十至八十五, 數據幾乎是都作了修改, 另百分之十至百分之十五是大家都沒有教過我也沒敎過的, 考考資優生。

課本例題一字不易作考題, 應該是極容易的題目, 那不是送分數給學生嗎? 其實不然。例如理科數學 (上) 第193頁的例2, 求兩個函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的圖形所圍成的區域面積。課本的作法太簡單了些。求面積先要把這兩個函數的圖形畫出來。其中求在 $x=(3\pm\sqrt{3})/3$ 時 $f(x)$ 的極值; 以及 $x=(4\pm\sqrt{7})/3$ 時 $g(x)$ 的極值都很麻煩。沒有教過的教師不妨把這一題作一遍, 從所花的時間就可以知道它不適合作考題了。某校月考一字不易把它選用爲考題並不恰當, 聽說幾乎都是全軍覆沒 ,「倖存」

的不是資優生, 也不是班上較好的學生, 只不過是考前一個晚上作過一遍罷了。不過它很適合作教材, 因為它傳授了多方面的知識。

第 (五) 題的設計是要看看學生記不記得正、餘弦的半角公式, 如果這個角度的餘弦加上1, 或由1減去之後再除以2都能是個簡易平方數, 那麼會作的很快就作出來了, 不記得的就不必談了。所以我就在三角函數表裡找, 找得很痛苦, 最後求助於電腦, 它很快就找出來兩個,0.28 與 0.8432。

```
100 FOR I=100 TO 9999
110 A=(10000+I)/2 : B=(10000-I)/2
120 C=SQR(A) : D=SQR(B)
130 IF C=INT(C) AND D=INT(D)
    THEN PRINT C,D,I
140 NEXT I
RUN
        80    60    2800
        90    28    8432
```

再算出 $\mathrm{COS}73^\circ\ 44' = 0.2800$, 所以作起來是希鬆平常, 不知道命題人 出這個題目很是傷了些腦筋。

這份試題最讓筆者不可思議的是第 (六) 題

(六) 要求 $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ 的近似值正確到小數二位, 則必需先求得 $\sqrt{3}$ 正確到小數第 __________ 位的近似值 (填最小值)

這是課本的題目, 唯一的一字不易照抄的一題, 答案是4, 打字小姐打成了 $\sqrt{2-\sqrt{7}}$, 我一校再校居然沒有校出來, 妙的是學生都沒有發現它不合理, 絕對多數的學生都"作對了", 所以是誰說的專家就是訓練有素的狗, 妙哉!妙哉! 我是個求好心切的人, 總希望作到盡善盡美, 這種個性讓我痛苦, 事實上我們作不到盡善盡美。

第 (七) 大題以五種方法求定積分$\int_0^{30} x^2 dx$ 的近似值, 這一大題兩個班的平均分數極端接近, 一個班50名學生, 總分是753; 另一班有57名學生, 總分是855; 平均各為 $753/50 = 15.06$ 與 $855/57 = 15$, 按 100 分內所佔比例放大各為 75.3 與 75, 可見學生對這一節相當了解; 這一大題的設計也有些技巧, 記得 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ 這個公式在作 32、34 兩個空格很快就得到答案, 否則會算得很辛苦; 而39、40 兩空格在求拋物線法近似值時, 要是知道它就等於正確值只要幾秒鐘就求得答案, 可以節省很多時間。

我教的班級課本上的習題都要學生上黑板演算過, 計算與證明題的第1題是課本的題目, 只不過把半徑1改成 r, 兩個班作對的學生很少; 第3題取材自葉東進先生發表於「科學教育月刊」102期 (76年9月) 的「阿基米德為什麼會這樣子想?」課本的阿基米德不等式的證明方式十分不自然, 葉先生把這個形如 $x<y<z$ 的不等式的三個式子 x, y, z 經過精心設計後, 都能用一個線段長來表示, 而這三個線段長又很 "直觀"的看得出來有 $x<y<z$ 的關係。

“阿”文中公式的證明用到了“數學的多方面知識”計有: 直線的兩點式、分線段成定比的分點公式、過曲線上一點的切線方程式 (要利用導函數)、平行線截直線成比例線段、二元一次聯立方程式的解等, 所以講完了這篇文章, 也複習了以上各單元。

本文發表於七十六年九月, 我看了一遍十分喜歡, 所以在教這一節時, 我先用課本的方式得到這個不等式, 再用“阿”文的說法作完整的證明, 學生的反應非常熱烈, 我把它介紹給同事, 也很欣賞。

這冊課本在修訂時, 希望高三理科數學 (下) 的阿基米得不等式的證明能採用“阿”文的方式, 不必再找“學者專家”修改了,“原文照抄”可也。

命題與評分是有很大學問的, 外行是不瞭解; 常會聽到某年紀輕輕數學教授第一年教書全系及格的沒有幾個, 第二年全系都過, 爲甚麼? 因爲他去了一趟美國, 發現美國老師評分很寬, 所以就寬多了; 更妙的是還有某年紀輕輕數學教授第一年教書全系及格的沒有幾個, 第二年結婚了全系都過, 爲甚麼結婚會影響評分呢? 因爲新娘子哭訴數學沒有及格過, 於是同情之心油然而生, 各位讀者, 這像話嗎。

有學生要求加分, 其實加分並沒有意義, 每人加二十分是平移, 根本就不公平; 也有老師說乘以6再除以5, 也就是加百分之二十, 那又會有超過一百分的了。最後仍舊是保持原狀不作變更, 因爲學生要畢業了, 老師都要從寬處理的。

民國四十二年至四十三年間我在讀初中二年級時, 數學老師常應同學要求而加分 ,他是用開平方乘以十的方式。當時曾與同學算過, 用這種方式加分的話,36分剛好及格 ,25分加得最多。它的特點是0分與100分保持原分數, 而加分的高低雖有不同, 原來考得好的加分以後分數還是高。

加分本來是不值得大事張揚的, 不過這個函數倒很值得談談。這個函數只能應用於區間 [0,100], 小於0當然不必談, 大於100用這種方式加分, 結果是幫倒忙加了負分。例如考 121分, 開平方乘以10之後成了110分, 加了負11分。這是怎麼回事?

直線 $y=x$ 與曲線 $y=10\sqrt{x}$ 的交點是 (100,100), 曲線 $y=10\sqrt{x}$ 上在 (100,100) 左方每一點的橫座標都是小於縱座標, 而右方每一點的橫座標都是大於縱座, 所以才有這種現象, 不過 $y=10\sqrt{x}$ 仍然是個增函數。

用這種方式來調整分數當然是不公平的, 不過總比全班加二十分或三十分的“平移”要好多了。最好的方式當然是正常教學、合理命題、不作調整。

筆者在四十二、三年間讀初二時就知道這個函數, 它的發現至少也有三十七、八年了, 是那位偉大老師的發明已無可考, 不過筆者以爲它的發現, 並不見得經過深思熟慮的研究, 而是靈感來了偶然發現的。詩曰:「文章本天成, 妙手偶得之」, 它是「函數本天成, 妙手偶得之。」

這次月考全年級平均也就是所謂的「低標準」是 56.4 分, 比正常情況的 65 分少了 8.6 分。

討論完畢我問學生有沒有因爲自己老師命題而佔了便宜, 他們回答得非常整齊說沒

有。如果大專聯考由筆者命題, 我可以保證比大專教師更能測出學生程度, 另外筆者自己教的班級不會比別班或它校學生佔便宜。命題一定要公平公正, 自己教的學生和別人一樣的一視同仁, 命題人雖然不是教育家, 至少也要有教育家的胸懷, 這是命題人應有的正常心態。一位電影明星在電視上為某種膠卷作的廣告說, 請用 ΔΔ 像紙, 它抓得住我。對!我也抓得住學生, 能把學生程度表現得恰如其分。這次命題得到些教訓, 校對不能自己作, 要兩個人合作, 一人讀原稿一人看打字稿; 又因彈性放假, 月考在3月25、26 兩日舉行, 數學本來就是全世界學生頭痛的學科, 也是“投資報酬率” 最低的科目。考試日期提前了十天至半個月, 就不能按照進度命題了, 進度當然是以往的慣例進度, 甚麼都可以速成, 只有學問不能速成, 數學尤其不能速成。

月考前在走廊上聽到學生說 [怎麼辦數學看不完!]可見為了統一進度的考試各班的速度都快了些, 不及格的人數多了些也就不在話下了, 有好幾位老師都對我說很喜歡這份題目, 都是學生應該知道的最起碼的重點, 對高中生來說這份試題大體都會作, 數值方法的內涵也就有了整體概念了。所以我寄給數播, 願與全國教師、學子共享。又本試題曾蒙本校林礽堂老師提供改進意見, 謹此致謝。

附錄:

台北市立建國高級中學

七十九學年度第二學期第一次月考數學科(自然組) 三年級試題

_班積分號_姓名___________

填空: 每空格2分

(一) 設 $\dfrac{\pi}{4}=0.7850$, $(\dfrac{\pi}{4})^2=0.6168$, $(\dfrac{\pi}{4})^3=0.4830$, 試填下列各空格, 不得使用計算機。

$f(x)$	a	n	$f(x)$ 在 $x=a$ 附近之n次近似$g(x)$	k	$g(k)$
$\sqrt{x}$	1	3	(1)	1.2	(2)
$\sqrt{x}$	w^2	2	(3)	w^2+p	(4)
e^x	0	3	(5)	1	(6)
$\ln(1+x)$	0	3	(7)	1	(8)
$\ln\dfrac{1+x}{1-x}$	0	3	(9)	$\dfrac{1}{3}$	(10)
$\sin x$	0	3	(11)	$\dfrac{\pi}{4}$	(12)
$\cos x$	0	2	(13)	$\dfrac{\pi}{4}$	(14)
$\tan x$	$\dfrac{\pi}{4}$	2	(15)	$\dfrac{\pi}{4}$	(16)

(二) 設方程式 $f(x)=x^3+3x-6=0$ 有一正根介於二正整數 k 與 $k+1$ 之間, 令 $a_1=k$ 則使用牛頓切線法可求得更佳之近似值 $a_2=$ ＿(17)＿ 又更好的近似值 $a_3=$ ＿(18)＿ 。

(三) 設 $r<0$, 方程式 $27x^3+rx^2+36x+s=0$ 有三重根, 則 $r+s=$ ＿(19)＿ 而此三重根爲＿(20)＿。

(四) 令 $w=6.4$, $p=0.04$, 利用一次近似與下列數據 $\dfrac{P^2}{W^3}=0.0000064$, $\dfrac{1}{32}=0.0312500$ 可得＿(21)＿ $<\sqrt{41}<$ ＿(22)＿故得 $\sqrt{41}=$ ＿(23)＿ 正確至小數＿(24)＿位。

(五) $\cos 73^\circ\ 44'=0.2800$, 則 $\sin 36^\circ\ 52'=$ ＿(25)＿ $\cos 36^\circ\ 52'=$ ＿(26)＿ 。

(六) 要求 $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ 的近似值正確到小數二位, 則必需先求得 $\sqrt{3}$ 正確到小數第＿(27)＿位。考慮半徑等於2的圓之內接正五邊形P, 利用 $\sin 18^\circ=$ ＿(28)＿。可得 P 之邊長 $s=$ ＿(29)＿。試利用下表求s之近似值, 正確至二位小數得到的結果是＿(30)＿。

x	3	5	6	7
$\sqrt{x}$	1.7321	2.2360	2.4494	2.6457

各近似值正確到小數四位。

(七) 將區間[0,30] 分成 n 等分, 以下列各種方法求 $\int_0^{30} x^2 dx$ 之近似值,

設 $f(x) = x^2$, 前面空格寫出算式, 後一空格寫出答案,

例: 矩形的長與寬為2、6求面積

解: 算式 $2 \times 6 = 12$(答案)

左端點矩形法近似值 ___(31)___ = ___(32)___ $n = 30$

右端點矩形法近似值 ___(33)___ = ___(34)___ $n = 30$

中點 矩形法近似值 ___(35)___ = ___(36)___ $n = 3$

梯形 法近似值 ___(37)___ = ___(38)___ $n = 6$

拋物線 法近似值 ___(39)___ = ___(40)___ $n = 5$

(八) 計算與證明題:20 分

1. 圓之半徑為 r , 外切正 n 邊形之邊長為 a, 試以 r 及 a 表出 (2分) 外切正 $2n$ 邊形之邊長並證明之 (3分)。
2. 求 $\sqrt{11}$ 之近似值, 精確至小數後第二位 (5分)。
3. 給定 x 軸上三點 $A(w^2, 0)$,$P(w^2 + p, 0)$ $B((w+1)^2, 0)$, 其中 $w > 0$,$p > 0$ 且 $w^2 + p < (w+1)^2$, 今過 A,B 作 x 軸之垂線各交曲線 $f(x) = \sqrt{x}$ 於點 A',B' , 又過 P 作 x 軸的垂線各交線段 $\overline{A'\,B'}$、曲線 $f(x) = \sqrt{x}$ 以及過 A' 的切線 L 於點 P'、Q、P'' 。試以

    (1) w, p 表示 $\overline{PP''}$,$\overline{PP'}$ 二線段之長 (各2分),

    (2) 並證明之 (各3分)。

台北市立建國高級中學

七十九學年度第二學期第一次月考數學科(自然組) 三年級試題

_班積分號_姓名___________

答案

1. $1+\frac{1}{2}(X-1)-\frac{1}{8}(X-1)^2+\frac{1}{16}(X-1)^3$
2. 1.0955
3. $W+\frac{1}{2W}(X-W^2)-\frac{1}{8W^3}(X-W^2)^2$
4. $W+\frac{P}{2W}-\frac{P^2}{8W^3}$
5. $1+X+\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{6}X^3$
6. $\frac{8}{3}$
7. $X-\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{3}X^3$
8. $\frac{5}{6}$
9. $2X+\frac{2}{3}X^3$
10. $\frac{56}{81}$
11. $X-\frac{1}{6}X^3$
12. 0.7045
13. $1-\frac{1}{2}X^2$
14. 0.6916
15. $1+2(X-\frac{\pi}{4})+2(X-\frac{\pi}{4})^2$
16. 1
17. $\frac{4}{3}$
18. $\frac{58}{45}$
19. -62
20. $\frac{2}{3}$
21. 6.4031242
22. 6.4031250
23. 6.403124
24. 5
25. 0.6
26. 0.8
27. 4
28. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
29. $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
30. 2.35

左端點矩形法近似值	31. $\sum_{k=0}^{29} K^2$	32. $8555 n=30$
右端點矩形法近似值	33. $\sum_{k=1}^{30} K^2$	34. $9455 n=30$
中點 矩形法近似值	35. $10(5^2+15^2+25^2)$	36. $8750 n=3$
梯形 法近似值	37. $\frac{5}{2}[0^2+30^2+2(5^2+10^2+15^2+20^2+25^2)]$	38. $9125 n=6$
拋物線 法近似值	39. $\int_0^{30} x^2 dx$	40. $9000 n=5$

(八) 計算與證明題:20 分

1. 圓之半徑爲 r , 外切正 n 邊形之邊長爲 a, 試以 r 及 a 表出 (2分) 外切正 $2n$ 邊形之邊長並證明之 (3分)

設外切正 $2n$ 邊形之邊長爲 x,

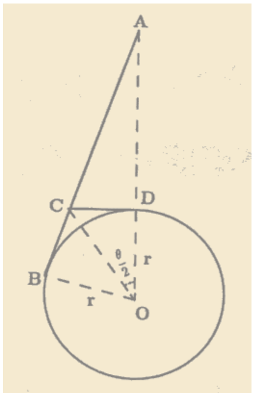
$$\frac{x}{2}=\overline{CD}=r\tan\frac{\theta}{2},$$

$$\overline{AB}=\frac{a}{2}=r\tan\theta=r\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}},$$

$$=\frac{4r^2x}{4r^2-x^2}。$$

故得 $ax^2+8r^2x-4ar^2=0$,

$$x=\frac{2r\sqrt{a^2+4r^2}-4r^2}{a}。$$



2. 求 $\sqrt{11}$ 之近似值, 精確至小數後第二位 (5分)

3.3 給2分

3.32 給5分

3. 給定 x 軸上三點 $A(w^2,0)$,$P(w^2+p,0)$,$B((w+1)^2,0)$, 其中 $w>0$,$p>0$ 且 $w^2+p<(w+1)^2$, 今過 A,B 作 x 軸之垂線各交曲線 $f(x)=\sqrt{x}$ 於點 A',B' , 又過 P 作 x 軸的垂線各交線段 $\overline{A'\,B'}$、曲線 $f(x)=\sqrt{x}$ 以及過 A' 的切線 L 於點 P'、Q、P'' 。試以

(1) w,p 表示 $\overline{PP''}$,$\overline{PP'}$ 二線段之長 (各2分)

(2) 並證明之 (各3分)

證:x 滿足 $w^2 < x = w^2 + p < (w+1)^2$,

此時 $\sqrt{w^2} < \sqrt{w^2+p} < \sqrt{(w+1)^2}$,

即 $0 < p < 2w+1$。

考慮曲線 $y = \sqrt{x}$,

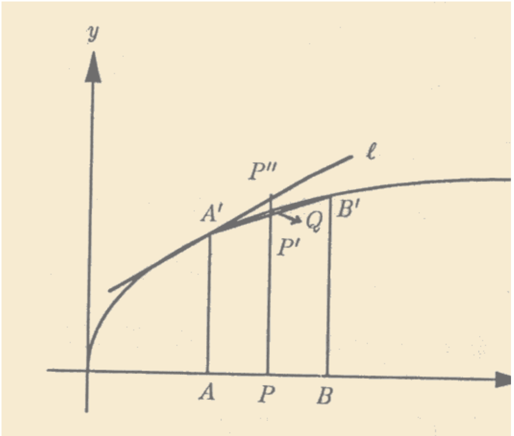
取點 $A = (w^2, 0), P = (w^2+p, 0), B = ((w+1)^2, 0)$,

過 A, B 作 x 軸的垂直線分別交曲線 $y=\sqrt{x}$ 於點 A'、B'。

又過 P 作 x 軸的垂線分別交線段 $\overline{A'B'}$, 曲線 $y=\sqrt{x}$ 及在 A' 的切線 l 於點 P' ,Q 及 P''。

因爲 $\overline{AP} : \overline{PB} = P : 2w+1-P$

故得



$$\begin{aligned}\overline{PP'} &= \frac{(2w+1-p)\overline{AA'} + p\overline{BB'}}{p+2w+1-p} \\ &= \frac{(2w+1-p)w + p(w+1)}{2w+1} \\ &= \frac{w(2w+1)+p}{2w+1} \\ &= w + \frac{p}{2w+1}\end{aligned}$$

而切線 l 的方程式是 $y = w + \dfrac{1}{2w}(x - w^2)$

所以 $$\begin{aligned}\overline{PP''} &= w + \frac{1}{2w}(w^2+p-w^2) \\ &= w + \frac{p}{2w}。\end{aligned}$$