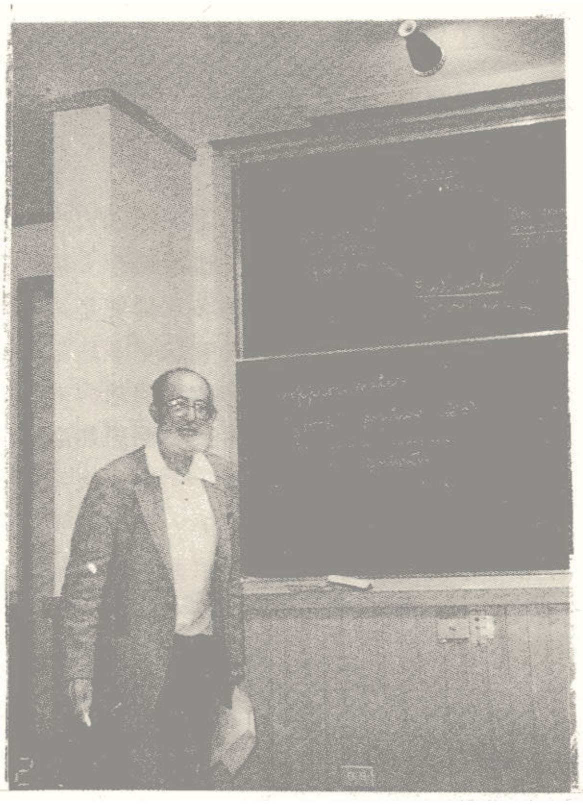
Halmos講矩陣逼近

方資求　筆錄

吳培元　修訂

Paul Richard Halmos 生於1916年, 今年即將屆滿七十六歲。他原籍匈牙利, 八歲時隨家人移民到美國, 定居於芝加哥市。他在1938年自伊利諾大學獲得博士學位, 其指導教授是 Joseph Doob。他曾到普林斯頓的高等研究所訪問多次, 並曾一度擔任 John von Neumann 的助理, 也曾在不少著名學府, 如芝加哥大學、密西根大學及印地安那大學之數學系擔任教職, 目前則在加州的聖塔克萊拉大學 (Santa Clara University) 任教。Halmos 教授的專長在測度論、遍歷理論、代數邏輯及算子理論等領域。他的著作極多, 大多數唸數學的人在求學過程中都應曾接觸過他編寫的教科書。他的思想對於近代美國數學的發展具有相當深遠的影響。



(Halmos 教授在中央研究院數學所演講。)

去年十二月初,Halmos 教授應國科會的邀請, 首度到台灣作一週的訪問, 其間並在交通大學、中央研究院及清華大學各給了一場演講。本文係筆錄自他在中研院數學所的演講內容並參考其講稿改寫而成。

1. 引言

數學上最常見、最有代表性而且最有用的“非交換”物件就是矩陣, 亦即是有限維空間上的 (線性) 算子。將這個物件推廣到無限維空間上可以導出許多深刻而有趣的結果。此種推廣在理論上是很自然的發展, 在應用

上也有其必要。但在我們今天所要講的材料中, 一切值得注意的現象幾乎都在有限維的情形下發生。

2. 值域的變更

一般來說, 將古典分析理論"非交換化"的途徑有三種。

古典分析探討的對象是從某個 X 映射到另一個 Y 中的函數。這裡, 定義域 X 與值域 Y 通常是實數或複數的集合。最明顯的"非交換化"途徑是, 保留 X 在複數平面中, 而將 Y 代以某些較麻煩的算子代數 (operator algebras), 並探討取值於 Y 的解析函數。在 Dunford 與 Schwartz 合寫的鉅著中, 有相當多的篇幅致力於這種推廣的研究。目前, 此類推廣已成了陳年舊酒, 可稱爲"古典的近代分析"了。

3. 定義域的變更

較爲細緻而較少見的"非交換化", 是將定義域改爲算子集合, 而保留值域在複數平面中。在這種安排下, 舊的命題轉爲新的問題。例如, 極大模原理就是一個典型的例子。

在單位圓盤上的極大模原理可以表爲: 對任何多項式 p 及適合 $|z| \leq 1$ 的複數z, 不等式 $\|p(z)\| \leq \|p\|_\infty$ 恆成立。這裡 $\|p\|_\infty$ 是p的絕對值在圓盤的周界上的極大值。如果將複數z改爲矩陣或算子Z, 模 $|z|$ 及 $|p(z)|$分別用範數 $\|Z\|$ 及 $\|p(Z)\|$ 來代替, 則古典分析中的極大模原理, 是否仍然成立? 答案是肯定的, 但這個稱爲 von Neumann 不等式的結果並非顯然易見。

另一屬於這類"非交換化"但較難的問題關乎矩陣單調函數 (matrix monotone function)。一個由區間$[0,\infty)$映射到自身的單調遞增函數F 滿足條件:$x \geq y \geq 0$, 則$F(x) \geq F(y) \geq 0$。矩陣單調函數則滿足一更強的條件: 若X,Y爲 Hermite 矩陣滿足$X \geq Y \geq 0$, 則$F(X) \geq F(Y) \geq 0$。Löwner 曾深入地研究矩陣單調函數, 並證明了這種函數能擴展爲定義在上半平面上的某類解析函數。

4. 量子化

當然, 以上兩種"非交換化"可以同時進行-任何人掙扎到現在這地步, 都不在乎繼續往前多爬數寸: 乾脆不講函數, 一切由算子代替。這個替代過程俗稱"量子化"。

一個標準的取代方式 (也許是最富啓發性的方式) 是將一個函數引渡到定義在空間上的"乘算子"。具體地說, 設 ϕ 爲定義在區間$[0,1]$上的有界可測函數, 則對於任何平方可積函數f, 乘積ϕf 也是平方可積的, 因而$f \to \phi f$給出了定義在 Hilbert空間$L^2(0,1)$上的算子。於是, 古典分析中研究的有界可測函數及平方可積函數, 化爲相對應的算子和向量, 這就是量子化的"初步"。此外, 另有一個意味迥殊的"初步", 我們將在下一節描述。

5. 有限分析

最簡單的一類集合是有限集。設函數ϕ的定義域是有限集, 譬如說 $\{1,2,\cdots n\}$, 則函數 ϕ 本身可以視爲 n元序組$< \phi_1,\ldots,\phi_n >$, 而變換$f \to \phi f$相當於

將向量$< f_1,\cdots,f_n >$轉變爲向量$< \phi_1 f_1,\phi_2 f_2,\ldots,\phi_n f_n >$。於是, 由函數$\phi$引渡出的“乘算子”, 實質上與作用在向量$< f_1,\ldots,f_n >$上的對角矩陣

$$\begin{bmatrix} \phi_1 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & \phi_n \end{bmatrix}$$

沒有分別。從這一個角度來看,“有限分析”—研究定義在有限集合上的函數—等價於對角矩陣的分析。

6. 非交換分析

從今天的觀點來看, 古典分析是將有限分析推廣爲無限, 而另有一個同樣自然的推廣, 正向我們呼喚: 爲什麼祇看對角矩陣呢? 其它矩陣有何不可?

誠然, 有限分析推廣至無限, 得出的是更一般的函數論, 另一方面, 有限分析亦可依非交換的推廣, 這樣就得出矩陣論。後者是在有限情形下的量子化; 走了這一步, 接著將一般的函數用更廣泛的算子來代替, 是意料中的下一步。

7. 字典

古典分析中幾乎每一件東西都可以找到量子類似物, 古典理論與量子理論之間的對應, 可以編成一部瑰麗的字典。翻開這部字典, 我們可以看到:

函數的零點-矩陣的特徵值

函數的值域-矩陣的數值域 (numerical range)

函數的積分-矩陣的跡 (trace)

正函數-正定矩陣

等等。每個複數, 從而每一個函數, 可以分解成正的部份及么正 (unitary) 部份的乘積, 矩陣亦有類似的表爲伸縮 (dilatation) 和旋轉兩部份乘積的極分解 (polar decomposition)。古典分析中, 較深刻的某些結果, 例如 Stone-Weierstrass 定理, 經過不少的努力, 有了更爲深刻的非交換推廣。

8. 逼近

在分析中的逼近理論是很值得加以“量子化”的。在古典的情況下, 我們往往先界定出一些被認爲是“好”的函數, 然後考慮如下的一系列問題:(1) 那些“壞”函數能夠用“好”函數來逼近 (也就是說,“好”函數集合的閉包是什麼),(2) 給定的“壞”函數如果不能用“好”函數來逼近, 則它與“好”函數相距多遠,(3) 這個距離能否達到 (即, 是否有最接近這個“壞”函數的“好”函數),(4) 假定這個距離能達到, 那麼, 最接近的好函數是否唯一,(5) 假定唯一, 則這個唯一的“好”函數是否連續地依賴於給定的“壞”函數?

9. 多項式

舉例言之, 我們將定義在$[0,1]$上的多項式祇爲“好”函數, 而距離則以均勻範數 (uniform norm) 來衡量。那麼, 古典的 Weierstrass 逼近定理給了問題 (1) 的答案: 所有連續函數。至於不連續函數, 譬如說, 區間 [0,

1/2]的特徵函數, 大多數人祇要稍想一下, 就知道 (2) 的答案是1/2。當然, 恆等於 1/2的常函數答覆了問題 (3)。但除此之外還有其它的最接近函數, 例如 $f(t)=1-t$, 所以問題 (4) 的答覆是否定的, 而問題 (5) 亦因而失去了意義。逼近論專家往往不喜歡看到最後這兩個問題有這種令人洩氣的下場。

10. 正函數

另一個值得一看的例子是所有嚴格正函數 (即處處為正的函數), 其閉包是所有正函數 (即處處為非負的函數)。如果一個有界實函數f是非正的, 則其與正函數的距離是它的負部份的上確界, 即

$$\|f^-\| = \sup\{|f(x)| : f(x)<0\}。$$

f的正部份f^+即可以達到此距離。但一般來說還有其它正函數也會達到此最短距離, 因此問題 (4) 與 (5) 遭到了和前例相同的命運。

11. 常數

一個較怪異但稍具趣味性的例子是將常函數視為“好”函數。所有常函數形成一閉集—這個很容易。好, 取一個定義在$[0,1]$上的有界實函數F, 問: 它與常函數的距離有多大? 答案顯然是:F的上確界與下確界之差的一半。這個距離能否達到? 當然能夠, 祇要取上確界與下確界兩者的平均就可以了。是否祇有這個常函數達到最短距離? 是—那不難。這個常函數是否連續地依賴於F? 稍微想一下就可以答覆這問題: 是的。在這個例子中, 每個問題都有令人滿意的答案。

在複函數的情形時又是怎樣呢? 當然, 這時候上確界和下確界的概念都失去了意義。從幾何上來考慮, 我們要找出半徑為最小的把給定函數的值域圍起來的圓。此圓的圓心就是最接近的常函數的值。要證明此圓的存在性就要稍費周章了。

12. 類似問題

以上的例子很粗略地勾劃了古典逼近理論中可能發生的各種現象的梗概。非交換的情形又怎樣? 是否有類似的結果, 還是有新的現象發生?

在回答這類問題之前, 我們要有點戒心: 可交換與非交換之間的類比並非十全十美的。有時, 一些可交換理論中的事實量子化後變得毫無意義, 反過來, 亦有些非交換理論中的結果找不出可交換的根源。

13. 純量

用常函數逼近一般函數的問題, 經量子化後就成為用純量 (正確地說, 是單位矩陣乘上複數) 來逼近給定矩陣的問題。這問題不算深奧, 但亦非簡單—頗令人感到意外。大約是在1969年 Seidman 開始研究這問題 ,然後由 Stampfli 繼續工作。現在我們知道:

(1) 和一給定矩陣最近的純量一定存在。(利用緊緻性論證方法即可得出。)

(2) 主要定理: 若果A是矩陣,α是複數, 使得 $\|A-\alpha\| \le \|A-z\|$對任意複數z成立, 則

$$\|A-\alpha\|^2 + |\alpha - z|^2 \le \|A-z\|^2 \ (z\in)。$$

從這個不等式得出與A最接近的純量 (通常稱爲A的中心, 並記作$c(A)$) 是唯一的。

(3) 再利用緊緻性可以得知$c(A)$是A的連續函數。

在2×2的情形,A的中心也就是它的譜的中心, 即包圍A的譜最小的圓的圓心。同樣結論也適用於任意大小的正規矩陣。對更一般的矩陣似乎要用很煩瑣的計算才能找到其中心。但有一事已明確知道: 矩陣的中心並非永遠是其譜的中心。例如, 取

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

則A的中心不是A的譜$(= \{0\})$的中心0, 因爲$\frac{1}{4}$比0更接近A,Gene Luks 用了相當多的古典代數 (包括 Bézout 定理) 及電腦計算出

$$c(A) = \frac{-1+2\sqrt{7}}{18}。$$

14. 投影矩陣

“好”算子祇包括純量, 未免太小器了, 但祇要讓“好”算子稍微複雜一點, 相應的逼近問題就會有出乎意料的後果。

比常函數稍微複雜一點的函數類是 (集合的) 特徵函數, 亦即是祇取 0,1 兩值的函數。但利用這類函數作逼近的結果都太容易了一些以致得不出任何深刻的東西。

但如果這個問題在矩陣的層次上考慮, 則變得出乎意料的微妙。相應於特徵函數的矩陣是投影矩陣, 即適合$P^2 = P$的 Hermite 矩陣。因此, 我們現在考慮的問題是找出與給定矩陣A最接近的投影矩陣P。如果A是正規的話, 則不妨設A是對角矩陣, 因此,A可以看作定義域爲有限集的函數。表面上看來, 原來的問題化爲一個關於函數的逼近問題—但外表可能是騙人的。用這方法得到的投影矩陣, 按標準的線性代數術語來說, 是矩陣 A 的函數。函數演算 (functional calculus) 的結果祇告訴我們, 在一切 A 的函數中,P是距A最近的投影矩陣, 但是在目前非交換的情況下, 爭取最短距離的投影算子更多。在可交換的理論裡拿不出什麼可以阻撓比 P 更接近A(且不能表爲A的函數) 的投影矩陣的存在性。

15. 正規譜逼近

譜逼近 (spectral approximation) 的問題是找出譜在給定集合裡面, 與給定矩陣最靠近的矩陣。正規譜逼近是進一步把要找的矩陣限制爲正規的。這個問題的一個特殊情形是假定被逼近的矩陣已經是正規的, 更進一步的特殊化就是上一節已討論過的用投影矩陣來逼近正規矩陣。

過份簡單的可交換情形在我們不知不覺中設下了陷阱。爲提防起見, 讓我們看一些例子來喚起警覺心:

(1) 考慮用投影矩陣來逼近對角矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

函數逼近的原理啓示我們用 (可以與A交換

的)

$$P=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

作爲近似元。然而, 另有其它的投影算子和P一樣近似A, 例如

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

這裡,Q不能夠與A交換。

(2) 給定正規矩陣, 正規譜逼近問題的解不一定提供一般的譜逼近問題的解。更確切地說, 給定正規矩陣A及複數集Λ,A到譜含於 Λ 中的正 規矩陣的距離不一定等於A到譜含於Λ 中所有矩陣的距離; 後者可能比前者小。例如, 設$\Lambda=\{0\}$及

$$A=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix},$$

則譜含於$\{0\}$中的正規矩陣祇有一個, 即零矩陣, 因之A與它的距離是 $\|A-0\|=2$。譜含於$\{0\}$中的一般矩陣是冪零矩陣。從譜逼近的觀點來看, 零矩陣不是很好的冪零逼近元。例如, 冪零矩陣

$$Q=\begin{bmatrix}1&-1\\1&-1\end{bmatrix},$$

就比零矩陣好, 它到A的距離是$\|A-Q\|=\sqrt{2}$。

譜逼近問題從未被圓滿地解決過 (甚至於把範圍縮小爲投影矩陣時亦然)。在無限維空間中, 投影算子的集合甚至不是極小可達的 (proximinal), 即存在算子A, 下確界 $\|A-P\|$ 不可能在投影算子中達到。這是 Don Rogers 得到的結果的一個推論; 他證明了譜在緊的實數集合Λ中的正規算子形成一極小可達集當且僅當 Λ 是一個區間。

16. Hermite 逼近

用實函數來逼近複函數的問題實在太容易了, 因而在古典分析中沒有人提及。給定一複函數, 其實部即爲唯一的最佳逼近。這問題量子化後就變爲用 Hermite 矩陣來逼近一般矩陣的問題。一般矩陣亦可以寫成實部和虛部之和：$A=B+iC$, 其中

$$B=(A+A^*)/2,\ C=(A-A^*)/2i$$

均爲 Hermite 矩陣。因此,Hermite 逼近問題與原來可交換情形下的問題一樣容易。

由此看來, 逼近問題的難易程度與我們所選擇的"好"矩陣的複雜程度沒有什麼關係。純量逼近已經很不簡單, 把純量換作稍微複雜的投影算子, 逼近問題就變得難得多。然而, 把投影算子換作似乎更複雜而實際上廣泛得多的 Hermite 矩陣, 問題反而十分容易了。

17. 么正逼近

單位圓是否比實軸更複雜? 若用量子考慮, 進而問: 么正逼近 (unitary approximation) 是比 Hermite 逼近容易? 抑或更難? 答案是: 難一些, 但不是難很多。

給定複數z, 找出模爲1的與 z 最接近的數—這是么正逼近在一維時的情形。當$z=0$時, 這問題毫無刺激可言: 答案有無限多

個, 每個不比其它的差勁。當$z \neq 0$時, 極分解$z = \mathrm{up}(|u| = 1, p > 0)$給出了答案:$u$是與$z$最接近的么正數。受了這項啓發, 一般矩陣的么正逼近問題可以處置了。誠然, 給定了A, 我們可以把它寫成$A = UP$, 其中 U 爲么正,P爲正, 這樣就得出最接近A的么正矩陣U。

最後一句話說來很輕鬆, 但還需要證明一下。首先, 我們有

$$\|A-U\| = \|UP-U\| = \|P-1\|。$$

若W爲任意么正矩陣, 則

$$\|A-W\| = \|UP-UU^*W\| = \|P-V\|,$$

其中$V = U^*W$爲另一么正矩陣。因此, 我們須證明: 當 $P \geq 0$ 和V 爲么正時,

$$\|P-1\| \leq \|P-V\|。$$

若p,v爲複數,$p \geq 0$,$|v| = 1$, 則不等式

$$|p-1| \leq |p-v|$$

顯然成立。進而當$p \geq 0$, 而u,v爲單位向量時,

$$\|pu-u\| \leq \|pu-v\|。$$

理由是: 從$Re(u,v) \leq |(u,v)| \leq 1$可以得出

$$\begin{aligned} \|pu-u\|^2 &= p^2-2p+1 \\ \leq \ & p^2-2p\ Re(u,v)+1 = \|pu-v\|^2。\end{aligned}$$

回到矩陣的情形: 設$Pf = pf$。在剛證明的不等式中, 令u爲f, v爲Uf, 則得出

$$\begin{aligned} |p-1| &= \|pu-u\| \leq \|pu-v\| \\ &= \|Pf-Uf\| \leq \|P-U\|, \end{aligned}$$

因而有$\|P-1\| = \sup|p-1| \leq \|P-U\|$。

在無限維的情形, 類似 (關於么正逼近及等距算子逼近) 的結果也成立。但是, 從 Rogers 得出的一個結果, 我們知道么正算子集合不是極小可達的。

18. 正逼近

實軸的正部份是否比整條實軸或單位圓複雜? 答案似乎是視乎個人的觀點和品味。無論怎樣,(非交換) 正逼近的問題, 深度雖然不大, 其非顯著性已到了令人尊重的程度。目前來說, 這是在這一水平上唯一能被完全解決的問題。

給定複數a, 如何找出最接近a的正數 (這裡指非負數)? 答案是: 找出 a的實部b, 若$b \geq 0$則將它留下, 不然用0來代替。換言之, 取b的正部b^+。如果a是 (有界) 函數又如何? 怎樣找出最接近a的正函數? 答案相仿: 將a 分解爲實部和虛部:$a = b + ic$, 然後取實部的正部b^+, 這就是a的最佳正逼近。

這些考慮是否令矩陣的正逼近問題完全明朗化? 讓我們來看一個例子:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

容易寫出A的實部與虛部: 令

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ C &= \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

則B與C是 Hermite 矩陣, 且$A = B + iC$。一個 Hermite 矩陣的正部在原則上很容易找出: 把它對角化後再取對角元的正部。循此法可以找到B的正部:

$$B^{+} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}。$$

它與A的距離$\|A - B^{+}\|$不難算出, 約爲 0.825。這是我們所能做到最好的嗎 ?會不會出現一個正矩陣P, 使得$\|A - P\| < 0.725$?

從複數$a = b + ic$到實軸正部份的距離δ是$|c|$ 或是 $|a|$, 視乎$b \geq 0$或$b \leq 0$而定。無論如何,$|c|$ 總不能夠大於δ, 因此$\sqrt{\delta^2 - c^2}$是有意義的。事實上

$$\delta = \inf\{r(\geq |c|) : b + \sqrt{r^2 - c^2} \geq 0\}。$$

誠然, 若 $b \geq 0$, 則下確界在 $r = |c|$ 時達到; 當$b \leq 0$時, 下確界在$b + \sqrt{r^2 - c^2} = 0$時達到, 亦即$r^2 - c^2 = b^2$, 或$r = \sqrt{b^2 + c^2} = |a|$時達到。這個式子對矩陣也成立: 矩陣$A = B + iC$到正矩陣集合的距離是

$$\delta = \inf\{r : B + \sqrt{r^2 - C^2} \geq 0\}。$$

這就是正逼近理論的主要結果。在具體計算中, 用標準的譜理論容易求得δ。

回到當初的例子:

$$A = B + iC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

上述的結果導引我們怎樣找出A的最佳正逼近: 它是

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

而不是B^{+}。它與A的距離是 $\sqrt{2}/2$, 約等於 0.707, 的確比0.725小。

正逼近理論有一度變成了鄉村工業, 主要的業者是 Bouldin。產品與此下諸問題有關: 什麼時後最佳正逼近是唯一的? 一般來說, 最佳正逼近組成凸緊集, 它們的端點 (extreme points) 有什麼特別的地方?

19. 正壓縮

將正逼近稍加改變, 就成了正壓縮 (positive contraction) 逼近問題: 逼近給定矩陣的是正壓縮—正的且範數不超過1的矩陣。對一些特例, 如

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

怎樣找出最接近J的正壓縮?

正壓縮逼近問題比起正逼近問題更不可捉摸。上述關於 J 的具體問題, 令我煩惱了很多年, 一直到現在仍是一點眉目都沒有。當然, 我的目的並不在對 J 有個具體的交代, 而是希望通過其解答看到探討一般正壓縮逼近的一線曙光。

20. 正規逼近

怎樣找出最接近一個給定矩陣的正規矩陣? 這個問題的探討已有一些進展, 但我們覺得大概不可能有一套完整的理論。即使是一些看來很簡單、很具體的矩陣亦難以處置。看一個實例

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}。$$

最接近於A的正規矩陣是什麼? 根據一些不充份的理由, 我們猜測答案似乎是

$$N=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}。$$

它到A的距離是3/4, 但這裡的理由沒有什麼說服力。

在無限維的情況, 正規算子並不構成極小可達的集合。Don Rogers 證明了帶權移動算子 (weighted shift)

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot\end{bmatrix}$$

到正規算子的距離是$\frac{1}{2}$但找不到一個正規算子與A的距離剛好是 $\frac{1}{2}$。

21. 其它問題

在非交換逼近的領域中另有很多有趣的問題, 有些容易, 但大部份很難。例如, 考慮所有的耗散算子 (dissipative operators, 即滿足 $ReA \leq 0$的算子A) 就得到一個很易回答的問題。當然, 所有添增算子 (accretive operators, 即$ReA \geq 0$的算子A) 亦如是。若$A=B+iC$, 則$B^{+}+iC$就是最接近A的添增算子。

另一個顯然的問題源自可逆算子, 在無限維的情形,Kadison 和 Ringrose 刻劃了所有可逆算子的閉包,Bouldin 則探討了相關連的逼近問題 。再提一個問題是有關冪零或擬冪零 (quasinilpotent) 算子, 這類算子的閉包已找到了, 但逼近的問題難以有進展。

22. 幾乎正規逼近

一個典型的非交換問題是: 幾乎是正規的算子是否近乎正規 (Are almost normal operators nearly normal)? 這樣問乍看起來像在開一個無聊的玩笑。其實, 如果用數學分析中常用的 $\varepsilon-\delta$ 語言來闡釋, 就知道這問題是認真的。這個問題也可以用序列的方式來陳述: 如果 $A_nA_n{}^*-A_n{}^*A_n$(按範數) 趨於零, 是否存在一正規矩陣列$\{B_n\}$, 使得A_n-B_n趨於零?

如果矩陣A_n有固定的大小, 亦即是在有限維的情形, 則可以用緊緻性論證來肯定地答覆上述問題。在無限維時, 其答案是否定的。例如, 取權為

$$1/n, 2/n, 3/n, \cdots, (n-1)/n, 1, 1, 1, \cdots$$

的加權移動算子A_n, 經簡單計算後得

$$\|A_n{}^*A_n-A_nA_n{}^*\|=1/n,$$

但利用一個稍微精細的論證, 可以得知$\|A_n-B\|\geq 1$對任意正規算子B成立。

23. 交換逼近

另一個標準的非交換逼近問題是: 幾乎可交換是不是近乎交換? 換言之, 給定矩陣列$\{A_n\}$,$\{B_n\}$, 若$A_nB_n-B_nA_n$趨於零, 是否存在另兩列 $\{A_n{}'\}$,$\{B_n{}'\}$, 使$A_n{}'Bn'=B_n{}'A_n{}'$, 而$A_n-A_n{}'$和$B_n-B_n{}'$均趨於零?

同上，當A_n,B_n均定義在一個固定的有限維空間上時，緊緻性論證再次提供肯定的答覆。至於無限維的情形，經過多年後，終為蔡文端 (1986) 解決。他所舉的兩個$n\times n$矩陣A,B，適合 $\|A\|\leq 1$,$\|B\|\leq 1$及 $\|AB-BA\|\leq 2/n$ ，但另一方面，對任意可交換$n\times n$矩陣對A'和B'，卻有

$$\|A-A'\|+\|B-B'\|\geq 1-1/n。$$

還有許多類似於上述的問題，其中有些已解決了，有些仍有待研究。例如Voiculescu 解決了相應的么正算子問題。他考慮$n\times n$么正算子對

$$U_n=\begin{bmatrix} 0 & & & & & 1 \\ 1 & 0 & & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$V_n=\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \omega & & & & \\ & & \omega^2 & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \omega^{n-1} \end{bmatrix},$$

其中ω是n次本原根 (primitive nth root of unity)。顯然 $\|U_nV_n-V_nU_n\|\to 0$ ，但是 Voiculescu 證明了不存在么正矩陣 S_n和T_n，使$S_nT_n=T_nS_n$，但

$$\lim\|U_n-S_n\|=\lim\|V_n-T_n\|=0。$$

同樣的"幾乎→ 近似"問題可以對 Hermite 矩陣提出。許多人，包括 Ken Davidson，致力於尋找其答案，但至今仍未成功。

24. 尾聲

非交換分析不是一門容易的數學，目前仍大有人在研究。我希望這裡提到的一些問題或例子，不論是否已解決，會引起你的注意。如果你能解出其中任何一個，請你通知我—我真的認為這門學問很有趣，我希望獲知其最近發展的任何訊息。

—本文筆錄者方資求，任教於加拿大 Carleton 大學，本文撰寫期間正訪問國立交通大學應用數學系，修訂者吳培元任教於國立交通大學應用數學系—