談公平

楊照崑

前言

「員工拼死幹活，老闆毫無表示，員工創造利潤，有權要求分享……」這是黃凡近著「財閥」長篇小說中工人向資本家要求公平待遇的口號。生動的刻劃出了一些社會上的不平之鳴。「不平」，不但受害人覺得委曲，就是旁觀者也憤怒難忍，仁者悲天憫人，奔走呼號，勇者路見不平，拔刀相助，而對一個求智者而言，我們能不能客觀的決定怎樣才是公平？是資本家剝削得太厲害，還是勞工要求過份？您也許不會相信一個簡單的數學公式就可以基本上瞭解這個問題，而且讓我們看到一幅嶄新的圖畫，體會到人間的眞理。

有人說過問題是數學的靈魂。那麼我們就從問題開始吧。假定有一個資本家（廠主）、一個工程師及二個工人。資本家有工廠，但若沒有工程師及工人則不能賺錢。若資本家與工程師合作，沒有工人，則二人大才小用，做些工人的工作，每月可賺三萬元，若加一個工人，因工人有體力技術，效率大增，三人合作每月可賺 6 萬元，若再加一工人，則一月可賺 9 萬元。但若只有廠主與工人沒有工程師，則工廠亦不能開工。現在問這 9 萬元的利潤要如何分配方爲公平合理？（請注意這九萬元完全是利潤，工廠保養、資金利息、股東紅利均已扣除。）

廠主可能對工人說：我們二一添作五，一個月給你一萬五吧。

工人可能會回答，這豈不是太黑。我們每人每月爲工廠「淨」賺三萬。給我們一人二萬有何不可？這樣你們仍可以白白分到我們勞工所創的二萬利潤。何必貪得無厭。

廠主會說：笑話，我不給你工作，別說一萬五，你一毛都賺不到，給你一萬五還人心不足！於是紛爭遂起，工說工有理，主說主有理。那麼聰明的你會站在那一邊呢？我們能用理智來解決這個分配問題嗎？在往下看之前，我希望您暫時合起本文，閉眼想一想這個問題應如何着手解決。先自己想清楚再看答案是增加數學趣味及功力的重要法則。

想好了？那麼我先告訴您答案，一個相當公平的分配應是廠主與工程師各得三萬五，二個工人各得一萬元。不公平？不，再找不到比這公平的法則了。

在談到數學之前，我們可以看看這個問題的博大精深。幾乎所有的經濟問題都與這個問題有關。醫院賺大錢，醫生、護士、技師、警衞均不可少，他們要如何分配這筆大錢？學校中校長、教員、職員、工友在待遇上應有何差

別？學生論文發表，教授的功勞應算多少？更進一步，我們身為社會一份子，應付多少稅，取多少薪水，也可做如是觀。一切權利的基礎也應從公平上着手，我不虧待人，但我也不允許別人虧待我。

謝卜勒(Shapley)公平三原則

首先我們必須明白有合作才有分配公不公平的問題。否則你走你的陽關道打獵，我過我的獨木橋捕魚，在山吃山，靠水吃水，各顧自己，就談不到分配不均的問題。今令ω為一個可由多人合作的工作，而S表示可以參與工作的人們的集合。若U為S的一個子集,則$\omega(U)$表示U人合作時可得的工作利潤。以前面工廠為例，則

$S=\{$廠主，工程師，工人甲，工人乙$\}$。若$U=\{$廠主，工程師$\}$時，$\omega(U)=3$（萬元），若$U=\{$廠主，工程師，工人甲$\}$，則$\omega(U)=6$，若$U=\{$廠主，工人甲$\}$，則$\omega(U)=0$，為了簡便起見，令S中的元素以1，2，…，n為代號，即$S=\{1,2,\cdots,n\}$。令$\phi_i(\omega)$表示i成員在ω工作上該得的報酬。謝卜勒在1953年的論文中，訂下了三個公平的原則。

原則1：報酬與名字無關，只與各人的貢獻有關。即若i與j互換而不影響ω時，$\phi_i(\omega)=\phi_j(\omega)$。

沒有人會反對這個原則，即同工應同酬，張三若可做李四的事，則張三可拿李四的報酬，與他叫張三或李四無關。

原則2：利潤屬於工作者，$\sum_{i\in U}\phi_i(\omega)=\omega(U)$，對所有$U\subset S$均成立。

這也是一個公平的原則，U人合得的利益，自然分給U裏的人。

原則3：若有二件工作ω_1與ω_2，則$\phi_i(\omega_1+\omega_2)=\phi_i(\omega_1)+\phi_i(\omega_2)$對所有$i$均成立。

這也是無人反對的公理，若我做二份工作，自可得二分酬勞。

希奇的是（在謝氏原論文中，他亦稱奇）。只要這三個原則，即可求出$\phi_i(\omega)$。

定理（Shapley）：根據上項三原則，若對所有$U\subset S$，$\omega(U)$已給定，則$\phi_i(\omega)$的唯一解為

$$\phi_i(\omega)=\sum_{U\subseteq S}\gamma_n(s)[\omega(U)-\omega(U-\{i\})] \tag{1}$$

$s=U$所含之元素數目，

$\gamma_n=(s-1)!\ (n-s)!/n!$

且$U-\{i\}$表示U中減去成員$\{i\}$。

雖然本定理的證明不長（大約二頁，高中代數程度），我們不在此重複，有興趣的讀者一定可以從本文的參考資料中找到。而且下文中會對(1)式做直觀的分析，即使不查證明，多數人也會相信(1)是一個公平的分配方式。為了明瞭此公式的用法，讓我們演算一下廠主的報酬，令

$S=\{1,2,3,4\}$。

1，2，3，4依次代表廠主，工程師，工人甲乙。U是S的子集合，共有$2^4=16$個。可細列如下：

(1)空集合及含有一個元素的集合均使$\omega(U)-\omega(U-\{i\})=0-0=0$。

(2)含有二個元素的集合有(1，2)，(1，3)，(1，4)，(2，3)，(2，4)，(3，4)。其中只有$\omega(1,2)-\omega(2)=3-0=3$，其餘均為0，而

$$\gamma_2=\frac{(2-1)!\,(4-2)!}{4!}=\frac{1}{12}。$$

(3)含有三個元素的集合有(1，2，3)，(1，2，4)，(1，3，4)，(2，3，4)，其中$\omega(1,2,3)-\omega(2,3)=6-0=6$，

$\omega(1,2,4)-\omega(2,4)=6-0=6$，

$\omega(1,3,4)-\omega(3,4)=0$，

$\omega(2,3,4)-\omega(2,3,4)=0$，

且

$$\gamma_3=\frac{(3-1)!(4-3)!}{4!}=\frac{1}{12}。$$

(4)含有四個元素的集只有（1，2，3，4），得

$$\omega(1,2,3,4)-\omega(2,3,4)$$
$$=9-0=9，且\ \gamma_4=\tfrac{1}{4}。$$

因此求得

$$\phi_1(\omega)=\frac{1}{12}\times 3+\frac{1}{12}\times(6+6)+\frac{1}{4}\times 9$$
$$=3.5。$$

同理可得 $\phi_2(\omega)=3.5$，

$\phi_3(\omega)=\phi_4(\omega)=1$。

現在如果誰要再說這種分配不公平就爲時已晚了，因爲一旦你承認了謝卜勒三原則，則剩下的推導全是推不倒，像 $a+b=b+a$ 之類的數學公理。而謝卜勒原則似乎又無懈可擊。因此我們不得不承認這個3.5：3.5：1：1是一個公平的分配法。

從另一個角度來看(1)式，我們發現

$$\omega(U)-\omega(U-\{i\})$$

表示的是｛ i ｝加入 U 時所增加的（邊際）利潤，也就是｛ i ｝所帶給 U 的利潤。而 $\gamma_n(s)$ 表示在所有1，2，…，n 排列中，｛ i ｝在 s 位置而能保持前後成員不變的或然率，因 s 是 U 所含的元素數目，也就是｛ i ｝成爲 U 中最後加入成員的或然率。因此(1)所表示的是｛ i ｝成員爲 S 團體帶來邊際利潤的期望值，這自然應是｛ i ｝所得到的報酬。好像不容易說得清楚，且看一個例子。因前例4！=24太大了一點，我們在前例中減少一個工人，看看(1)的分配是什麼回事。同時也可以比較一下少一個個工人時對各人收入的影響。現在 $S=\{1，2，3\}$ 依次代表了廠主、工程師，及工人甲。表一的左邊有這三個數的全部排列法。其第二，三，四列代表的是在這種排列下，各人所帶的邊際利潤。以第一行的排列1 2 3爲例。廠主先到，他不能開工，因此他帶來的利潤是0，工程師第二個到，他與廠主合作可得3萬利潤，因此他帶來的邊際利潤是3（不全是他的功勞，但算他帶來的），工人最後來，他又帶來了3萬利潤，因此這3萬就寄在工人名下，因此在第一行中各人所帶來的利潤是0，3，3，但我們沒有理由讓廠主先到，這3！的排列應有同等的機會（很公平是不是？）因此一平均下來，各人所帶來的利潤，也就是他們應有的報酬是2.5，2.5，1。表一的最後三列是代表此表與(1)式的關係，只要仔細對照一下，就可以看出(1)所表示的就是這些排列下所產生的平均值。

排列	1	2	3	含1的 U	s	$\gamma_n(s)$
123	0	3	3	{1}		
132	0	6	0	{1}	1	2/6
213	3	0	3	{2,1}	2	1/6
312	0	6	0	{3,1}	2	1/6
231	6	0	0	{1,2,3}		
321	6	0	0	{1,2,3}	3	2/6
和	15	15	6			1
平均(和/6)	2.5	2.5	1			

表一　對｛ i ｝而言的邊際利潤

若把表一的結果與先前有二個工人的結果比較，我們會發現多來的工人乙與原先的工人甲同工同酬（很合理，是不是？），都得了一萬元的報酬，但他所造成的另外二萬利潤則又被廠主與工程師呑去了（您覺得工人很倒霉是不是？還有更倒霉的事情在後面，如果眞的要公平的話。）因此無論由三原則推導，或由(1)式直觀，我們發現公平的分配並不像我們想像的那麼難纏。謝卜勒能看到這一點已造成他成爲一代宗師的地位，他的公式已成爲數理經濟學的柱石。

謝氏定理一些有趣的結果

謝氏定理的第一個結果自然是若某人對某

工作不能增加利潤，則他的報酬當是 0 。此人稱爲冗員（ dummy），因對一個冗員 i 而言，$w(U)-w(U-\{i\})$ 恆爲 0 ，故 $\phi_i(\omega)=0$ 。

在上題中我們看到工程師與廠主的報酬相同，這似乎與事實不合，在大部分的工廠中，工程師拿不到廠主的待遇。這個原因是在一般情形下，工程師不只一個，尤其當工程師供過於求時，他們的身價就會慘跌。現設 $S=\{$ 廠主，工程師甲，工程師乙，工人甲 $\}$ 其代號仍依次爲 1，2，3，4 。但只需一個工程師就夠了。在這時候，若廠主請了其中的一位，他仍付他二萬五？且看公式(1)中 $\phi_2(\omega)$ 的結果。

(1)對空集合及含一元素之集合而言，$\omega(U)-\omega(U-\{2\})=0$ 。

(2)對二元素的集合而言，只有 $\omega(1,2)-\omega(1)=3$ 不爲 0 。

(3)對三元素的集合而言，只有 $\omega(1,2,4)-\omega(1,4)=6$ 不爲 0（$U(1,2,3)-U(1,3)=3-3=0$，因另一個工程師乙捷足先登，工程師甲的工作就泡了湯。）

(4)對四元素之集合 $\omega(1,2,3,4)-\omega(1,3,4)=6-6=0$ 。因此工程師甲的報酬應爲 $\frac{3}{12}+\frac{6}{12}=0.75$。引用原則一，或再導一次可知工程師乙之公平所得亦爲0.75，二者之和只有1.5萬，竟然比原來一個人可得的 2.5萬少了一萬。這說明了供過於求一個可怕的結果，多一個工程師不但不能增加工程師的收入，而且拖了同仁下水。其原因自然因爲廠主有恃無恐，不怕找不到工程師而可以加以殺價的緣故。但這個事實竟能從公平三原則中反映出來，不可不謂數學的奇蹟。現在看看資本家與工人可因此多獲利多少。稍加計算可得 $\phi_1(\omega)=3.25$，$\phi_4(\omega)=1.25$，可見其中大部分的好處爲廠主所得，但工人也因工程師多而身價小增。依理往前推，若工程師再多，則其身價必又再跌，原來工程師之所以可以與資本家平分秋色乃是因工程師只有一位，沒有他開不了工，奇貨可居之故。當然若只有一個工程師而有二個工廠，則他的身價會增加而廠主的報酬就要下跌。但在一般社會中都是資本家少，工程師多，而勞工更多，因此工人可以分得之公平工資之慘，可以想見。

公式(1)之推導固然精彩，可惜（幸好）在一般情形下，不容易計算，因爲 $U\subseteq S$ 含有 S 中全部的子集，有 2^n 個。當 n 稍大時，計算量就會壓死計算機。但在某些情形下，特別是成員的能力大多相同時，表一中的排列法就能減少到可以計算的地步。現舉一個這樣的例子。

設某鳥商請一個村子裏的人爲他養鳥，各家養一隻。到收購的時候，他宣佈他只能買成對的鳥兒，一對一千元。村人各戶人家集合算了一下，發現有雄鳥 110 隻，雌鳥90隻，因此可賣九萬元，爲了不使養雄鳥之家搶賣打破頭起見，全村一氣，算大家共賣，因此得了九萬元，放生了20隻雄鳥。現在問題是錢要如何分配才「公平」。當然養雄鳥之家主張均攤，即每隻鳥值 9 萬／200 = 450 元，但養雌鳥人家認爲物以稀爲貴，雌鳥之所以活得少，必定是比較難養，理應多分一點，紛爭又起，如何擺平？如果我們以謝卜勒原則看公平，則因鳥只有二種，可以求出

$$\phi_i(\omega)=\sum_{k=1}^{n-1}\gamma_n(k+1)\sum_{x\geq[\frac{k}{2}+1]}^{k}\binom{n_2}{x}\binom{n_1-1}{k-x} \qquad \cdots\cdots(2)$$

式中〔 y 〕表 y 之整數值，n_1 爲 i 所屬之類的鳥數，即若 i 爲雄，則 $n_1=110$ ，i 爲雌，則 $n_1=90$，n_2 爲另一類鳥數，$n=n_1+n_2$ 。用計算機算出結果是雄鳥單價值109元，雌鳥單價爲 867 元，而全部雄鳥之值只有雌鳥的 6.5 分之一。其實稍不平衡，價差就很驚人，如果雄、雌各爲 102 及 98 隻，則其單價比爲 1 ：1.82，物稀而貴，一致於此。

記得若干年前臺灣適婚年齡者男多女少，少女身價百倍。現在好像是女多男少，單身漢行情看漲。不過人間的情形很複雜，我們不能把每位少男少女像鳥兒一樣看爲等價。因各人條件不同，每個人的公平地位就不容易由(1)計算出來（ 2^n 子集而 $n \geq 10^6$ ？），條件好的男女是不介意情敵多少的。但(1)式至少能解釋一個重要的現象,稍不平衡，就產生極大的價差。

其實人們雖不知公式(1)，但這種現象早已深植於人們的心中，每個人都想改變自我環境，使得公式(1)對我有利。當供過於求的時候，人們曾經把糧食、牛奶、羊毛倒入海中以求增加價格,以鳥兒爲例,若雄鳥人家先商量好,偷偷放走20隻,則對養雄鳥人家都有利，（若放走30隻則更有利，這時候雌鳥每隻只值201元而雄鳥值773元，雖然全部只剩下80對鳥兒，但對雄鳥人家而言則有利。但這要合作才行，若你自己把鳥放了，則可能一文都拿不到。）各行業防止供過於求，用執照、工會、幫會、碼頭等加以限制人數。而大家也都知道要進到一個行業中成爲一個不可少的人。

然而也有些人雖不喜歡不平，但却想破壞公平，有人破壞第一原則，利用各種關係，使得報酬與名字有關，他是我的兒子，報酬就自然加大，有的破壞第二原則，沒有做事的人也巧立名目，拿一些錢。當然，最壞的是鼓勵生產力不足的人用搶，嚴重的破壞了公平的分配。

一點感想

從公平的原則看來，社會上才智高的人似乎反而沒有拿到他份內公平的報酬，這些不可少的創業家，發明家，若照謝卜勒的公式，他們的報酬可能應是不可思議的大。因此當我們未來再爲自已訴不平的時候，就該想到公式(1)：從公平的觀點來看，是天下人負我，還是我負天下人？

參考資料

Shapley的原文發表在

Shapley, L.S. (1953) "A value for n-person games," in Contributions to the Theory of Games, Vol. Ⅱ, Ed. by H.W. Kubn and A. W. Tucker, Princeton University Press.

一些最近的發展可看

The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley, 1988, Ed. by A.E. Roth, Combridge University Press.

Shapley 1953年論文亦收在此書內。

一本文作者現任教於美國佛羅里達大學統計系一