Bernoulli數與 Bernoulli 多項式 (下)

余文卿

第三節 Kummer 同餘式與 p-adic 積分

1-9 Kummer 同餘式

對任意質數 p 與正偶數 m, 若 $p-1$ 不是 m 的因數, 則古典的 Kummer 同餘式是

$$(A) \qquad \frac{B_{m-p-1}}{m+p-1} \equiv \frac{B_m}{m} \pmod p$$

這一類的同餘式可用 p-adic 語言來解釋, 而可進一步擴充如下:

若 $p-1$ 不是 m_1 的因式, 且 $m_1 \equiv m_2 \pmod{(p-1)p^N}$, 則

$$(B) \qquad (1-p^{m_1-1})\frac{B_{m_1}}{m_1} \equiv (1-p^{m_2-1})\frac{B_{m_2}}{m_2} \pmod{p^N}。$$

更可擴充為下面的定理形式。

定理: 若 n 是正整數, 而 m_1 與 m_2 是兩個正偶數滿足

(1) $m_1 \equiv m_2 (\mathrm{mod}\ \phi(n))$。

(2) 對任意 n 的質因數 p,$p-1$ 不是 m 的因數。

則有

$$\prod_{p|n}(1-p^{m_1-1})\frac{B_{m_1}}{m_1} \equiv \prod_{p|n}(1-p^{m_2-1})\frac{B_{m_2}}{m_2} (\mathrm{mod}\ n)。$$

證明這定理需要用到 p-adic 測量理論。底下的幾個小節, 我們介紹一些 p-adic 測度與 p-adic 積分的語言。

1-10 p-adic 測度

對任意整數 n 與質數 p, 以 $\mathrm{ord}_p n$ 表示整除 n 之 p 的最高冪次; 即 $\alpha = ord_p n$ 滿足

$$p^\alpha \mid n \quad , \quad 但 \quad p^{\alpha+1} \nmid n,$$

而整數 $\mathbf{Z}$ 中的 p-adic 範數 (norm) $\| \ \|_p$ 則定為

$$\|n\|_p = p^{-\alpha}, \quad \alpha = ord_p n。$$

由定義很容易驗證

$$\|m+n\|_p \le \max(\|m\|_p, \|n\|_p),$$

又等號在 $m \neq -n$ 時成立; 這類的範數稱為非歐基里德 (non-Archimedean)

範數, 以別於滿足三角不等式的歐基里德 (Archimedean) 範數。

對固定的質數 p, 以 $\mathbf{Z}_p$ 表示 $\mathbf{Z}$ 對範數 $\| \ \|_p$ 的完備擴充 (completion);$\mathbf{Z}_p$ 即是一般所稱的 p-adic 整數; 每一 p-adic 整數 x 可表示爲

$$x = \sum_{i=M}^{\infty} a_i p^i, \quad 0 \le a_i < p, \quad M \in N \cup \{0\},$$

上面的表現式中, 若 $a_M \ne 0$ 則定

$$\|x\|_p \ = \ p^{-M}。$$

另一方面, 範數 $\| \ \|_p$ 可很自然地擴充到有理數 $\mathbf{Q}$ 以及它的完備擴充 $\mathbf{Q}_p$; 對任意有理數 $\frac{a}{b}$, 定

$$\mathrm{ord}_p \frac{a}{b} \ = \ \mathrm{ord}_p a - \mathrm{ord}_p b,$$

而

$$\|\frac{a}{b}\|_p \ = \ p^{\alpha}, \quad \alpha = \mathrm{ord}_p \frac{a}{b}。$$

而任意 p-adic 數 $y \in \mathbf{Q}_p$ 都可表成

$$y \ = \ \sum_{i=N}^{\infty} b_i p^i, \quad 0 \le b_i < p, \quad N \in \mathbf{Z}。$$

當 $b_M \ne 0$ 時, 定

$$\|y\|_p \ = \ p^{-M}。$$

另一方面, 有時也把 $\mathbf{Z}_p$ 看成 $\mathbf{Z}/p^N\mathbf{Z}$ 的 inverse projective limit ; 即 $\mathbf{Z}_p$ 是由滿足

$$x_{N+1} \equiv x_N (\mathrm{mod}\ p^N), \quad N = 0, 1, 2 \ldots$$

的所有數列 $x = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N, \ldots\}$ 所組成, 而兩數列 $x = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N, \ldots\}$, $y = \{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_N, \ldots\}$ 相等的充要條件是

$$x_N \equiv y_N (\mathrm{mod}\ p^N), \quad N = 0, 1, 2, \cdots。$$

在如此定義下, $\mathbf{Z}_p$ 的元素到 $\mathbf{Z}/p^N\mathbf{Z}$ 有一很自然的投影, 即將 $x = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N, \ldots\}$映至 $x_N \in \mathbf{Z}/p^N\mathbf{Z}$, 若將 p-adic 整數 x 表成

$$x \ = \ \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i, \qquad 0 \le a_i < p。$$

則所對應的 x_N 即是 x 的前 $N+1$ 項部份和, 即

$$x_N \ = \ \sum_{i=0}^{N} a_i p^i。$$

1-11 p-adic 積分

現回到 Kummer 同餘式的問題上。

對任意正整數 n, 以 X_n 表示 $\mathbf{Z}/np^N\mathbf{Z}$ 的 inverse projective limit; 即 X_n 中的元素是由數列 $a = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_N, \ldots\}$ 所組成, 而 $a_N \in \mathbf{Z}/np^N\mathbf{Z}$ 且滿足

$$a_{N+1} \equiv a_N \quad (\mathrm{mod}\ np^N)。$$

而 X_n 到 $\mathbf{Z}/np^N\mathbf{Z}$ 的自然投影即是將 a 映到第 N 個分量a_N。以 $a + np^N\mathbf{Z}$表示X_n中經由X_n到 $\mathbf{Z}/np^N\mathbf{Z}$ 自然投影到 a 的所有元素所成的集合。

設 r 與 n 互質, 固定 1 的 $r-$次方根 ϵ , 且設 ϵ 不是 1 的 p^N-次方根, 如此定義 [5]

$$\mu_\epsilon(a + np^N\mathbf{Z}) \ = \ \frac{\epsilon^a}{1 - \epsilon^{np^N}}$$

而

$$\mu(a + np^N\mathbf{Z}) \ = \ \sum_{\epsilon^r = 1, \epsilon \ne 1} \mu_\epsilon(a + np^N\mathbf{Z})$$

$$= \sum_{\epsilon^r=1,\epsilon\neq 1} \frac{\epsilon^a}{1-\epsilon^{np^N}}。$$

上面的測度也稱爲 Mazure 測度 (Mazure Measure) 。

命題 9: 對任意 $U = a+np^N\mathbf{Z} \subset X_n$,

$$\|\mu(U)\|_p \leq 1。$$

證明:

$$\begin{aligned}\|\mu(U)\|_p &= \|\sum_{\epsilon^r=1,\epsilon\neq 1}\mu_\epsilon(U)\|_p \\ &\leq \max_{\epsilon^r=1,\epsilon\neq 1}\|\mu_\epsilon(U)\|_p\end{aligned}$$

但 $\|\mu_\epsilon(U)\|_p = \|\dfrac{\epsilon^a}{1-\epsilon^{np^N}}\|_p \leq 1$, 故得所欲證。

對任意定義在 X_n 的 $\mathbf{Q}_p$ − 值函數 $f(x)$, 定義 f 在 X_n 的積分是

$$\int_{X_n} f(x)d\mu(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{a=1}^{np^N} f(a)\mu(a+np^N\mathbf{Z})。$$

當 f 是連續函數時, 這類積分值存在。[參考[6]]

命題 10: 若 $f: X_n \to \mathbf{Q}_p$ 是一連續函數且對任意 $x \in X_n$, $\|f(x)\|_p \leq A$ 則

$$\|\int_{X_n} f(x)d\mu(x)\|_p \leq A。$$

證明: 由定義

$$\int_{X_n} f(x)d\mu(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{a=1}^{np^N} f(a)\mu(a+np^N\mathbf{Z})$$

而對任意 N

$$\begin{aligned}&\|\sum_{a=1}^{np^N} f(a)\mu(a+np^N\mathbf{Z})\|_p \\ \leq\ &\max_a \|f(a)\mu(a+np^N\mathbf{Z})\|_p \leq A。\end{aligned}$$

故得證

$$\|\int_{X_n} f(x)d\mu(x)\|_p \leq A。$$

1-12　定理的證明

Kummer 同餘式的證明是先把 Bernoulli 數表現成簡單多項式對 p-adic 的積分, 再運用

$$m_1 \equiv m_2 \pmod{\varphi(n)} \Rightarrow a^{m_1} \equiv a^{m_2} \pmod n$$

到被積分函數上, 積分後並不改變原有的同餘式, 因而得證。

命題 11: 對任意正整數 m,n

$$\int_{X_n} x^{m-1}d\mu(x) = (1-r^n)\frac{B_m}{m}$$

證明: 對任意 $t \in \Omega_p$,Ω_p 是 $\mathbf{Q}_p$ 的代數閉包; 若 $\mathrm{ord}_p t > 1/(p-1)$ 指數函數 e^{tx} 定義成

$$e^{tx} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(tx)^i}{i!}。$$

這是 X_n 上的連續函數, 因而有

$$\begin{aligned}\int_{X_n} e^{tx}d\mu_\epsilon(x) &= \lim_{N\to\infty}(1-\epsilon^{np^N})^{-1}\sum_{a=0}^{np^N-1}\epsilon^a e^{ta} \\ &= \lim_{N\to\infty}(1-\epsilon^{np^N})^{-1}\frac{1-\epsilon^{np^N}e^{np^N t}}{1-\epsilon e^t}。\end{aligned}$$

當 $N \to \infty$ 時 $e^{np^N}t \to 1$, 因此

$$\begin{aligned}\int_{X_n} e^{tx}d\mu_\epsilon(x) &= \frac{1}{1-\epsilon e^t} \\ &= \frac{1+\epsilon e^t+\ldots+(\epsilon e^t)^{(r-1)}}{1-e^{rt}}。\end{aligned}$$

讓 ϵ 在1 除外的所有1 的 $r-$次方根變動並加在一起, 則得

$$\begin{aligned}\int_{X_n} e^{tx}d\mu(x) &= \frac{r-(1+e^t+\ldots+e^{(r-1)t})}{1-e^{rt}}\\ &= \frac{r}{1-e^{rt}}-\frac{1}{1-e^{rt}}\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1-r^m)B_m t^{m-1}}{m!},\end{aligned}$$

比較兩邊的 t^{m-1} 係數, 得出

$$\int_{X_n} x^{m-1}d\mu(x) = (1-r^m)\frac{B_m}{m}。$$

命題 12: 以 ${X_n}^*$ 表示 X_n 中投影到 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ 中可逆元素所成的集合, 則

$$\int_{X_n^*} x^{m-1}d\mu(x)=(1-r^m)[\prod_{p|n}(1-p^{m-1})]\frac{B_m}{m}。$$

證明: 利用相容互斥原理, 我們將積分化成

$$\begin{aligned}\int_{{X_n}^*} &= \int_{X_n}-\sum_{\substack{p_j|n\\ j}}\int_{p_jX_n}+\sum_{\substack{p_i,p_j|n\\ i,j}}\int_{p_ip_jX_n}\\ &\quad+\ldots+(-1)^k\int_{p_1\ldots p_kX_n},\end{aligned}$$

其中 $p_1\ldots p_k$ 是 n 的所有相異質因數, 現只需證明

$$\int_{\alpha X_n} x^{m-1}d\mu(x) = (1-r^m)\alpha^{m-1}\frac{B_m}{m},$$

其中 α 是 n 的相異質因數的乘積。

再次考慮指數函數 e^{tx} 的積分

$$\begin{aligned}&\int_{\alpha X_n} e^{tx}d\mu_\epsilon(x)\\ =\;& \lim_{N\to\infty}(1-\epsilon^{np^N})^{-1}\sum_{b=0}^{np^N/\alpha-1}(\epsilon e^t)^{\alpha b}\\ =\;& \lim_{N\to\infty}\frac{1}{1-\epsilon^{np^N}}\frac{1-(\epsilon e^t)^{np^N}}{1-\epsilon^\alpha e^{\alpha t}}\\ =\;& \frac{1}{1-\epsilon^\alpha e^{\alpha t}}。\end{aligned}$$

變動 ϵ, 因 α 與 r 互質, 故這只是把 ϵ^α 換到另一1 的 $r-$次方根, 故

$$\begin{aligned}\int_{\alpha} e^{tx}d\mu(x) &= \frac{r-(1+e^{\alpha t}+\ldots+e^{(r-1)\alpha t})}{1-e^{r\alpha t}}\\ &= \frac{r}{1-e^{r\alpha t}}-\frac{1}{1-e^{\alpha t}}\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1-r^m)B_m(\alpha t)^{m-1}}{m!}。\end{aligned}$$

比較兩邊 t^{m-1} 的係數得出

$$\int_{\alpha X_n} X^{m-1}d\mu(x) = (1-r^m)\alpha^{m-1}\frac{B_m}{m},$$

因而

$$\int_{X_n^*} x^{m-1}d\mu(x)=(1-r^m)[\prod_{p|n}(1-p^{m-1})]\frac{B_m}{m}。$$

現我們重述一下 Kummer 同餘式的定理形式, 並加以證明。

定理: 若 n 是正整數, 而 m_1 與 m_2 是兩個正偶數滿足

(1) $m_1 \equiv m_2 \pmod{\phi(n)}$

(2) 對任意 n 的質因數 p, $p-1$ 都不是 m_1 的因數。

則有

$$\begin{aligned}&\prod_{p|n}(1-p^{m-1})\frac{B_{m_1}}{m_1}\\ \equiv\;& \prod_{p|n}(1-p^{m_2-1})\frac{B_{m_2}}{m_2} \pmod{n}。\end{aligned}$$

證明:對任意 $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ 的元素 x, 則有

$$x^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n},$$

因而

$$x^{m_1-1} \equiv x^{m_2-1} (\text{mod } n)。$$

又 $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ 是 X_n^* 的稠密子集; 故上面式子對任意 x 也成立。

對任意 n 旳質因數 p 以及所定的 p-adic 測度, 由命題 10, 則有

$$\int_{X_n^*} x^{m_1-1} d\mu(x) \equiv \int_{X_n^*} x^{m_2-1} d\mu(x) (\text{mod } p^\alpha),$$

其中 $\alpha = \text{ord}_p\, n$。

另一方面, 因 $r^{m_1} - 1 \in (\mathbf{Z}/p^\alpha\mathbf{Z})^*$, 故 $r^{m_1} - 1 \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ 且有

$$r^{m_1} - 1 \equiv r^{m_2} - 1 (\text{mod } n)$$

故

$$\begin{aligned} & (1-r^{m_1})^{-1} \int_{X_n^*} x^{m_1-1} d\mu(x) \\ \equiv \quad & (1-r^{m_2})^{-1} \int_{X_n^*} x^{m_2-1} d\mu(x) (\text{mod } p^\alpha)。\end{aligned}$$

由命題 12, 這即是

$$\begin{aligned} & [\prod_{p|n} (1-p^{m_1-1})] \frac{B_{m_1}}{m_1} \\ \equiv \quad & [\prod_{p|n} (1-p^{m_2-1})] \frac{B_{m_1}}{m_2} (\text{mod } p^\alpha)。\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} & [\prod_{p|n} (1-p^{m_1-1})] \frac{B_{m_1}}{m_1} \\ \equiv \quad & [\prod_{p|n} (1-p^{m_2-1})] \frac{B_{m_2}}{m_2} (\text{mod } n)。\end{aligned}$$

推論: $n = p$ 是質數時, 則有

$$\int_{Z_p^*} x^{m-1} d\mu(x) = (1-p^{m-1})(1-r^m) \frac{B_m}{m}。$$

討論:對任意質數 p, 定義 zeta 函數 $\zeta_p^*(s)$ 爲

$$\zeta_p^*(s) = \sum_{n=1,(n,p)=1}^{\infty} n^{-s}, \qquad Re\ S > 1$$

則有

$$\begin{aligned} \zeta_p^*(s) &= \zeta(s) - \sum_{n=1}^{\infty} (np)^{-s} \\ &= (1-p^{-s})\zeta(s)。\end{aligned}$$

像 $\zeta(s)$ 一樣, $\zeta_p{}^*(s)$ 也有其解析延拓, 且在負整數的取値是

$$\zeta_p^*(1-m) = (1-p^{m-1}) \frac{B_m}{m}。$$

因而 Kummer 的同餘式 (B) 可重新解釋爲

$$\begin{aligned} & m_1 \equiv m_2 (\text{mod } (p-1)p^N) \\ \Rightarrow \quad & \zeta_p^*(1-m_1) \equiv \zeta_p^*(1-m_2) (\text{mod } p^{N+1})。\end{aligned}$$

而命題 12 中的積分式在 $n = p$ 是

$$\begin{aligned} \zeta_p^*(1-m) &= \frac{1}{1-r^m} \int_{\mathbf{Z}_p^*} x^{m-1} d\mu(x), \ (r,p) \\ &= 1。\end{aligned}$$

1-13 重回 von-Staudt 定理

現我們想利用命題 12 推論中的積分式

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^{m-1} d\mu(x) = (1-p^{m-1})(1-r^m) \frac{B_m}{m}。$$

重新證明 von-Staudt 定理。在處理 $(p-1)|m$ 的情形時, 我們需用到下面的積分式。

命題 13: 取 $r = p+1$, 則

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^{-1} d\mu(x) \equiv 1 (\text{mod } p)。$$

證明:對任意 $x \in \mathbf{Z}_p^*$, 若 $x \in j + p\mathbf{Z}$, $1 \le j \le p-1$, 定義

$$g(x) = \frac{1}{j}$$

則

$$g(x) \equiv x^{-1} (\bmod\ p)。$$

而

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{Z}_p^*} g(x)dx \\
= &\lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j} \sum_{\alpha=1}^{p^{N-1}} \sum_{\substack{\epsilon^{p+1}=1\\ \epsilon\neq 1}} \frac{\epsilon^{j+p\alpha}}{1-\epsilon^{p^N}} \\
= &\sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j} \sum_{\substack{\epsilon^{p+1}=1\\ \epsilon\neq 1}} \frac{\epsilon^{j}}{1-\epsilon^{p}} \\
= &\sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j} \sum_{\substack{\epsilon^{p+1}=1\\ \epsilon\neq 1}} \frac{\epsilon^{j+1}}{\epsilon-1} \\
= &\sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j} \sum_{\substack{\epsilon^{p+1}=1\\ \epsilon\neq 1}} (1+\epsilon+\ldots+\epsilon^j) \\
&+ \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j} \sum_{\substack{\epsilon^{p+1}=1\\ \epsilon\neq 1}} \frac{1}{1-\epsilon} \\
= &\sum_{j=1}^{p-1} \frac{p-j}{j} + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j} \cdot \frac{p}{2} \\
\equiv &\ 1 (\bmod\ p)。
\end{aligned}$$

因此

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^{-1} dx \equiv \int_{\mathbf{Z}_p^*} g(x)dx \equiv 1 \pmod p。$$

現分兩種情形來討論 von-Staudt 定理, 設 $m > 1$ 且 $p > 2$,

(一) 若 $p-1$ 不是 m 的因數, 則 $1-r^m$ 是 $p-$ 整數且 $\|1-r^m\|_p = 1$, 故

$$\begin{aligned}
\|\frac{B_m}{m}\|_p &= \|(1-p^{m-1})^{-1}\|_p \|(1-r^m)^{-1}\|_p \\
&\cdot \| \int_{\mathbf{Z}_p^*} x^{m-1} d\mu(x) \|_p \\
&= \| \int_{\mathbf{Z}_p^*} x^{m-1} d\mu(x) \|_p \ \le\ 1。
\end{aligned}$$

(二) 若 $p-1$ 是 m 的因式, 取 $r = p+1$, 則

$$1-(p+1)^m = -mp \pmod p。$$

又 $1-p^{m-1} \equiv 1 \pmod p$, 故

$$\begin{aligned}
pB_m &\equiv -\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^{m-1} d\mu(x) \pmod p \\
&\equiv -\int_{Z_p^*} x^{-1} d\mu(x) \pmod p \\
&\equiv -1 \pmod p。
\end{aligned}$$

第四節 遞迴關係式

1-14 Euler 遞迴關係式

Bernoulli 數可由下面的遞迴定義式完全決定出來

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ \binom{m}{1} B_m + \binom{m}{2} B_{m-1} \\ +\ldots+\binom{m}{m} B_0 = 1,\ m \ge 1。\end{cases}$$

這關係式也可由等式

$$\zeta(s) = \zeta(s,1)。$$

取 $s = -m$ 。而得出, 即

$$(-1)^{m+1} \frac{B_{m+1}}{m+1} = -\frac{1}{m+1} B_{m+1}(1)。$$

消去 B_{m+1}, 即

$$\begin{aligned}
&\binom{m}{1} B_m - \binom{m}{2} B_{m-1} + \ldots + \binom{m}{m} B_0 \\
= &\ 0,\ m \ge 1。
\end{aligned}$$

又關係式

$$B_m(kx) \;=\; k^{m-1}\sum_{j=0}^{k-1} B_m(x+\frac{1}{k})$$

中若令 $x=0$, 也得出

$$B_m \;=\; \frac{1}{k(1-k^m)}\sum_{i=0}^{m-1} k^i \binom{m}{i} B_i \sum_{j=1}^{n-1} j^{m-i}$$

底下我們考慮其他的遞迴關係式

命題 14: (Euler [1]) 若 $n \geq 2$, 則

$$\begin{aligned} & -(2n+1)B_{2n}(\mathrm{I}) \\ =\; & \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!} B_{2k} B_{2n-2k}。\end{aligned}$$

證明:考慮底下函數在 $z=0$ 的冪級數展開式

$$\frac{d}{dz}(\frac{z^2}{e^z-1})。$$

先展開爲冪級數後逐項微分, 則得出

$$B_0 + 2B_1 z + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\frac{B_{2n}}{(2n)!}z^{2n}。$$

另一方面

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz}(\frac{z^2}{e^z-1}) = \frac{2z}{e^z-1} - \frac{z^2 e^z}{(e^z-1)^2} \\ =\; & \frac{2z}{e^z-1} - \frac{z^2}{e^z-1} - (\frac{z}{e^z-1})^2。\end{aligned}$$

上面函數展開爲冪級數則爲

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2B_k z^k}{k!} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{k-1}z^k}{k!} \\ & -\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{l=0}^{k}\frac{B_{k-l}B_l}{(k-l)!l!}\Big)z^k。\end{aligned}$$

比較兩冪級數之 z^{2n} 的係數, 則得出

$$\begin{aligned} (2n+1)\frac{B_{2n}}{(2n)!} \;&=\; \frac{2B_{2n}}{(2n)!} - \sum_{k=0}^{2n}\frac{B_{2n-k}B_k}{(2n-k)!k!} \\ &=\; -\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{B_{2n-k}B_k}{(2n-k)!k!} \\ &=\; -\sum_{k=1}^{n-1}\frac{B_{2n-2k}B_{2k}}{(2n-2k)!(2k)!}。\end{aligned}$$

兩邊同乘上 $-(2n)!$ 即得出所要的等式。

同樣考慮

$$\Big(\frac{d}{dz}\Big)^2\Big(\frac{z^3}{e^z-1}\Big),\quad \Big(\frac{d}{dz}\Big)^3\Big(\frac{z^4}{e^z-1}\Big)$$

也可分別得出

(II)

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{p+q+r=n \\ p,q,r\geq 1}} \frac{(2n)!}{(2p)!(2q)!(2r)!} B_{2p}B_{2q}B_{2r} \\ =\; & \frac{(n+1)(n+2)}{2}B_{2n} \\ & +\frac{n(2n-1)}{2}B_{2n-2},\; n\geq 3。\end{aligned}$$

(III)

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{p+q+r+s=n \\ p,q,r,s\geq 1}} \frac{(2n)!}{(2p)!(2q)!(2r)!(2s)!} B_{2p}B_{2q}B_{2r}B_{2s} \\ =\; & -\Big[\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}B_{2n} \\ & +\frac{4n^2(2n-1)}{3}B_{2n-2}\Big],\; n\geq 4。\end{aligned}$$

以上的遞迴關係式也能由 zeta- 函數之間的等式得出。考慮如下列式之 zeta- 函數

$$Z_1(s) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+n)^s} \quad ,$$

經由 $m+n=p$ 的簡單變換, 則

$$\begin{aligned} Z_1(s) \;&=\; \sum_{p=2}^{\infty}p^{-s}\sum_{1}^{p-1}1 \\ &=\; \sum_{p=2}^{\infty}\frac{p-1}{p^s} \\ &=\; \zeta(s-1)-\zeta(s)。\end{aligned}$$

兩種 zeta- 函數都有解析延拓, 當 $s=2-2n$ 時

$$\zeta(1-2n)-\zeta(2-2n)=-\frac{B_{2n}}{2n}。$$

而另一方面,$Z_1(s)$ 在 $s=2-2n$ 的取値也能直接計算出來, 即

$$\begin{aligned} Z_1(2-2n) &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2n-2)!}{(2k)!(2n-2k)!}B_{2n-sk}B_{2k} \\ &\quad -\frac{2B_{2n}}{(2n-1)(2n)}。\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2n-2)!}{(2k)!(2n-2k)!}B_{2n-2k}B_{2k} \\ &-\frac{2B_{2n}}{(2n-1)(2n)}=-\frac{B_{2n}}{2n}。\end{aligned}$$

同乘上 $2n(2n-1)$ 並移項即得出 Euler 關係式。同樣考慮

$$\begin{aligned} Z_2(s) &= \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+n+p)^s} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)(n-2)}{n^s} \\ &= \frac{1}{2}\zeta(s-2)-\frac{3}{2}\zeta(s-1)+\zeta(s)。\end{aligned}$$

經由兩種方法計算 $Z_2(3-2n)$ 則得到關係式 (II)。

又考慮

$$\begin{aligned} Z_3(s) &= \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+n+p+t)^2} \\ &= \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^s} \\ &= \frac{1}{6}\zeta(s-3)-\zeta(s-2) \\ &\quad +\frac{11}{6}\zeta(s-1)-\zeta(s)。\end{aligned}$$

經由兩種方法計算 $Z_3(4-2n)$, 則得到關係式 (III)。

參考書目

1. B. C. Berndt, *Ramanjan's Notebook*, Part I and Part II, Springer-Verlay, 1985.
2. Z. I. Borevich and I. R. Shafarevich, *Number Theory*, Academic Press, 1966.
3. Minking Eie, *On a Dirichlet series associated with a ploynomial*, Proceedings of A. M. S. 110 (1990), 583-590.
4. ———, *On the special values at negative integers of Dirichlet series associated with polynomials of several variables*, manuscript (1990).
5. Neal Koblitz, *p-adic analysis : a short course of recent works*, Cambridge University Press 1980.
6. ———, *p-adic numbers*, p-adic analysis and zeta functions, Springer-Verlay, 1984.
7. Hans Rademacher, *Topics in analytic number theory*, Springer-Verlay, 1973.
8. C. L. Siegel, *Advanced Analytic Number Theory*, Tata Institute of Fundamental Research, Bamkay, 1980.

—本文作者現任教於國立中正大學應數所—