# 從哈耳級數到基波理論

李孟書

前言：在最近傅立葉分析的研究中，基波理論 (Wavelets Theory) 掀起了一股熱浪。李志豪教授在第 15 卷第二期的季刊“日漸獲得青睞的基波理論”譯文中，亦對此理論做了概述。在本文裡，筆者試著用多重解像分析 (Multiresolution Analysis) 的方法，去重新理解古典的哈耳級數 (Haar Series)；接著去描述一個理想的基波，及它的特性。因此而得知：基波 (Wavelet) 是一個 “平滑化”的哈耳基底 (Haar Basis)，而它有一些傅立葉級數所沒有的特性。這些特性正是基波理論被熱烈研究且廣泛應用的主要原因。

哈耳函數是最簡單的基波，讓我們由它開始。哈耳函數就是：$h := \chi[0,1/2) - \chi[1/2,\ 1)$，也就是取值爲 1 在 [0,1] 的左半部，而取值爲 $-1$ 在右半部。經由平移、放大、縮小 (translation and dilation)，我們可得到一群函數族

$$h_{\nu k} := 2^{\frac{\nu}{2}} h(2^\nu x - k), \qquad \nu, k \in \mathbf{Z}$$

而對於每個函數 $h_{vk}$，它的支柱(Support) 就是在區間 $I_{vk} := [k2^{-v}, (k+1)2^{-v})$。從古典的分析理論我們知道,$h_{vk}$ 這群函數是一個$L^2(\mathbf{R})$ 的正交規格化基底(Orthonormal Basis)。

定義 $S := S^0$ 爲 $L^2(\mathbf{R})$ 的子空間，它包含了一些在整數區間爲常數的函數。也就是任何函數 $f$ 在 $S$ 裡滿足 $f(x)$ =常數,$\forall x \in [k, k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$。我們可知 $S$ 是一個移轉不變 (shift invariant) 空間。也就是，假如 $s \in S$, 則對 $s$ 的移轉 $s(\cdot - k)$,$k \in \mathbf{Z}$ 仍屬於 $S$ 裡。對於 $S$，一個簡單的正交基底就是 $\{\phi(\cdot - k)\}$,$k \in \mathbf{Z}$。而 $\phi$ 定義爲 [0,1] 區間的特徵函數。也就是說，對於 $\forall s \in S$，我們有一個唯一的表現

$$s(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c(k)\phi(x-k), \qquad (c(k)) \in l_2(\mathbf{Z})$$

經由放大、縮小 (dilation) 我們可得到一個等級空間 (scale of space):

$$S^\nu := \{s(2^\nu\cdot) | s \in S\}, \qquad \nu \in \mathbf{Z}$$

因此，當固定 $\nu$,$S^\nu$ 就是一個 $L^2(\mathbf{R})$ 的子空間，而且它滿足在每個區間 $[k_2^{-\nu}, (k+1)_2^{-\nu})$,$k \in \mathbf{Z}$ 上爲常數。這個規格化的函數族 $\phi_{\nu k} := 2^{\frac{\nu}{2}}\phi(2^\nu x - k)$, $k \in \mathbf{Z}$ 就形成了 $S^\nu$ 的一個正交規格化基底。明顯的我們有 $S^\nu \subset S^{\nu+1}$,$\nu \in \mathbf{Z}$。實際上我們可得:

$$\text{(1.1)} \qquad S^\infty = L^2(\mathbf{R})\text{且}S^{-\infty} = \{0\}。$$

接下來, 我們定義: $P_\nu : L^2(\mathbf{R}) \to S^\nu$ 爲從 $L^2$ 到 $S^\nu$ 的正交投射算子 (orthogonal projector), 我們有以下的表示, 對 $\forall f \in L^2$

$$P_\nu f = \sum_k < f, \phi_{\nu k} > \phi_{\nu k},$$

$$\phi_{\nu k}(x) = 2^{\frac{\nu}{2}}\phi(2^\nu x - k)$$

從 (1.1) 我們可得到 $P_\nu f \to f$ 當 $\nu \to \infty$ 且 $P_\nu f \to 0$ 當 $\nu \to -\infty$。所以

$$\begin{aligned} f &= \lim_{\nu\to\infty}(P_\nu f - P_{-\nu} f) \\ &= \lim_{\nu\to\infty}\sum_{n=-\nu}^{\nu-1}(P_{n+1}f - P_n f) \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}(P_{\nu+1}f - P_\nu f)。\end{aligned}$$

也就是

$$\begin{aligned} f &= \sum_{\nu\in Z}(P_{\nu+1} - P_\nu)f \qquad (1.2) \\ &= \sum_{\nu\in\mathbf{Z}} Q_\nu f \end{aligned}$$

其中

$$Q_\nu = P_{\nu+1} - P_\nu。$$

我們可宣稱 $Q_\nu$ 是 $W^\nu$ 上的正交投射算子, 其中 $W^\nu := S^{\nu+1} \ominus S^\nu$, 而 $S^{\nu+1} \ominus S^\nu$ 表示是 $S^\nu$ 在 $S^{\nu+1}$ 的正交互補 (orthogonal complement)。我們只需驗証 $Q_\nu^2 = Q_\nu$ 即可,

$$\begin{aligned} & (P_{\nu+1} - P_\nu)(P_{\nu+1} - P_\nu) \\ =\ & P_{\nu+1} - P_\nu P_{\nu+1} - P_{\nu+1}P_\nu + P_\nu \\ =\ & P_{\nu+1} - P_\nu - P_\nu + P_\nu \\ =\ & P_{\nu+1} - P_\nu = Q_\nu \end{aligned}$$

從上頭我們知道 $W^0 = S^1 \ominus S^0$, 而 $W^\nu$ 就是放大、縮小 (dilation) 的基波空間, 其中 $W^\nu = \{w(2^\nu \cdot x) : w \in W^0\}$。如果 $\nu \neq u$, 則 $W^\nu \perp W^u$。從 (1.2) 知 $L^2(\mathbf{R})$ 是 $W^\nu$ 的正交直和

$$L^2(\mathbf{R}) = \oplus_{\nu\in\mathbf{Z}} W^\nu \qquad (1.3)$$

到此, 我們要問 $W^0$ 與哈耳函數 $h$ 有何關係? 這個問題可以由證明出 $W^0 = S(h)$, 也就是 $W^0$ 是由 $h$ 所產生的移轉不變空間而獲得解答。我們的解釋如下: 假如, $t \in s^1$,

$$\begin{aligned} t = s(2x) &= \sum_{j\in Z} c_j\phi(2x - j) \\ &= \sum_{j=2k} c_j\phi(2(x-k)) + \sum_{j=2k+1} c_j\phi(2(x-k) - 1) \end{aligned}$$

現在令 $\eta_0(x) = \phi(2x)$, $\eta_1(x) = \phi(2x-1)$, 對於在 $S^1$ 的任何函數可表成:

$$\sum_{j\in Z} c_j\eta_0(x-j) + \sum_{j\in\mathbf{Z}} c_j\eta_1(x-j)。$$

但是, 我們有

$$\eta_0 = \frac{\phi + h}{2}, \qquad \eta_1 = \frac{\phi - h}{2}。$$

這表示說:$S^1 = S^\circ \oplus S(h)$, 而 $S^1 = S^\circ \oplus W^\circ$。由唯一性我們可得 $W^\circ = S(h)$。現由 (1.3) 我們可得以下的結論:$\forall f \in L_2(\mathbf{R})$

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{\nu k} h_{\nu k}(x), \qquad (1.4)$$

其中 $h_{\nu k}(x) = 2^{\frac{\nu}{2}} h(2^\nu x - k)$。

讓我們舉個例子來說明上述的觀念。假如我們要分解一個函數 $f(x)$,$-\infty < x < \infty$, 首先我們以一般常用的常數函數來逼近 $f(x)$, 我們可選用任意小的區間。爲了說明起見, 我們選用區間長爲 $2^{-4}$ , 也就是:

$$I_{4k} = [2^{-4}k, 2^{-4}(k+1)), \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

所以我們可得

$$f(x) \approx f^{(4)} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^4 \phi(2^4 x - k);$$

這裡 $\phi(2^4x-k)$ 是在區間 $I_{4k}$ 上的特徵函數

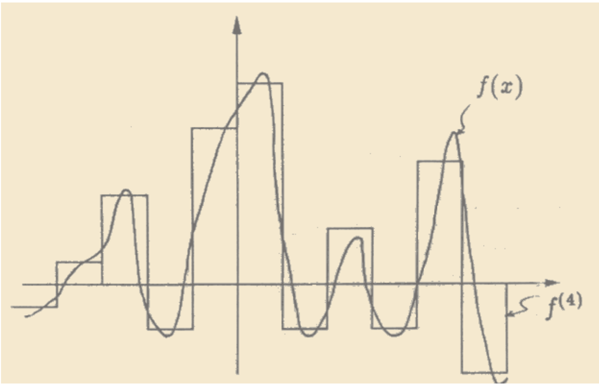


圖 a

,$c_k^4$ 是函數 $f^{(4)}$ 在區間 $I_{4k}$ 上的 “高度”。(見圖 a)

現在假如我們並不需要那麼細緻的對 $f$ 逼近。我們可選用較粗層的對 $f$ 逼近, 也就是用區間 $I_{3k} = [2^{-3}k, 2^{-3}(k+1))$ 上的特徵函數:

$$f^{(3)} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^3 \phi(2^3 x - k);$$

(見圖 b)

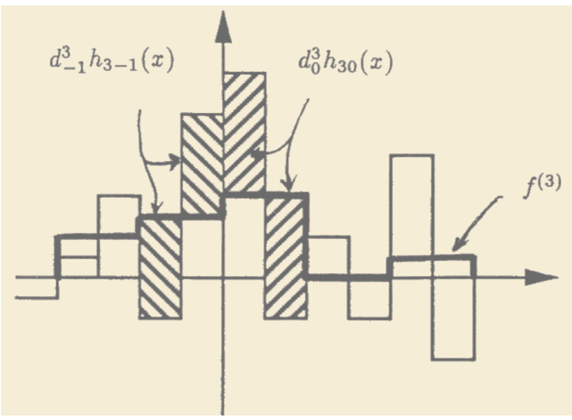


圖 b

對於係數 $c_k^3$ “最好”的選擇是取在細層上“高度”的平均值 (亦即 $C_k^4$)。接下來考慮這兩層上的表示“誤差”, 這意謂我們失去了一些精確。表示如下:

$$f^{(4)} - f^{(3)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^3 2^{\frac{3}{2}} h(2^3 x - k)$$

(見圖c)

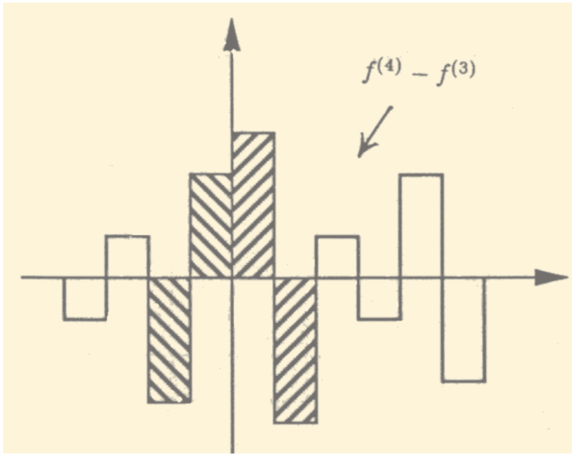


圖 c

上面所談的哈耳級數分解顯然有一些好的特性。假如我們只對函數 $f$ 的某部分有興趣, 我們可以找出這“和” 中的某些項是對 $f$ 的某部分有貢獻。例如我們只對 $f(x)$ 在 $1 \le x \le 1.5$ 之間有興趣, 我們只要保留一些項使得 $h_{\nu k}(x) \neq 0$, 而不管其他項。換句話說, 我們需要的條件是 $0 < 2^\nu x - k < 1$, 而且 $1 \le x \le 1.5$ , 對於給定的 $\nu$, 相應在 $2^\nu$ , 這些項 $k$,$2^\nu \le k \le 2^\nu \cdot 1.5$ 就是我們所要的。因爲每個 $h_{\nu k}(x)$ 只在一個非常小的區間上是不等於0 , 所以哈耳級數能讓我們注意力“集中”在函數 $f$ 的某個特

殊部份上。不幸的, 對於每個哈耳級數的頻率質譜 (frequency spectrum) 並不是那麼美好。它的原因是: 哈耳函數是構造在兩個“箱子”上, 它的傅立葉變換衰退的相當慢 (因不平滑, 從 Riemann-Lebesque Lemma 可看出)。總之, 對於在哈耳級數中的一些不同項, 在頻率域上起了複雜的交互作用, 這不是我們想要的。因此, 一個理想而類似哈耳級數的展開式便是:

$$(1.5)\quad f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{\nu k}\psi_{\nu k}(x),$$

$$\begin{cases} \psi_{\nu k}(x) = 2^{\frac{\nu}{2}}\psi(2^\nu x - k) \\ d_{\nu k} = < f, \psi_{\nu k}(\cdot) > \end{cases}$$

其中要求函數 $\psi$ 滿足

$$(1.6)\quad \begin{cases} \psi(x) \neq 0 & \text{for } 0 \leq x < 1 \quad (1) \\ \widehat{\psi}(\xi) \neq 0 & \text{for } 1 \leq |\xi| < 2 \quad (2) \end{cases}$$

因為第一個條件可使我們知道函數 $\psi_{\nu k}(x)$ 在那裡非0 , 就如哈耳函數一樣。而在第二個條件裡, 因為:

$$\mathcal{F}(\psi_{\nu k})(\xi) = 2^{\frac{\nu}{2}} e^{i2^{-\nu}k\xi}\mathcal{F}(\psi)(2^{-\nu}\xi)。$$

對於給定的 $\nu_0$ 相對於 $f$ 的頻率域上,$2^{\nu_0} \leq |\xi| < 2^{\nu_0+1}$ 正好只有在 $\nu_0$ 層上的 $\psi_{\nu_0 k}(x)$ 項才有相關。我們於是可避免掉一些在不同頻率域上, 項與項之間的交互作用。我們可“集中”在函數 $f$ 的某些想要的部分, 而得到一個類似傅立葉級數的頻率分解。

問題是, 沒有任何函數 $\psi$ 能完全滿足性質 (1.6) (Paley-Wiener Theorem)。基波分解是用 (1.5) 來表示, 但其中的 $\psi$ 只能滿足性質 (1.6) 到某種程度。對於哈耳函數來說, 它是一個極端的情形, 只滿足第一個部分, 而一點也不滿足第二個部分。其他的基波, 如 (見 [1]) “Daubechics Wavelets ”, 在這個性質間有點妥協, 也就是說 兼具這兩種性質到某種程度上。這個基波分解是構造在一個稱為多重解像分析的程序上 (見 [2]), 它很類似我們上頭所提到過的哈耳級數。即使沒有完全滿足性質 (1.6) 的“理想”基波, 當我們理解基波理論時, 還是以理想的基波作為模型。例如, 當我們選定一個基波 $\psi$ 時, 讓我們試著去了解包含在係數 $d_{\nu k}$ 裡的東西

$$\begin{aligned} d_{\nu k} &= < f(\cdot), \psi_{\nu k}(\cdot) > \\ &= \int f(x) 2^{\frac{\nu}{2}}\psi(2^\nu x - k)dx。\end{aligned}$$

用我們選定的模型, 假如 $\psi$ 是一個理想的基波, 因為函數 $\psi(2^\nu x - k)$ 在區間 $I_{\nu k} := [k2^{-\nu}, (k+1)2^{-\nu})$ 外是0 , 只有 $f$ 在 $I_{\nu k}$ 上的行為會影響 $d_{\nu k}$。另一方面, 由 Plancherel 公式, 我們知道

$$d_{\nu k} = < \mathcal{F}f(\cdot), 2^{\frac{\nu}{2}} e^{i2^{-\nu}k\xi}\mathcal{F}(\psi)(2^{-\nu}\cdot) > 。$$

而 $\mathcal{F}\psi(2^{-\nu}\xi)$ 是0 , 除非 $1 \leq 2^{-\nu}\xi < 2$, 這就是告訴我們, 在頻率域上 $\mathcal{F}f$ 只在 $2^\nu \leq \xi < 2^{\nu+1}$ 時, 才會影響 $d_{\nu k}$ 的計算。

讓我們把這些觀念放在一起, 我們可以了解到 $d_{\nu k}$ 含有在頻率域上 $|\xi| \approx 2^\nu$, 而相對於位置在 $x \approx 2^{-\nu}k$ 上的資訊。由於基波分解這個“放大”(zooming) 的特性, 它 容許在函數“不連續”的地方有很好的描述, 並非傅立葉變換所能做到, 因而使得它在應用上, 例如在解偏微分方程方面是很被看好的。

一個函數的平滑性是反映在它的頻率域上的行為 (Riemann-Lebesque Lemma)

—— 一個不平滑函數有很多高頻率出現在頻率域上。但一個平滑函數, 這些高頻率部分當 $|\xi|$ 變大時, 很快就逼近0 。從這些觀察我們可歸納一個準確的數學原則:

**一個函數的大小及平滑性, 可有系統的反映在這些係數 $\{< f(\cdot), \psi_{\nu k}(\cdot) >\}$ 裡。**

## 參考書目


1. I. Daubechies, *Orthonormal basis of compactly supported wavelets,* Comm. on Pure & Applied Math. **41** (1988), 909-996.
2. S. Mallat, *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of* $L^2(R)$, Trans. of the Amer. Math. Soc. **315, No.1** (1989).
3. Y. Meyer, Ondelettes ét opérateurs (法文), Hermann, Paris. (1990).


—本文作者現爲美國南卡羅萊那大學博士候選人—