一組弦可將圓分成幾部份?

(一道簡單的計數問題所引發的兩個啓示)

王子俠

山窮水盡疑無路

柳暗花明又一村

學過初等組合學的讀者, 甚至於一些高中學生可能都作過或是聽過下面這個問題:

問題 I: 設 K 爲一凸 n 邊形 $(n \geq 3)$。假定任何三條 K 之對角線均不共點, 試問 K 之內部 被所有對角線分成多少區域 (regions)?

如果我們假定 K 是一個圓的內接 n 邊形, 則問題 I 顯然與下面的問題等價:

問題 II: 將圓周上之 n 個點兩兩相連。假定在所得的弦之中, 無三條共點, 試問圓之內部被這些弦分成多少區域?

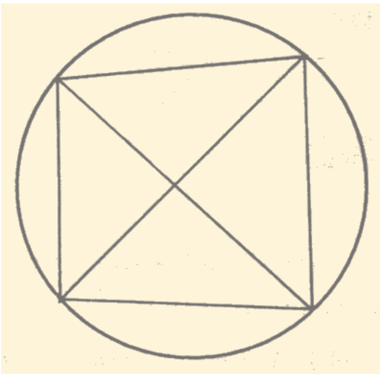
(嚴格來說, 問題 I 和 II 只能說是“幾乎”等價, 因爲問題 I 必須是 $n \geq 3$ 時才有意義, 而在問題 II 中, 只需假定 $n \geq 2$, 甚至於 $n = 1$, 亦無不可。)

很明顯的, 如果 $g(n)$ 和 $f(n)$ 分別表問題 I 和 II 的答案, 則有 $f(n) = g(n) + n$。所以我們只需找出 $f(n)$ 之值即可。如同作許多組合學問題時一樣, 我們先對不太大的 n 計算 $f(n)$ 之值, 看看有沒有什麼格式 (pattern) 或蛛絲馬跡可循。當 $n = 2, 3, 4, 5$ 時可以很快地算出 $f(2) = 2, f(3) = 4, f(4) = 8$ 以及 $f(5) = 16$。(參見圖一及圖二)。因爲 $2 = 2^1, 4 = 2^2, 8 = 2^3, 16 = 2^4$, 一些“聰明”的讀者也許會遽下結論而作出 $f(n) = 2^{n-1}$ 的臆測 (conjecture)。當然, 作出一個臆測, 即使結論不對也不會有太大的關係, 因爲還必須能加以證明才算數。

爲了愼重起見, 我們現在再多走一步, 計算 $f(6)$ 之值, 看看 $f(6) = 2^5 = 32$ 是否成立。用圖三中的圓內接六邊形, 你會發現不管你多麼仔細地數, 數來數去, 結果總是只有31個區域! 換言之, $f(6) = 31$ 而不是32。這時你不得不承認你原來的臆測是錯誤的, 而開始想辦法找尋正確的答案。也許你很不情願, 因爲你覺得 $f(n) = 2^{n-1}$, 如果對的話, 是個相當漂亮的公式, 但你不必灰

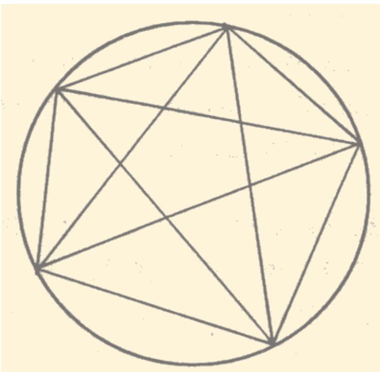
心, 因爲 $f(n)$ 的眞正公式還沒找到, 也許它比你原來猜測的公式更漂亮, 亦未可知。無論如何, 我們已得到第一個啓示, 那就是:

> 不管已有的證據多麼令人信服, 在沒有找到證明之前不能輕率地遽下結論。



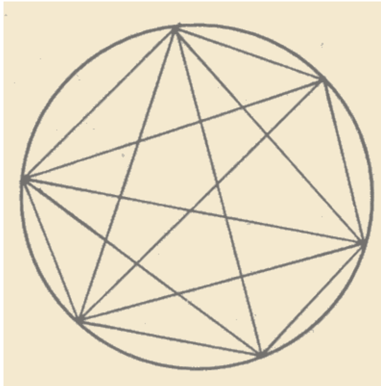
圖一

$(f(4)=8)$



圖二

$(f(5)=16)$



圖三

$(f(6)=?)$

這也就是衆所週知的胡適先生的名言“大膽假設, 小心求證”。換句話說, 你可以作任何大膽的假設, 但必須能加以證明才行。

現在言歸正傳, $f(n)$ 之值到底是多少呢? 這個答案非常漂亮 (如果你等不及, 不妨直接看下面的系一), 在一些書上可以找到 (例如參考書目之 [2]), 但大部份的書都沒有給出證明,(甚至只提問題沒有答案), 即使給出證明, 也相當複雜。我們現在“以退爲進”, 考慮下面這一個比問題 II 更一般化的問題:

問題 III: 設在一個圓內作 k 根弦。若無三弦共點, 則此 k 根弦將圓之內部分成多少區域?

有兩點是可以立刻看出來的:

(i) 問題 II 是問題 III 的一個特殊情形。

(ii) 問題 III 的答案與這 k 根弦在圓內的交點數目有關。例如 $k=2$ 時, 若兩弦不相交, 則圓被分成三個區域, 而若兩弦相交, 則圓被分成四個區域。

下面我們給出問題 III 的答案, 和一個非常簡單的證明。

定理: 假定 k 根弦在圓內有 t 個交點(注意: 圓周上的交點不算), 且無三弦共點, 則此 k 根弦將圓之內部分成 $k+t+1$ 個區域。

證明: 以 $w(k,t)$ 表所求區域的個數。我們對 k 用歸納法證明 $w(k,t)=k+t+1$ 。

當 $k=1$ 時, 必然 $t=0$, 而一根弦顯然將圓分成兩個區域, 故 $w(1,0)=2=k+t+1$ 。

假定 $w(k,t)=k+t+1$ 對某個 $k\geq 1$ 成立。現在考慮加多一根弦 c 。假定 c 在圓內產生 s 個新的交點。以 q_0 及 q_{s+1} 表 c 之兩端點, 而以 $q_1,q_2,\cdots,q_s$ 表在 c 上新產生之交點, 自 q_0 至 q_{s+1} 順序排列。對任意之 $i(0\leq i\leq s)$, 線段 $\overline{q_iq_{i+1}}$ 必然通過某個 (唯一的) 原來存在的區域 R , 而將 R 分成兩個區域。故從 q_0 走到 q_{s+1} 一共增加了 $s+1$ 個新的區域。於是 $w(k+1,t+s)=w(k,t)+s+1=(k+1)+(t+s)+1$ 。證明完畢。

由 $w(k,t)$ 的公式可以立刻導出 $f(n)$ 和 $g(n)$ 之值:

系一: $f(n)=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}$。

證明: 將一個圓的內接 n 邊形 K 的每一條邊及對角線都看成一根弦, 則弦的個數為 $k=\binom{n}{2}$ 。每一個在圓內的交點顯然由兩根對角線 (即相當於 K 的四個頂點) 唯一決定, 故交點之個數為 $t=\binom{n}{4}$ 。於是

$$\begin{aligned} f(n) &= w(k,t)=k+t+1 \\ &= \binom{n}{2}+\binom{n}{4}+1 \\ &= \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}。\end{aligned}$$

系二: $g(n)=\binom{n-1}{2}+\binom{n}{4}$ $(n\geq 3)$ 。

證明:

$$\begin{aligned} g(n) &= f(n)-n \\ &= 1+\frac{n(n-1)}{2}-n+\binom{n}{4} \\ &= (n-1)(\frac{n}{2}-1)+\binom{n}{4} \\ &= \binom{n-1}{2}+\binom{n}{4}。\end{aligned}$$

從上面定理的證明, 我們得到第二個啓示, 那就是: 當你感覺到一個問題的證明似乎相當複雜時不妨“退一步”, 考慮這個問題的一般化。也許會忽然柳暗花明; 換句話說, 原來問題的特殊化可能反而堵塞了你的思路, 而在考慮一般化的情形時, 才會豁然開朗, 眞相大白。

参考書目

1. R. A. Brualdi, *Introductory Combinator- ics*, (p. 151, Ex 13)。
2. Daniel I. A. Cohen, *Basic Techniques of Combinatorial Theory*, (p. 96, Ex. 61)。
3. Ross Honsberger, *Mathematical Gems*, (Chapter 9)。

4. Bradley W. Jackson and Dimitri Thoro, *Applied Combinatorics with Problems So- lving*, (p.233, Ex. 22)。

後記: 此文作於八十年七月筆者訪問中研院數學所之時。謹將它獻給全所的研究及工作人員作爲紀念。

—本文作者任教於加拿大 Waterloo 之 Wilfrid Laurier University—