數學美之魅力在那裏？

吳開朗

英國劍橋大學純數學教授、世界著名數學家G. H. 哈代（Hardy, 1871 -1947）在《一個數學家的自白》一文中曾經提出：「現在也許難以找到一個受過教育的人，對於數學美的魅力全然無動於衷。」[4]那麼，數學美的魅力究竟在那裏呢？這是一個既令人神往但又使人感到迷茫的問題。在數學理論研究工作者、數學教育工作者以及從事於數學專業學習的青年學子中，確實有不少人曾經被數學美的迷人魅力所引誘，以致流連忘返。數學美最早顯現於古希臘數學的奠基工作之中，其後則表現為知名數學家對於數學理論研究的審美追求。

一、古希臘數學家已經在數學中認識到美、和諧、簡單、明確以及秩序

美國數學家M. 克來因（Kline）在《古今數學思想》一書中曾說：「他們（指畢達哥拉斯等古希臘數學家——作者注）也並不忽視數學在美學上的意義。這門科學在古希臘時代被人珍視為一門藝術，他們在其中認識到美、和諧、簡單、明確以及秩序。算術、幾何與天文學被人們看作是心智的藝術與靈魂的音樂。」[2]今天看來，極力追求美的現代數論，就是從希臘時期所研究的算術理論脫胎而來的。畢達哥拉斯學派當時把音樂也歸結為數與數的符號關係，致使當時的音樂被作為學校教育中四大數學學科之一。由於當時他們是以和諧作為美，並且偏重於形式的探求，這就為後來美學範疇內形式美的發展和研究奠定了基石。

古希臘著名數學家歐幾里德（Euclid，約公元前 330 - 公元前 275）於公元前三世紀時期，對於當時數學研究的成果，加以搜集與整理，寫成一部數學巨著《原本》，在該書中，他以23條定義、5條公設、8條公理為基礎，利用形式邏輯的方法，演繹出465個定理，樹立了科學著作的美學典範，使後世許多數學家都沉醉於它那迷人的溫馨的美的光芒之中。兩千多年來，它以優美莊嚴的結構，著稱於世，不知有多少科學少年為之迷戀。大數學家B. A. W. 羅素（Russell, 1872-1970）在11歲學習《原本》，感覺「就像初戀一樣使人眩惑」。大物理學家A. 愛因斯坦（Einstein, 1878-1955）在12歲學習《原本》時，稱它是「神聖的幾何學小書」。時至今日，世界各國的中學幾何課本仍然受到它的傳統影響。

及至文藝復興之後，又出現了一些熟悉美學的數學家，如達·芬奇（1452-1519）和帕喬里（約 1445-1514）等等。然而，其中影響較大者乃是R. 笛卡爾（Descarter, 1596-1650）和J.W. 萊布尼茲（Leibniz, 1646-1716）。

笛卡爾的美學觀點則是認爲美不在於客觀事物的本身，而在於「判斷和對象間有一種恰到好處的協調和適中」，於是尋找代數與幾何之間的協調，正是他創立解析幾何原理的美學思想基礎。經過他以及其後繼者的努力，使得本來需要特殊技巧才能證明的幾何難題，逐步變成可以按照確定的法則與秩序而進行的算法過程，使得許多古典幾何學的內容都被納入於代數的研究領域。他曾設想把邏輯演繹的方法，用代數式子表示出來，將邏輯演繹的方法，推向更完美的境界，直到1847年，G.布爾（Boole, 1871-1956)的論文《邏輯的數學分析——關於走向演繹推理》的發表，才使邏輯與代數得到了統一，從此宣告了布爾代數的正式誕生。

萊布尼茲爲了使數學理論實現和諧美，首先提出關於數學眞理「清晰明白」的美學標準。詩是以語言和詞藻來表現它那豐富多彩的生活內涵，畫是以造型來表現它那可見世界的形狀與色彩，而數學則是以人工語言——數學符號來表現客觀世界的數量結構關係，並且進一步編織成優美的演繹形式。萊布尼茲在他的美學標準指引下，自1675年以後，陸續創造了一些行之有效的數學符號，例如，以「dx」表示微分，「$\int$」表示積分。他曾經這樣說過：「要發明，就要挑選恰當的符號。要做到這一點，就要用包含少量因素的符號，來表達和比較忠實地描繪事物的內在本質，從而最大限度地減少人的思維勞動。」作爲邏輯主義者先驅的萊布尼茲，認爲最高的絕對的和諧，就是「完美」與「圓滿」，也就是「美」。他根據自已的美學標準，對於命題「2＋2＝4」進行了邏輯分析，並且提出一個嚴謹、和諧、簡單的邏輯結構，這個結構，實際上就是自然數公理系統的先聲。

二、中國古代數學勝似一套設計精美的程序化語言

與希臘數學追求純粹理念而形成強烈的對照，中國古代數學具有濃厚的應用數學色彩。因此，中國古代數學的美學特徵，主要是應用數學之美。美國著名數學家P.R.哈爾莫斯曾經說過：「應用數學可以是優美多姿的。」[20] 在中國古代，各種數學著作的編寫，大多是沿用問—答—術的形式。所謂「問」，即是選擇一些富有趣味性和故事性的算題；所謂「答」，即是問題的答案；所謂「術」，實際上是用以描述計算過程而構造的一套設計精美的程序化語言。

在春秋戰國時期，著名美學家墨翟和莊周，也都是古代數學家。墨翟提出「言必有儀」以及「有本之者、有原之者、有用之者」的理論思維準則，他被譽之爲東方形式邏輯的創始人，並且率先將邏輯知識用之於幾何學之研究。他所建立的墨氏幾何學，就其理論結構而言，比之歐氏《原本》，略有遜色，但却比《原本》早問世百餘年。他給幾何基本概念所確立的定義，不僅簡單、嚴謹，而且優美雅緻。英國科學家李約瑟在《中國科學技術史》一書中曾經評論說：「《墨經》的幾何理論，完全排除了任何一種認爲中國缺乏幾何思想的猜測。」

莊周極力提倡無爲，但他仍然崇尚自然美。在其名著《莊子》一書中，明確提出：「一尺之錘，日取其半，萬世不竭。」以及「至大無外」、「至小無內」等關於無限論的數學思想。

在數學發展史上，人類對於無限理論認識的每一次深化，都導致了數學上的重大進展。因此，數學家們一致認爲：「數學就是關於無限的科學。」時至近代，德國著名的數學家G.康托（Cantor, 1829-1920），在數學美之魅力的誘導下，向神秘莫測的無限理論發起了挑戰，並且做出了卓越的貢獻。經過他和F.L.G.弗雷格（Froge, 1848-1925）、J.W.R.戴得金（Dedekind, 1831-1936)等人的深入研究，使得無限理論的發展，達到了令人眩暈的高度。世界著名數學家D.希爾伯特（

Hilbert, 1862-1943 ）對於康托的工作給以高度評價，他曾指出：「我感到它（指康托的無限理論——作者注）是數學思想中最令人讚嘆的產物，是在純粹理性的範疇中人類活動的最美的表現之一……沒有任何人能夠把我們從康托爲我們所創造的樂園中開除出去 。」

易圖是中國古代人民最早設計的人工語言、整齊優美，妙趣横生，其中蘊含着豐富的數學寶藏。有很多知名數學家，如萊布尼茲、一行、秦九韶等都曾對它進行過深入研究與發掘。現在發現易圖可以給予多種奇妙的解釋，如二進制數字、組合論、矩陣論、代數學、幾何學等等。這僅僅是易圖研究中數理派的部分解釋（易圖研究中的另兩派爲象數派與義理派）。

J.M. 萊布尼茲在他致德雷蒙的信中曾經說過：「《易經》也就是變易之書，在伏羲的許多世紀以後，文王和他的兒子周公以及在文王和周公五個世紀以後的孔子，都曾經在這六十四個圖形中尋找過哲學的秘密……這恰是二進制算術……在這個算術中，只有兩個符號：0和1 。用這兩個符號可以寫出一切數字。（參見《中國哲學史》1981 年 3 、4 期及 1982 年 2 期）。

三、數學理論的美學標準

數學本是一個和諧統一的整體，它雖然可以劃分爲純粹數學與應用數學兩個部分，但是，在歷史發展的過程中，二者仍然是相輔相成的。有的數學家提出：「純粹數學雖美而無用，應用數學有用但不美 。」[4] 其實不然，應該說二者都是美麗多姿的。[20] 爲牛頓和貝多芬作傳的沙利文曾經寫道：「一個科學理論成就的大小，事實上就是它的美學價值的大小。」

G.H. 哈代在《一個數學家的自白》一文中明確提出：「美是首要的標準，不美的數學在世界上是找不到永久容身之地的 。」[4] 他在該文中當談到漂亮定理的純粹美學特性時，特別強調「簡單性、意外性、必然性與和諧性 。」[4] 當今世界數學最高獎——菲爾茲（Fields）獎獲得者M. F. 阿蒂亞（Atiyah, 1931 —）也曾經說過：「數學家們，特別是從事純粹數學研究的數學家，都力求使自己的科學成果，具有明澈的思想，高雅的風格，優美的論證，完備的細節，均衡的形式和有效的簡潔等美學特性 。」[21] [22] 這裏所說的美學特性，實際上就是美學標準 。

當前數學界對於檢驗數學理論眞理性的美學標準，尙存在着一些的分歧，此乃是因爲數學家個人的審美觀往往具一定的獨特性 。然而，大多數數學家所提倡的美學標準，則都包含有和諧性、簡單性、奇異性這三個基本要素，只不過是其措詞不盡相同罷了 。因此，度量數學美的公式我們可以表示爲：

數學美＝和諧性＋簡單性＋奇異性

所謂和諧性，即是無矛盾性，要求任何一門數學理論消除悖論，此乃是最基本的條件 。在此基礎上，如果這個理論的演算和論證十分簡潔，就會給人以美的感受 。所謂奇異性，即是信息的差異性，而且這個差異性越大，也就越是令人感到驚訝！如果這個理論在演算和證明中，所利用的定理或公式離題意越遠，對於應用它們的設想越離奇，而且又能夠獲得成功，那麼，我們由此所體會到的美感也就越強烈；如若在其演算和證明過程中，不只應用一個定理或公式，而是應用了若干個定理或公式，或者是應用了若干種演算與證明方法的巧妙組合，那麼，我們就會立刻感到它猶如一件藝術精品 。因此，在抽象數學世界裡，對於理論的簡單美和奇異美要求，應該是壓倒一切的 。例如，取得普遍性和永久性統治優勢的十進制，其簡潔和優美就大大地超過了笨重的羅馬數字 。

英國哲學家F.培根（Becan，1561-1626）曾經說過：「美中之最上者是圖畫所不能表現，初睹者所不能見及者。」數學美的這三個特性，正是「初睹者所不能見及者」，它好比是「無聲的音樂」、「無色的圖畫」。在數學王國裡遨遊，亦然會使你感到絢麗多彩，美不勝收。它所表現出來的那種和諧、簡單、奇異的神功魅力，亦然可以使你為之陶醉！為之傾倒！英國大數學B.A.W.羅素（Russell，1872-1970）稱贊數學美是「至高的美」，當論及其性質時，他認為數學美「是一種冷而嚴肅的美」。1907年他在《新季刊》上發表一篇論文，題為《數學的研究》，並在該文中提出：「數學，如果正確地看他，不但擁有真理，而且也具有至高的美。正像雕刻的美，是一種冷而嚴肅的美。這種美不是投合於我們天性的微弱方面。這種美沒有繪畫或音樂的那些華麗的裝飾。它可以純淨到崇高的地步，能夠達到嚴格的只有最偉大的藝術才能顯示的那種圓滿的境界。」[5]

英國哲學家威廉・奧卡姆有句名言：在符合事實的一切假設中，應該選用最簡單的。在陳氏定理發表後的一年當中，國內外又發表了五篇證明同一命題的論文，這五篇論文的共同特點則是：在證明過程上都比陳氏定理簡單。我國著名數學家潘承洞在其所著《素數分佈與哥德巴赫猜想》一書中曾這樣寫道：「我國學者丁夏畦、王元、潘承洞都對『陳氏定理』給出了一個實質性的簡化證明。」在第二十九屆國際數學奧林匹克競賽時，保加利亞的一位選手由於對這次競賽中的第九題，給出了一個比較簡單的解法，因而獲得了特別獎。由此可見，數學的簡單美，也是具有實際價值的。

數學的奇異美，正好適應了人們求奇求異求新的審美心理。美國普林斯頓高等研究所所長H.沃爾夫（Woolf）在紀念A.愛因斯坦（Einstein，1878-1955）誕生一百週年紀念會上講話時，曾經引用過F.培根（Becan）的一句名言：「沒有奇特的奇異性，也就不存在與衆不同的美。」[12]這種美也就是奇異美。1874年L.克羅內克（Kronecker,1823-1891）在一篇論文中恰當地評論了奇異美的功能，他寫道：「一旦人們闖入了所謂奇異美的大門，研究工作馬上就會碰到真正的困難，然而，也立即會在它的深處發現新觀點、新知識的豐富寶藏。」（《十九世紀數學社會史》，1979年7月5日在西柏林召開了由八個國家的學者參加的第三次數學史專題討論會，該書由這次會上所發表的論文滙編而成。）

四、數學美能够激發數學家的研究樂趣

為I.牛頓（Newton，1642-1727）和L.V.貝多芬（Beethoven，1770-1827） 作傳的沙利文曾經說過：「引導科學家的動力，歸根結底是美學衝動的表示。」化學家居里夫人（Maris sklodowska curis）在這方面的體會更深，她寫道：「科學的探討研究，其本身就含有至美，其本身給人的愉快就是報酬，所以，我在我的工作裏，尋得了歡樂。」

法國著名數學家J.S.阿達瑪（Hedamard，1865-1963）在其名著《數學領域中的發明心理學》（江蘇教育出版社，1989年翻譯出版）一書中提出：「關於發明所需要的條件，已被近50年來最偉大的天才人物所闡明，他的名字為科學界所熟知，而且整個近代數學都在隨着他的脈搏跳動，此人就是H.龐卡萊（Poincare，1854-1912）」。龐卡萊是十九世紀與二十世紀之交的數學巨匠，一生著述甚多，經歷過無數次創造的艱辛，領略過無數次發明的喜悅。他曾經這樣說過：「科學家研究自然，並非是因為這樣做有用途，他之所以研究它，是因為他從中能夠得到樂趣。而他之所以能夠從中得到樂趣，那是因為它美。如果自然不美，就不值得去瞭解它，如果自然不值得瞭

解，生活就毫無意義。當然，我在這裡所說的美，不是給我們感官以印象的美，也不是質地美和表現美……我的意思是說那種深奧的美，這種美在於各部分的和諧與秩序，並且能爲純粹的理智所掌握。」龐卡萊在這裡所說的美，對於數學家而言，即是指數學美，它能夠激發研究工作者的數學美感。所謂數學美感，是指審美主體對於數學的結構與關係所產生的一種美感，它可以使審美主體獲得理智的滿足和心靈上的愉悅。

大數學家龐卡萊認爲：數學中的發明或發現即是選擇，選擇的重要標準即是「對於美的渴望」，在選擇中所盡心追求的即是簡單美和奇異美。這是因爲有趣的事實與簡單的理念容易被機遇所復現，而奇異之中往往蘊含着新的信息。龐卡萊還認爲：一個缺乏數學美感的人，決不會成爲一個眞正的創造家。他在一篇論文《數學上的創造》中曾經提出：「那麼，以美和高雅爲特徵，同時能啓發我們內心某種美感的數學實體又是什麼呢？它們是這樣的東西，組成它們的各個部分是如此和諧地配置着……這種和諧性能立刻滿足我們對美的需求……有用的組合，正是那些最美的。我指的是那些最能誘惑特殊情感的組合。」〔18〕

選擇是在數學美感的衝動下進行的，然而，選擇又是由什麼決定的呢？龐卡萊認爲選擇是由數學家的直覺能力所決定的。他曾經指出：「沒有直覺的數學家，便會像一個只會按語法寫詩的作家。」「直覺」一詞，是「Intuition」的意譯，意思是未經充分邏輯推理的直觀，它是以已經獲得的知識和已經積累的經驗爲依據的。一般地說，直覺是對事物本質的直接領悟或洞察，而數學直覺乃是對於數學對象的結構和關係的直接領悟或洞察。龐卡萊不僅認爲數學直覺是發明的工具，同時還認爲邏輯也起始於直覺。並且，在數學證明中同樣也是少不了直覺。他確信唯有直覺「才能賦予幾何學家建立起來的大廈以價值」，唯有直覺「解析學家才能一眼就覺察到邏輯大廈的總藍圖。」

五、數學美能夠激發學習數學的最佳動機

美國著名數學家、教育家G. 波利亞(Polya，1887-1985)曾經提出數學教學的三條原則，即促使學生主動學習的原則、最佳動機原則、階段序進原則。數學教師作爲一個知識推銷員，他的責任就是使學生相信數學是有趣的，並且使他們感到所討論的題目也是有趣的，値得努力去做。爲了有效的學習，學生應當對所學習的材料感到興趣，並在學習活動中找到樂趣，這就是最佳動機原則。

1988年在匈牙利首都布達佩斯召開了第六屆國際數學教育會議，這次會議以「數學教育與文化、美」爲主題，與會者一致認爲：「數學教育還必須將數學所固有的美展示給學生，使學生不僅獲得知識，而且還受到美的薰陶。」所謂受到美的薰陶，即是從中接受審美教育，使學子在愉悅寬舒的數學教學活動中陶冶性格，豐富精神世界，培養高尙情操，並執迷於數學理論的學習與探索。

數學教學過程，是信息交換過程，同時也是審美教育過程。科學理論愈抽象，愈應強調培養學生的美感。決定數學教學成敗的首要條件，乃是學生的學習興趣。興趣是帶有感情色彩的認識傾向，興趣所致，將會導致廢寢忘食，夢寐以求。如若學生能夠對其所學習的內容保持濃厚的興趣，則教學信息在神經線纖通道內的傳輸，即可達到最佳狀態。

國際數學教育委員會（ICMI）1991-1994執行委員會所提出的研究課題之一是：如何提高學生對數學的興趣？我們認爲提高學生興趣的重要環節之一，乃是在數學教學中深入發掘教材本身所固有的美，引導學生在數學王國裡尋幽探勝，使他們感到這裏處處充滿着誘人的

魅力。獨聯體著名數學家H.H.魯金（1883-1950）直到中學的最後幾年，還是很害怕數學，當時他是依靠一位有才幹的家庭教師的輔導，才擺脫這種困境的。考進大學以後，他逐步發現：「數學乃是具有充滿誘人秘密前景的創造性科學。」曾任美國普林斯頓高等研究所研究員D.布萊克威爾（Blackwell）是一位以嚴格和明確而著稱的數學理論家。他曾經說過：「我的高中幾何老師，使我真正對數學發生了興趣。幾何學是一門美妙的學科，直到我學完微積分一年之後，仍然認為幾何學是唯一的一門能使我看到數學是那麼美妙、那麼富有思想的學科”。〔6〕這位數學家不僅教學有方，而且以講課作為樂身之道，並且深刻地體會到數學美所具有的良性循環關係，他認為：「教學是一種樂趣，當教師把這種樂趣傳遞給他人時，自己也會再次體會到它的美。」〔6〕

1980年，美國數學教師聯合會公布了一份文件，名為《關於行動的議程》（An agenda for action），這份文件提出：在數學教育中最為重要的是培養解決問題的能力。法國數學家H.龐卡萊曾經說過：「數學的優美感不過就是問題的解法適合於我們心靈需要而產生的一種滿足。」優美的解答，其思維方法的崇高與雅緻，應該能夠使我們大為驚訝！如果某生對於一道練習題，只能勉強想出一種冗長而迂迴的解法，雖然此種解法他人都未能想到，但是，這種解法給人帶來的只能是感動，而絲毫不能給人以美的感受。能夠給人以美感的解法，，不僅具有和諧性，而且是簡潔的和奇妙的。

美國數學家G.波利亞曾經指出：「解題意味着發現一條擺脫疑難、繞過障礙的途徑，以達到一個不能一蹴而就的目的。」平時解題與數學發現之間，只有難易程度上的差異，而沒有本質上的區別，一個有責任心的教師，與其窮於應付過量的練習題，還不如選擇少數典型例題，引導學生發掘這些題目及其解法中所蘊含的美，以激發其最佳學習動機。生物學家巴斯德（Pasteur）曾經說過：「當你終於確實明白了某種事物時，你所感到的快樂是人類所感到的一種最大快樂。」因此，只要你能夠引導學生徹底解決一個問題，就會使你從中感到美不勝收。

六、數學中的眞善美

在古希臘的哲學家中，已經注意到眞善美的統一問題。蘇格拉底（Socrates,公元前469-公元前399）曾經說過：「凡是我們用的東西，如果被認為是美和善的，那就都是從同一觀點——它的功用去看的。」（《西方美學家論美和美感》北京大學美學教研室編，1980年商務印書館出版，P.19.）柏拉圖（Plato,公元前427—公元前347）是蘇格拉底的學生，他對於抽象數學的產生和發展曾經作過突出的貢獻，他認為在理念世界裡眞善美是統一的。亞里斯多德（Aristotle,公元前384—公元前320）是柏拉圖學園的高材生，他是形式邏輯的創始人，當其闡述邏輯知識時，主要是以數學科學為實例。他曾經提出過：「美是一種善，其所以能夠引起快感，正是因為它善。」由於古希臘時期的哲學家，多數是把數學思想作為進入哲學殿堂的階梯，後人亦稱他們為懂得幾何學的哲學家。因而，他們所談論的關於眞善美之間的關係，對於數學中的眞善美也是適用的。

《英國大百科全書》是將最廣泛的善與價值相提並論，而所謂價值，主要是指數學在社會領域和科學領域中的應用。英國著名數學家和兼哲學家A.N.懷特黑德（Whitehead,1861-1947）在其代表作《數學與善》一文中，曾談到數學模式的應用價值以及模式與善的關係。他寫到：「數學就是對模式的研究，在這裡我們發現把數學與善的研究和惡的研究相聯繫的重要線索。模式只是我們理解經驗的一個因

素，它或是具有直接的價值，或是激起追求未來價值的活動。」1907年，大數學家羅素在《數學的研究》一文中認為：數學不僅「擁有眞理」，而且具有「至高的美」，……「一種眞實喜悅的精神，一種精神上的發揚，一種高於人的意識（這些是至善的標準）」。[5]

在數學理論之中，經過不斷地發展和完善，最終可以實現眞善美的統一。L. 牛頓（Newton, 1642-1727）和G.W.萊布尼兹所發明的微積分，能夠順利解決自然科學中所提出的一些實際問題，當時不得不承認它的善。後來，經過數學家A.L. 柯西（Cauchy, 1789-1857）和K. 魏爾斯特拉斯（Weierstrass, 1815-1897）等人的嚴密化加工，引入了極限、連續等根本性概念，使之日臻完善，最終達到眞善美的統一。著名數學家兼哲學家羅素對於悖論的研究，成績卓著，現有的一些解決悖論的方法，大多數都是源自於他的見解。然而，他所提出的「分支類型論」，由於過於累贅，當時受到冷遇。後來，他的學生蘭姆賽（Ramsey）將其加以改造，建立了「簡單類型論」，這種簡單類型論，不僅可以排除悖論，而且符合於簡單美的要求，自然為大多數數學家所歡迎。由此可見，「美是首要的標準」，[4]如果一個數學理論符合於美學標準，那麼，它一定也是眞的和善的。無怪乎著名數學家C.H.H. 魏爾（Weyl, 1885-1955）曾經這樣說：「我的工作總是力求把眞與美統一起來，但是當我必須從二者擇一時，我通常選擇美。」

英國著名數學家哈代在《一個數學家的自白》一文中，雖然沒有直接提出「善」這個概念，但是，他却認為數學美與數學理論的嚴肅性在被稱之為最好的數學中是並存的。他在這裏所說的「嚴肅性」，實際上就是「善」和「眞」。他在該文中是這樣說的：「最好的數學，既是美的，同時又是嚴肅的……數學定理的嚴肅性不僅在於它的實用效果，而且在於它所涉及的那些數學概念的意義……嚴肅的數學定理，即是把有意義的概念聯繫起來的定理，很可能在數學本身以及其它科學領域內產生重大進展。」[4]除此而外，哈代在該文中還提出：「美是首要的標準」。莫斯科國立大學教授阿諾爾德（Arnolde）則是更加強調美對於眞和善的決定性作用。1987年，當接受《數學評論》副主編採訪時，他曾經發表如下一段談話：「數學有一個人們所不能不讚嘆的性質，這就是它的極端抽象，因而，乍一看毫無用處的一些分枝，只要它們是美的，便具有超凡的效能……當代數學著作的絕大部分，並未能滿足美學上的要求，因而也就絕對不會有什麼用途。」[15]

參考文獻

1. H. 龐卡萊，科學的價值　1988年光明日報出版社出版。
2. M. Kline, *Mathematical though from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972. 參見北京大學數學系譯「古今數學思想」上海科學技術出版社出版。
3. （Japen）Tan Gao Mao, *What is Mathematics, after all ?*　Sciences, 51 (1981), 551-561。
譯文載於「數學譯林」，1986年第5卷第1期P.60.
4. G. H. Hardy, *A Mathematician's apology*, Cambriage University Press, 1940.
5. B. A. W. Russell, *My philosophical development*, Simon and Schuster, New York, 1959.
6. Donald J. Albers, David Blackwell, *Mathematical poeple profiles and interviews*, 1985, 17～32, 1～15.

7. R. Minio, *An interviews with Michael Atiyah*, The mathematial intelligencer, 6 : 1(1984), 9～19.

8. N. Levinson, *Codine theory : A counterexample to G.H. Harday's conception of applied mathematics*, The American mathematical monthly, 77(1970), 249～285.

9. M. Dehn, *Mentality of the mathematician, A characterization*, The mathematical intelligencer, 5 : 2(1983), 18～26.

10. J. Singh, *Mathematics today*, Hindustan times, 1983, 1.2.

11. D. J. Albers, Paul Halmos, *Maverick Mathologist*, Two-year college mathematics Journal, 13(1982), 226～242.

12. Freeman J. Dyson, *Unfashionable pursuits*, The mathematical intelligencer, 5 : 3(1983).

13. Philip J. Davis, *Are there coincidences in mathematics*, The American mathematical monthly, 88 : 5(1981), 311～320.

14. Peter D. Lax, *Mathematics and it's applications*, The mathematical intellgencer, 8 : 4(1986), 14～17.

15. S. Zdravkorska, *Conversation with vladimir lgorevich Arnold*, The mathematical intelligencer, 9 : 4 (1987), 28～31.

16. H. Cartan, *Nicolas Bourbaki and contemporary mathematics*, The mathematical intelligencer, 2 : 4(1980).

17. G. L. Alexanderson Carroll Wilde, Garrett Birkhoff, *Mathematical people profiles and interviews*, Birkhausev Boston, Inc. Cambridge, Massachussetts, 1985, 1～15.

18. H. Poincare, *Mathematical creation*, The world of mathematics, Vol. 4 Simon and schuster, New York, 1956.

19. F. F. Bonsall, *A down—to—earth view of mathematics*, The American mathematical monthly, 88 : 1(1982), 8～15.

20. Paul R. Halmos, *Applied mathematics is Bad mathematics*, Mathematics tomorrow, 9～20.

21. M. F. Atigah, *How research is carried out*, Michael Atiyah collected works, Vol. 1, 214.

22. M. F. Atigah, *Identifying progress in mathematics*, Michael Atigah colleted works, Vol. 1 : 356.

——本文作者任教於阜陽師範學院——