

數學史和數學教育：

個人的經驗和看法

蕭文強

1. 我怎樣跑進數學史打轉？

1974年夏，我在美國一所大學裡教書。有一天系主任匆匆跑來告訴我有位同事摔倒斷了腿，得休養一段日子，叫我代他的課。沒有別的人願擔那門課，當時我剛到任兩年，論年資乃最淺，“苦差”自然落在我的肩上！為什麼沒有人願擔那門課呢？原來那門“數學欣賞”課雖然名字漂亮動聽，實則是一門專為非理工科學生而設的數學課，好讓學生取得足夠學分以滿足通識教育的要求，把它稱作“厭惡數學的人被迫上的數學課”，或更貼切！第一天上課，一百五十多位學生劈頭便嚷：“我又不需要使用數學，為什麼要學習數學？”頓時令我啞口無言！但這也令我首次從一個不需要使用數學作為工具的人的眼光去想這個問題。（過了四年後，我真的寫了一本小書，書名就叫做《為什麼要學習數學？》，記下了當時我的初步看法。）

為了應付“苦差”，在九月開課前我“惡補”一番，拼命讀書做筆記，又反覆思量。經過消化大量材料後，我認識到哲學的省思和歷史的省思的重要，尤其從數學史獲得不少

啓發。漸漸我不單為備課而看書了，後來它更成為一種學習興趣，至今不減分毫。更想不到的，這種興趣竟然孕育了一種鼓舞，不只使我對數學的整體認識得到提高，還使我對數學的信念和熱愛得到增強。看來，“苦差”竟成了“優差”呢！

2. 誰需要數學史？

“誰需要數學史？”和“誰需要數學史！”表明了兩種不同的態度，前者意味開放的探討，後者意味既定的否定看法。歸根結底，這兩種不同的態度，其實反映了不同的“數學觀”，在第四節我們要回到這一點。暫時，讓我們開門見山，臚列一些運用數學史於數學教學的理由和方法。這些觀點散見諸為數不算太少的中西文章，恕我不一一列明出處了。以下的總結，取材自 J.Fauvel 的文章“Using History in Mathematics Education”(刊於 For the Learning of Mathematics, Vol. 11, No. 2, 1991, 3-6頁)，我試把內容整理為以下幾點。

運用數學史於數學教育的理由：

- (1) 引發學習動機，從而使學生(及教師本人)保持對數學的興趣和熱情。
- (2) 為數學平添“人情味”，使它易於親近。也使學生明白前人創業的艱辛，並且明白到不應把自己碰到的學習困難歸咎於自己愚笨。同時，教師也可以從歷史發展中的絆腳石瞭解學生的學習困難，可以參考歷史發展作為計劃課題安排的指引。(在這兒要提醒一點，參考歷史發展作為指引，絕不等同完全按歷史發展去講授，因為真正的歷史發展有時非常迂迴曲折，後人視之，往往難以理解!)
- (3) 瞭解數學思想發展過程，能增進理解。對比古今，能更好明白現代理論和技巧的優點。
- (4) 對數學整體有較全面的看法和認識。
- (5) 滲透多元文化觀點，瞭解數學與社會發展的關係，並提供跨科合作的通識教育。
- (6) 數學史提供學生進一步探索的機會和素材。

運用數學史於數學教育的方法:

- (1) 在講課中加插數學家的軼事和言行。
- (2) 開始講授某個數學概念時，先介紹它的歷史發展。
- (3) 以數學史上的名題及其解答去講授有關的數學概念，以數學史上的關鍵事例去說明有關的技巧方法，以數學史上的著名錯誤或誤解去幫助學生克服學習困難。
- (4) 利用原著數學文獻設計課堂習作。
- (5) 指導學生製作富數學史興味的壁報、專題探討、特輯、甚至戲劇、錄像、...
- (6) 在課程內容裡滲透歷史發展觀點。
- (7) 以數學史作指引去設計整體課程。
- (8) 講授數學史的課。

與其把以上逐點詳加解釋，不如讓我從個人經驗中抽取一些事例，說明如何在教學上運用數學史。固然，這些個人的做法，可能失諸片面，也可能流於主觀，但或許仍能起一點參考作用吧。在下一節我只列舉在其中取材的書本或文章，適當地加點按語。這束事例是在不同的課上運用，如果讀者感覺敘述上比較散漫凌亂，還請原諒，並且請用一種多元眼光看待它。這些事例也並不企圖包羅眾多的數學史參考材料，請讀者不要把它視為一張參考書目。

3. 事例一束

(1) 數學家畫像 (在很多書本上都能找到) 不少人提到數學史便想起人物、畫像、軼事。有些課本標榜採用數學史也只限於加插一些數學家的畫像或小史。固然，這些有它的作用，但我們必須明白，歷史斷非一連串的名字和畫像而已。

(2) E. T. Bell 的“Men of Mathematics” (1937年, 1965年再版)

這本名著收錄了三十多位數學家的小傳，其中不乏多姿多彩的故事，能為課堂平添不少情趣。有些含寓意的故事，更能達致一本正經式說教未必能達致的效果。不過讀者要小心，這本通俗名著的內容，有些不一定翔實，容易以訛傳訛。

(3) C. Reid 的“Hilbert”(1970年)

這本書並不單為 Hilbert 立傳，還傳神地描繪了十九世紀後半期至二十世紀前本期德國數學界的活動和氣氛。書裡沒有一點技術內容的討論，但每讀一遍我都獲益一次。我甚至

願意推薦它為一本每位對數學有興趣的人必讀之書！

以上三種可歸作一類，跟著的幾種可歸作另一類，我管叫它們數學通史。

(4) F. Cajori 的“History of Mathematics” (1893年,1919年二版,1980年再版)

(5) D. E. Smith 的“History of Mathematics” (1925年,1958年再版)

(6) C. B. Boyer 的“A History of Mathematics” (1968年,1989年二版)

上兩本數學通史較舊，這本較新。它是一本材料豐富而且很好讀的數學通史，適宜讓學生自己閱讀。如果一位數學教師只願購買一本數學史參考書放在案頭，我會介紹這一本。

(7) M.Kline的“Mathematical Thought From Ancient to Modern Times”(1972年)

這是一本非常詳盡的數學通史，著眼點在於數學內容，適合專修數學的人。全書偏重近代西歐數學，對東方古代數學只略提甚至完全不提 (例如中國古代數學)，誠美中不足！

(8) 梁宗巨的《世界數學簡史》(1980年)
這本書收集了不少關於中西數學名詞的由來，十分有用，在別的書本不常找到這些資料。

(9) 鮑爾加爾斯基的《數學簡史》(中譯本,1974年,1979年二版)

這本蘇聯數學史教科書，比西方同類書本花較多篇幅論及社會發展和數學發展的互動關係。

以下幾種是古代東方數學通史，可補充通常西方數學史書簡略了的部份。

(10) O. Neugebauer 的“The Exact Sciences in Antiquity” (1957年二版,1969年再版)

作者基於 1947 年康乃爾大學通俗講座寫成此書，內容包括古代埃及、巴比倫、希臘的數學史和天文學史，乃作者本人的研究專長。

(11) 錢寶琮的《中國數學史》(1964年)

(12) G. G. Joseph 的“The Crest of the Peacock” (1991年)

這本書的副題名“數學的非西歐根源”，由此可知它的內容強調那一方面了。

下面一種可謂獨樹一幟，是記錄大全式的典型鉅著。

(13) L. E. Dickson 的“History of the Theory of Numbers, Vol. I, II, III” (1919-1923年)

這本書並不適宜用作閱讀，只宜用作參考查閱，在那方面大概沒有那本書的資料比它更齊全了。

以下幾種屬專題數學史研究的著作，各具特色。

(14) C. B. Boyer 的“The History of Calculus and Its Conceptual Development” (1949年,1959年再版)

(15) W. R. Knorr 的“The Evolution of the Euclidean Elements” (1975年)

作者在書中提出新觀點，重新審視古代希臘數學史。

(16) D. H. Fowler 的文章 Ratio in Early Greek Mathematics(刊於 Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, Vol. 1, NO. 6, 1979, 807-846 頁)

作者基於上述 Knorr 書中提出的新觀點，繼續深入探討闡述。

(17) J. W. Dauben 的 “Georg Cantor :His Mathematics and Philosophy of the Infinite” (1979年)

這本以單一個數學家為名的書並不僅是他的傳記而已，它的主要內容在於探討一個重要的數學思想的來源、發展和影響。

(18) J. Lützen 的 “Joseph Louville, 1809 -1882:Master of Pure and Applied Mathematics” (1990年)

這本數學史專著，也是環繞一個數學家的工作，敘述他處於的那個時代的數學思想。

(19) A. Weil 的 “Number Theory : An Approach Through History from Hamurapi to Legendre” (1984年)

這本是以數學內容為主的數學史研究專著，較適合專修數學的人。

(20) H. Edwards 的 “Galois Theory”(1984年)

這是另一本以數學內容為主的數學史研究專著。

跟著的幾種是原著數學文獻及其注釋。

(21) A.B. Chace 的 “The Rhind Mathematical Papyrus” (1927-1929年,1979年再版)

有時單單望著這份最古老的數學文獻，已使人發思古之幽情，景仰之心亦油然而生。

(22) 白尚恕的《九章算術注釋》(1983年)

《九章算術》乃我國古代的輝煌數學文獻，除了它的數學價值以外，更多添了一份民族自豪。

(23) T. L. Heath 的 “Euclid :The Thirteen Books of the Element” (1908年,1925年二版,1956年再版)

除了原文和注釋外，全書還包含很多非常有用的材料。

(24) L. Euler 的文章 Solutio Problematis and Geometriam Situs Pertinentis ” (1736年,可見諸 N. L. Biggs, E. K. Lloyd, R. J. Wilson 的 “Graph Theory :1736-1936”, 1976年)

這篇分為二十一節的文章，把七橋問題抽絲剝繭，給出解答，還把解答推廣至一般情況，可視作解難的典範。它也是圖論發展史上的一篇奠基性質論文，值得全文通讀。

(25) R. Dedekind 的文章 Continuity And Irrational Number (1872年,可見諸 R. Dedekind 的 “Essays on the Theory of Numbers”, 1901年,1963年再版)

這是另一篇值得由首至尾細讀玩味的原著，從中可以看到一個數學思想清清楚楚浮現出來。

(26) D. Hilbert 的演講文稿 *Mathematical Problems* (1900年, 譯文刊登於 *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 8, 1902, 437-479 頁)

這是一篇有名的歷史文獻, 尤其開首和結尾很有意思, 亦富文采。

(27) H. Lebesgue 的文章 *The Development of the Integral Concept* (1926年, 可見諸 R. C. Churchill 編著的“*Classics of Mathematics*”, 1982年)

這篇小品由大師執筆, 以通俗語言介紹他自己的重要發現, 可謂自身說法了。

(28) Al-Khwarizimi 的 “*Hisab Al-Jabr Wal-Mu -qabala*” (約 830年, 片斷可見諸 D. J. Struik 編著的 “*A Source Book in Mathematics* :

1200 -1800”, 1969 年和 J. Fauvel, J. Gray 編著的 “*The History of Mathematics: A Reader*”, 1987年)

“代數”英文詞的由來, 便是源自這本書名的第二個字。這段故事可用作聯繫中學代數 (方程式解法) 和大學抽象代數的開端。

以下兩種, 嚴格說來不算是數學史, 但作者的歷史眼光卻處處流露, 使全書帶有濃厚的歷史氣息。

(29) G. Pólya 的 “*Mathematics and Plausible Reasoning*” (1954年)

從數學家的角度討論數學思想方式, 這是最好的書。

(30) I. Lakatos 的 “*Proofs and Refutations*”

(1976年)

全書以多面體的 Euler-Descartes 公式為主線, 闡述作者的數學哲學觀點。書中充滿發人深省的事例和問題。

以下三種都是數學名家的書信。

(31) F. Bolyai 和 J. Bolyai 父子之間的通信 (約 1823年)

在信上父親勸誡兒子不要耗費時間精力於平行公理這個問題上。而兒子卻回覆父親, 他已從一無所有創建了奇怪的新世界 (指雙曲型幾何)。父親的信淒婉動人, 兒子的信激盪人心!

(32) A. Cayley 寫給 J. J. Sylvester 的信 (1857年)

Cayley 在信上解釋他剛獲得的一項成果, 就是今天稱作 Cayley-Hamilton 定理。在線性代數課堂上我必展示這封信, 由它開始講解。

(33) W. R. Hamilton 寫給兒子的信 (約 1865年)

在信上 Hamilton 憶述他發現四元數的經過。

最後幾種是綜合有關文獻經整理後得來的。

(34) Euclid 的 “*Elements*” 卷一部份

介紹平行公理和其他定理的關係, 作為介紹非歐幾何的引子。非歐幾何的發現是數學史上影響深遠的一樁大事, 值得在課上討論。

(35) Euclid 的 “*Elements*” 卷七部份和《九章算術》卷一部份

比較中西古代對今天稱作歐氏算法的討論和它的應用。

(36) Euclid 的 “Elements” 卷七、卷九部份和 C. F. Gauss 的 “Disquisitiones Arithmeticae” (1801年) 第一節部份

介紹今天稱作算術基本定理, 分析它的證明。

(37) 從歷史看函數概念的發展, 由靜態 (表值) 至動態 (幾何化) 再至計算 (代數化) 然後回復至靜態 (射) 的“螺旋式”發展, 頗有返璞歸真的味道。(見 M. K. Siu, Concept of Function : Its History and Teaching, Revised Version, HKU Research Report HKUM-91-10, 1991)

4. 數學史真的有幫助嗎?

從上一節所學的事例中, 讀者大概能意會到我心目中的“可運用的數學史”是指什麼吧? 它不單指人物、軼事、誰何時發現什麼、..., 它也不等於專門數學史家的研究工作。固然, 我們絕不排除這些材料, 它們是不可缺少的幫助。我是以一個數學工作者和數學教師的身份看待數學史, 不論是原著、二手材料、論述或者故事、傳記, 都是我們的營養品, 值得我們學習、消化、運用。通過這些材料, 我們看到多姿多彩的數學意念如何產生, 明白到它們如何演變成爲今天熟悉的形式, 也從這些發展演變當中認識到創造這些知識的人, 產生這些人和這些知識的客觀條件, 還有這些知識的社會作用和它對文化的影響。十八世紀德國文豪 Goethe 說過: “一門科學的歷史就是那門科學本身。”用諸於數

學, 我們不妨說: “數學史就是數學本身。”所以, 吸收和運用數學史, 既充實了自己, 也豐富了教學。

對於運用數學史於教學的建議, 最常碰到的消極反應有兩種: (1) “我要教的是現代人用的數學, 管它古代人怎麼做數學呢? 那些老古董頂多拿來作點綴而已, 它並不是真正的數學。即使你說從數學史能窺探數學的本質和意義, 那又與我何干? 我不是研究哲學的, 我只想把數學教好吧。” (2) “雖然我承認數學史既有益又有趣, 但我那兒來這份閒情逸緻去運用它? 單是要在規定的時間內教懂這一大群程度參差的學生規定的課程範圍裡的數學, 已夠忙的!”

這兩種反應貌似不同, 實則反映了同一件事: 在數學教育中, 我們往往只強調實用知識這一個目標。不同時代不同地區的數學課程綱要, 內容和使用字眼或許不相同, 但籠統扼要地說, 它們的目標都可以分爲三方面, 即是: (1) 思維訓練、(2) 實用知識、(3) 文化素養。但往往我們只注重 (2), 把數學單單作爲一種技能、一種工具去講授。這樣做的話, 縱使傳授了知識, 亦必掩蓋了數學作爲文化活動的面目。學生不易瞭解數學有它的生命和發展、有它的過去和未來; 學生容易把數學看成是一堆現成的公式和定理, 雖然完美無誤但也是僵硬不變而且刻板枯燥; 學生見到的儘是技巧堆砌和邏輯遊戲, 予人閉門造車的印象。難怪只有極少數學生被數學吸引了, 也有少數一些學生爲了日後需要使用這種工具姑且把它捱過去, 其餘絕大部份學生都與數學疏離, 或者厭惡害怕它, 或者對它持冷漠態

度。很多學生中學畢業了，卻像完全沒有學過數學這科，只當它是一場惡夢！

數學教學有“狹義”和“廣義”兩方面：前者是指傳授數學知識，後者較難界定，籠統地說它是指“數學觀”的體現。什麼是“數學觀”呢？有些人以為那是抽象的哲學問題，其實它並不抽象，你的數學觀就是你對數學的看法、你對數學本質和意義的見解。每個人總有自己對事物的看法，因此每個人一定有自己的數學觀。(如果你認為毋須理會數學的本質和意義，那也是一種數學觀!) 每個社會的成員的數學觀匯集起來，其主流即形成該社會的數學觀。千萬不要小看這一點，千萬不要以為數學觀與數學教學無干。就個人而言，不論你自覺也好，不自覺也好，你的數學觀必定流露反映於你的教學中，從而影響了你的學生。就整個社會而言，證諸歷史，數學和數學教育的內容及發展，決定於當時當地的數學觀。

以前我曾在一篇題為“數學·數學史·數學教師”的文章裡談到數學上的“才、學、識”(刊於《抖擻》雙月刊第53期(1983年7月),67-72頁)，這個提法是源於清代文學家袁枚的話：“學如弓弩，才如箭鏃，識以領之、方能中鵠。”於數學而言，才是指計算能力、推理能力、分析和綜合能力、洞察力、直觀思維能力、獨立創作力、…；學是指各種公式、定理、算法、理論、…；識是指分析鑒別知識再經融會貫通後獲致個人見解的能力。如果把這三點套用於上述的兩方面，“學”便對應於狹義數學教學，而“才、學、識”三者合起來才對應於廣義數學教學。至於這兩方面的功能，

大別之或者可以這樣說：狹義數學教學達致的社會功能，就短線而言乃日常計算或專業需要，就長線而言乃數學研究及科技進展，總而言之，數學是一種工具。廣義數學教學達致的還有教育功能，這包括數學思維伸延至一般思維，培養正確的學習方法和態度、良好學風和品德修養，數學欣賞帶來的學習愉悅以至對知識的尊重。

單單傳授知識，從廣義的角度看自然是一個失敗。近代哲學家 A. N. Whitehead 說過：“教育是使人獲得如何使用知識的藝術。”他也說過：“文化素養包含思維活動與對美和善的感受，而非單單零碎的知識。僅僅擁有知識的人是天下間最沒用的討厭傢伙，我們的目標在於培養既具文化素養又具某種專業知識的人。”即使從狹義的角度看，只注重操練數學技能也不見得傳授了知識。這樣做可能使學生應付過了考試，但卻使大部份學生喪失興趣、好奇心、批判能力、自學能力、甚至表達能力。總的而言，學生既感受不到一種學習愉悅，也就難於養成一種對知識的尊重了。表面看起來，亞洲學生的數學測試成績排名居世界前列，這從幾屆國際數學教學評估報告中可以看到。但我對這點可不敢沾沾自喜。會不會我們在技術內容方面要求過高，以致忽略了別的方面，而付出的代價就是那些不能在短期內以標準測試方式量度的品質呢？小孩子本來都很喜歡學習，對什麼也感興趣。進了小學後，有些人不再喜歡學習了；進了中學後，更多人不喜歡學習了。原來是有趣的事物，由於不用考或沒法考，變為沒趣！那些要考的，卻由於要考，也變為沒趣！到頭來什麼都沒趣了，這豈非“自討沒趣”嗎？

除了傳授知識以外，數學教師更有責任培養學生的數學素養、眼光和品味。固然，這不是一樁輕而易舉的工作，但只有身在第一線工作的教師才能肩負這項任務，再周全再詳盡的課程綱要亦只能起指引作用而已。數學教師應該設法在日常教學裡滲透這種文化觀點和歷史眼光，讓學生暢泳其中，漸漸形成自己的數學觀。要這樣做，教師必須充實自己的學識。數學的學識可作縱橫看，縱是追溯數學概念和理論的來龍去脈，橫是認識數學的本質和意義，經緯交織而成。一個數學教師也像一個獨奏表演者，憑著自己的理解、領會、功力去詮釋音樂作品。要作美妙的詮釋，表演者本人必須先瞭解該作品和喜愛該作品。數學教師亦復一樣，要把數學教好，教師本人必須保持自己對數學的興趣和熱情，充實自己

的學識，培養那種文化觀點和歷史眼光。在這幾方面，數學史肯定是有幫助的。讓我引用一段著名科學史家 G. Sarton 的話作為本文的結束：

“數學史家的主要任務，同時又是他最鍾愛的特權，就是詮釋數學的人文成分，顯示數學的偉大、優美和尊嚴，描述歷代的人如何以不斷的努力和積累的才華去建立這座令我們自豪的壯麗紀念碑，也使我們每個人對著它嘆為奇觀，感到謙遜而謝天。學習數學史倒不一定產生更出色的數學家，但它產生更溫雅的數學家。學習數學史能豐富他們的思想，撫慰他們的心靈，並且培植他們的高雅品質。”
(《數學史的研究》，1936年)

—本文作者任教於香港大學數學系—