

數學史在數學教育中的重要性

楊淑芬

數學課程在中小學裡成爲最不受歡迎、最枯燥乏味、最沒有成就感的科目，早已是司空見慣的事，即使是大學數學系的學生，也經常是愈唸愈不知所學理論究竟從何而來？又該從何而去？使數學不爲學生所排斥，成爲學生所喜愛的科目之一，相信是所有關心數學教育者心中企盼能達成的目標。

然而，要使大部分學生對數學產生興趣，讓學生去感受數學在人類文化上所發揮的功用，經歷一些創造數學的樂趣，乃是達到此一目的的方法之一。就數學作爲文化產物的觀點而言，自然而然引發出數學史在數學教育上的重要性；即使從鼓勵學生經歷數學的創造過程來看，數學的概念發展歷史在數學教育上，同樣有著極其珍貴的應用價值。國際數學教育界近二十年來對數學史的逐漸重視，並成立有專門的研究小組，以及近幾年來有關這方面的論文、會議、期刊的出現，即足以說明數學教育中應用數學史的這一趨勢，正方興未艾地進行著。

事實上這樣的作法，可以追溯到 Felix Klein 的時候。在 1945 年出版，爲中學教師所撰寫的《初等數學》(Elementary Mathematics) 中，Klein 就經常從歷史發展的角度

來引入一個新概念。而採取這種歷史取向 (historical approach) 的原因，則出自於個體發展與歷史發展相似的想法上。例如 Klein 即談到：

從數學教學的觀點來看，我們當然應該避免使學生過早接觸這樣抽象困難的事物。爲了對我這個看法作更詳細的說明，我很樂意提出生物遺傳定律 (Biogenetic Fundamental Law)。根據此定律，個體的發展會縮短其階段地經歷種族的所有發展階段。這樣的想法已經成爲每一個一般文化的重要部份。現在，我認爲在數學中的教育，如同其它科目的教育，都應該依循此一定律，至少一般而言是如此 (Klein 1945, p.268)。

不只 Klein 有這樣的想法，Henri Poincaré 更早在 1908 年出版的《科學與方法》(Science and Method) 中透露了同樣的理念：

動物學家認爲：動物胚胎的發育，在短暫的期間內經過其祖先演化過程的一切地質時代，而重演其歷史。看來思維的發展亦復如此。教育工作者的任務，就是要使兒童思想的發展，踏

過前人的足跡，迅速地走過某些階段，但毫不遺漏，由於這個緣故，科學史理應成為我們的第一嚮導 (Poincaré, 1946, p.437)。

而極為關心數學教育的數學家 George Polya, 也寫過“數學教學與生物發生律”一文，並相信這個生物定律能引發許多極為有用的研究。

當然，大師們的想法不一定完全正確，生物學上的重演說也隨著遺傳基因的發現而被修正，並隨著科學研究器材的進步而趨於末落，但這至少給了我們一個啓發：透過數學概念的歷史發展，我們能夠了解多少學生的想法、犯錯的原因、困難阻礙發生的地方？如果我們比較一下 Jean Piaget 的發生認識論與數學得歷史發展，將會發現這兩者有某種程度的相似性是可能的 (註一)。換句話說，我們有透過概念的歷史發展以了解學生的想法得可能。這對以所有學生為數學教學的對象、冀望從學生的角度去幫助學生作思考的九〇年代數學教育 (註二)，無疑地有著極大的應用價值。

如同前面曾經提過，數學史在數學教育上的價值，除了藉以了解學生的想法之外，在環保意識高漲的今日，強調科學與數學的人文面向更為重要。因為除非覺醒到科學與數學不是必然將人類帶往幸福之路、不是萬能之神，而是人類的創造，同時人類的文化也將隨科學與數學的發展而有所不同，否則無法掌握人類週遭的生活環境往更好的方向發展的。在這種情況底下，教育出對科學與數學具有人文關懷的下一代，成了所有相關的教

育學者們的責任了。而這樣的考慮，同時也有增進學生對數學產生興趣的副作用。

因此，1972年在英國 Exeter 舉行的第二屆國際數學教育會議 (ICME)(註三)，即由於意識到數學教育必需在數學課程中為歷史尋求定位，而選出了70個會員成立一個“Exeter 工作小組”討論歷史與數學的關聯。他們認為數學史可以顯示出數學是一種人類活動的結果，而不是一開始便是如此型態的結構，並能對數學與我們的社會、文化以及和其它各種不同學科之間的關係，提供更多的認識。既然國際數學教育會議如此公開強調數學史的重要，則各方對此加以反應是可以預期的了。1974年，英國就有兩個數學教師的會議，針對如何在數學教學中使用數學史而設計。一個是4月8-11日數學學會在 Surrey 的 Royal Holloway 學院所舉行的“數學史與數學教學之關聯”工作小組會議；討論了在介紹射影、非歐幾何，以及微積分的課程時，如何有效利用數學史另一個是4月16-20日數學教師協會在 Nottingham 的 Clifton 教育學院舉行的“數學史中的個案研究”討論會，從數學史的角度對教學方法、課程表的編排、解題，以及一些數學主題如數目的概念起源、度量與分數、無限大與無限小量等，進行個案的研究討論，他們認為數學史在教學進展中，可以作為“人性化”的一個推動力。

而在1976年，NCTM(註四)出版的第31本年書中，美國的 Philip S. Jones 則發表了“為教學工具的數學史”一文，他肯定歷史可以給與學生額外的撫慰與信心：像

Descartes 發現負數時尚稱它們是“錯誤的”，而且還避免使用負數；Gauss 認為“無限是可怕的”；Euler 錯誤地寫下一些發散級數的和等等。這些故事撫慰我們說，即使是偉大的人物在面對今天我們感到相當完整清楚的概念時，也曾經同樣地遇到困難。Jones 強調，把數學史用在教學上，目的並不是在展現數學史本身，而是在透過這些歷史材料背景以達到理解數學、接近數學、並獲得學習的自信心上，提供具體的方法。由於從歷史資源中，我們可以了解到數學與哲學宗教社會經濟甚至知識上的好期有關，例如 Leibniz 基於對宗教哲學的興趣和對知識的好奇，建立了二進位運算系統，在現代電腦發展上扮演著一個關鍵性的角色；非歐幾何源於對《幾何原本》第五公設的好奇問題而起。卻在後來相對論上有了應用。這一類例子可以讓學生了解到，數學並非如想像中那樣，是一成不變的，任何表面上看起來沒有立即實用價值的好奇，都有可能成為日後數學或其它科學的重要基礎。基於這樣的認識，所以 Jones 認為在數學教育中，僅注重邏輯形式是不夠的，直觀、歸納、類比，以及好奇、靈感與信心的重要性，絕不亞於邏輯；而對概念發展歷史的洞察，則能提供有關的豐富材料，在課程的安排、概念的教導、刺激學生的興趣等方面，都將有所貢獻。

“Exeter 工作小組”在 1976 年第三屆 ICME 會議中，就發表了他們的一些研究成果。B. Hughes 從歷史的角度來看證明的產生，由於 Proclus 曾在《幾何原本第一卷註解》(Commentary on the First Book of

the Elements) 中多次提到，分析方法使希臘數學家發現了許多定理與它們的證明。所謂分析的方法，是從結論到所給條件的過程的演繹討論；而綜合證明則是反其道而行。如此看來，他認為介紹證明給學生，最適合的教學方法即是分析。另外 J. Nicolsm 則發表了由他所主持的一項數學史的教學計劃及評估；G. Flegg 談到數學史在數學教學中扮演著誘導的重要角色，數學是文化整合的結果，忽略其歷史，將使學生對數學是什麼的概念不夠完整等等。

當西方國家肯定此一潮流的價值，並積極展開研究探討之際，東方國家也開始有人注意到這個情形。香港中文大學數學系蕭文強博士 1976 年 9 月份的《抖擻》中就發表了“數學發展史給我們的啟發”一文。文中他談到，從數學發展史來看，數學由生產實踐而來。古文明的數學著重在“怎麼做”，到了西元前六世紀的希臘數學，才開始討論“為什麼這樣做”，因而在教學中應該多留心實際的例子讓學生體會到這一點。不過在課堂上，數學教師經常忽略了數學與生活的關係，以為學習數學目的只在於訓練學生的思考能力，因此要強調邏輯的嚴謹。然而從歷史上來看，“嚴謹性”並非一成不變的，今天的嚴謹在明天可能只是一粗淺的說明。數學雖然是一門邏輯性很強的學科，但單是邏輯並不能導致新的發展，也不能決定數學的內容，從數學發展史來看，做數學很多時候是憑直觀經驗臆測的，十八世紀 Euler 在無窮級數上的成就就是個很好的例子。由此看來，數學教師有數學史的修養，對數學有正確的認識而不在

將之視為邏輯推理，是極為重要的；否則，我們就只能期望擁有一群只會證明而沒有創造的新一代“數學家”了！

數學教育界對數學史的重視，到了第四屆 ICME 會議顯得更為熱絡，在1983年出版的會議記錄中，就出現了八篇這一類的論文。例如 Bruce E. Meserve 即認為數學的歷史演變，是幫助學生了解數學及其應用的絕佳材料與資源。他舉了一些例子。早期埃及人在面對“如何造一正方形使其面積為原來的兩倍”此一問題時，是利用原正方形的對角線為新正方形的邊長來回答。我們可以利用折紙來說明，也可以用畢氏定理；但這並不表示埃及人能回答此一問題即是由於他們已經熟悉了畢氏定理。利用分配律展開 $(a+b)^2$ 得到 $a^2+2ab+b^2$ ，利用圖形的說明同樣可以獲得相同的結果。這種幾何表現不僅明顯易懂，也使學生了解到幾何與代數之間的關聯。這些例子使我們了解到，一個我們習慣用現代數學來解決的問題，不一定僅有這種唯一的解法，歷史不只一次地告訴我們，曾經有人用更直接具體易懂的方法解決相同的問題。透過歷史，我們可以尋找出一個更適合學生的說明方式。Meserve 還指出，數學史在引起學生的“需要”情境上也有貢獻，一個簡單的例子即無窮級數 $1-1+1-1+1-1+\dots$ ，在歷史上曾經有許多數學家利用不同的方法得到和為 $0, 1, -1, 2, 1/2$ 等答案；在這種情形下學生就能體會，對無窮級數的進一步探討與分類顯然是迫切需要了。

而 Leo Rogers 則談到，歷史中前人累積下來的經驗，在教學上是值得借鏡的。當我

們在面對過去的數學史時，必需了解現代的數學根基於過去，而過去也是現在數學嚴謹性的基礎，我們不能用現代的標準否定了過去的數學成就。從此角度來看，教導學生數學的嚴謹性必需是循序漸進的，我們實不應該過早要求學生表現數學的嚴密而喪失了感受數學趣味的機會。又如 Hans Neils Jahnke 以十八世紀末十九世紀初，數與量的概念開始比以往更有系統性的區別為例，來說明數學史對數學教育的貢獻。十九世紀在科學與在社會中同樣都有重要且深層的改變。就科學而言，被數學化了的經驗科學理論逐漸邁出力學，並向其它領域伸出觸角，如熱的解析、電學等理論，因而使得科學家、哲學家對於數學進入經驗物理世界的情形感到疑惑，他們懷疑數學有可能使經驗世界更加複雜。這使得當時許多數學家如 Lagrange 和 Monge 有好幾年不作數學。這一方面是由於整個十八世紀認為數學的實體就是一些“量”的概念，因而假設了整個經驗物理世界的內容是“類量的”(quantity-like)之後，也就同時假設了對現實世界作數學分析的可行性。但是在科學逐步向熱力學、電學等能量問題研究討論之時，數學是否能再如往昔般對科學作出偉大貢獻，自然要受到懷疑了。不過這同時也讓數學家嘗試去定義量以及數學的本質。於是到了十八世紀末十九世紀初，數學家便發展出新的數學定義，把數學看作是一種討論連結關係 (relation) 的理論。人們進而相信，能將實體世界或科學世界數學化的先決條件，是事物之間有某種關係存在，而不是事物本身。這樣的關係理論並不需要預先假設有量

的概念，數學家放棄了數學為“量的理論”的想法，進而使關係理論成為數學的核心；在這種架構下，函數成為數學研究的重心。據此，如果有人在初等教育中，將集合論、函數等討論關係的理論作為教導學生數學概念的基礎，並以為在數學上最發達最基層的概念，對學生而言也是最簡單的，那麼，從歷史的發展來看，這是完全錯誤的，Jahnke認為我們應該以歷史為師，先發展量的概念、強调度量的問題，從算術數量之間與函數等的緊密關聯著手，進一步認識到關係理論是數學概念了解的核心，才是正確妥當之途。

除了 ICME 這個組織的大力呼籲之外，國際上也有其它的會議、研究組織以及研究論文關心此一主題。1982年4月15日，NCTM 在加拿大多倫多所舉行第60屆年會，ISGHPM(註五)即在數學史與數學教育之關聯這一主題上安排了一個討論會，並發表了五篇論文。此外，ISGHPM 還繼續在1983年 NCTM 於底特律舉行的年會中，就此主題再一次討論如何在教學中發展歷史材料等問題。

我們另一方面也可以在國際性的數學史雜誌 *Historia Mathematica* 中感受到這樣的趨勢。此雜誌設有“教育”一欄，刊登有關數學史課程計劃、數學教育中歷史的應用以及數學教師會議的一些歷史研究活動。例如1984年以色列的 A. Arcavi和 Bruckheimer 在“為老師準備的數學史材料的發展與評價”，即談到其 Weizmann科學機構的科學教育部門，正在為職前與在職老師發展有關於中學數學課程的數學史教材；Marcia

Ascher 的“非西方文化的數學概念”，提醒我們注意到數學在不同的人類文化生活中所扮演的不同角色，將有助於擴展學生對數學的認識。如1987年8月在日本舉行的國際數學之歷史與教育研討會，有來自美國、巴西、法國、印度、中國大陸、韓國等14位學者與日本境內60位學者參與。與會學者除了對數學史作學術上的演講之外，還有第四部份“數學史與數學教育”的討論，包括了 Masami Isoda 的“在數學化的學習過程中利用數學史”(Using History of Mathematics for Mathematization in the Learning Process) 等七篇論文。1988年7月份在挪威舉行的數學史工作小組會議，更將整個重點放在如何展現透過歷史材料的應用以改進數學教學上面，根據 *Historia Mathematica* 所刊的與會學者與論文名稱，包括有美國的 Frank Swetz、Abe Shenitzer，以及香港的蕭文強等22位學者所發表的30篇文章，顯現了此一主題討論的盛況(註六)。

綜合上述我們不難理解，1984年於澳大利亞舉行的 ICME 國際會議，會以連續四個討論會向教育學者們介紹此一理念。第一個討論會是由 George Booker 所主持，並提出在教室中使用數學史的建議大綱，以及在澳大利亞使用過的一些例子和反應。會中認為：學生會發展那些令他們感興趣的數學問題，因此應把焦點集中在數學的思考過程上，而非數學家們想法的結果。第二個討論會則由以色列的 Rina Hershowitz 和法國的 Amy Dahan 所帶領，探討能為教師及資賦優異學生所使用的數學史，借助歷史將

數學理論與數學發現聯結起來。在這種論點確定之後，討論的重點即應集中在數學史的哪些東西可以達到這個目的。因此第三個討論會即由 Dahan, C. Borowczyk 及義大利的 Lucia Greuquetti 提出適合於中學生的歷史材料。他們認為所謂的“歷史取向”或“發現取向”(discovery approach) 的教學方法，即強調數學學習應是一種建構性的步驟，而非僅是數學的發現結果。這種建構性的引導可使學生對概念更加清楚，因此數學史進入數學教學中是有其價值的。第四個討論會則由美國的 Florence Fasanelli 為主席，探討藝術 (art) 與數學歷史之間的相互作用。

1991年6月份的數學教育期刊《For the Learning of Mathematics》，由 John Fauvel 編輯了一冊討論數學教育中數學史應用的專刊，更可以看出這種結合歷史與教學的作法，已經獲得數學教育界的普遍重視。數學的歷史之所以能應用在數學教育上，除了數學史在數學教育關注到文化層面上有絕對的助益(註七)，或是其它人所認為可以提高學生對學習數學的興趣之外，數學史也在數學教育理論的研究上發揮了作用。

在 ICMI 的分支機構——國際數學教育心理學研究小組 (PME)——的研究報告《數學與認知》(Mathematics and Cognition) 一書裡，認為研究的任務在於發掘教師與學生內在的不同的數學認識，以及兩者之間的鴻溝應該如何去除，使學習者能從某一舊觀點轉變到另一新觀點。他們認為數學的學習應該採建構的方式，而數學概念算法與證明的發展過程，則是與此種建構方式平行的：

從數學知識發展中個體與歷史過程的交互研究，我們可以獲得許多益處。對過去數學家所曾遭受過的阻礙之研究，幫助我們解釋今日學生所犯的錯誤；反過來，研究學生的錯誤困難與不當的概念化，則有助於我們對數學史的了解 (Nesher & Kilpatrick, 1990, p.16)。

透過這樣的想法，數學史在數學教育上有了導引的作用，成為數學教育理論研究的起點與方針。在同一本書中 Cardyn Kieran 的“代數學習的認知過程”(Cognitive Processes Involved in Learning School Algebra)，或是 NCTM 於 1989年出版的《代數之學習與教學》，都出現了藉由代數的發展歷史以區別學生對代數的認知程度的情形。如 Kieran 將代數的認知過程分為三個階段：

- (1) 文辭代數階段 (rhetorical stage)，即 Diophantos(A.D.250) 之前，主要特徵是使用一般的語言敘述一些特殊問題的解決法，缺乏對“未知數”的符號或特殊記號的使用。
- (2) 簡字代數 (syncopated algebra)，從 Diophantos 用縮寫來表示未知量，到 16世紀末。
- (3) 符號代數 (symbolic algebra)，由 Vieta 使用字母來替代給定量開始。這時候表達一般的解法成為可能，代數的使用被作為是證明支配數字關係之規則的一種工具。

Gerard Vergnaud 也談到:

今日數學所呈現的結構性與敘述性的面貌,是歷史長久發展的結果。學生總是會經歷相同的主要概念上的困難,而且它們也必須克服那些數學家所曾經遭遇過的、同樣的認識上的阻礙。(Nesher & Kilpatrick eds., 1990, p.97)。

這些事實,正足以說明了數學概念的發展歷史在數學教育研究上有著廣泛而深刻的影響與助益。

在國際數學教育界滿溢著數學史的氣氛之下,反觀國內的數學教育界對這樣的認識仍顯得極為缺乏,須要有更多的人對這樣的趨勢加以了解,並多方研究國外已有的成果以為參考,發展出一套從中國的數學出發且融合西方數學、適合國人的數學教育方式,相信是今後國內數學教育中一塊值得努力耕耘的沃土!

註解:

註一:筆者的碩士論文,即在於探討此一可能。

註二:有別於過去以培養科學科技人才、從教師的角度去評判學生對錯的數學教育。

註三:即International Commission on Mathematical Education 的簡稱。

註四:NCTM 為 National Council of Teachers of Mathematics 即美國中學數學教師協會的簡稱。

註五:為International Study Group of History and Pedagogy of Mathematics 的簡稱,此為一非正式團體,其目的在鼓勵世

界各國關心數學教育的人能在數學教育中利用數學史來激發學生的興趣,鼓勵學生欣賞數學的自然及其在文化發展中所扮演的角色。

註六:此會議記錄已出版。見(Swetz, 1992)。

註七:在Bishop 的“文化與數學課程”一文中有一詳細的說明。

參考書目:

1. 楊淑芬 《從皮亞傑的認識論談數學史與數學教育的關聯》, 碩士論文, 師大數學研究所, 1992。
2. 蕭文強 “數學發展史給我們的啓發,” 《抖擻》, 第17卷 (1976), 46-53.
3. Arcavi, A. & M. Bruckheimer, “Development and Evaluation of Materials on the History of Mathematics for Teachers,” *Historia Mathematica*, Vol.11, No.2, 1984, 232.
4. Ascher, Marcia “Mathematical Ideas in Non Western Cultures,” *Historia Mathematica*, Vol.11, No.1, 1984, 76-80.
5. Athen, Hermann & Heinz Kunle 《Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education》, Karlsruhe: the Organizing Committee of the Third International Congress on Mathematical Education, University of Karlsruhe, 1977.
6. Bekken, Otto B. & Bengt Johanson “History of Mathematics,” *Historia Mathematica*, Vol.16, No.1, 1989, 90-92.
7. Bishop, Alan J. “文化與數學課程”, 《科學教育月刊》, 第144期, 1991, 2-18.

8. Booker, George “International Study Group for the Relationship between the History and Pedagogy of Mathematics (HPM),” *Historia Mathematica*, Vol. 13, No.2, 1986, 184-190.
9. Fauvel, John (ed) «For the Learning of Mathematics», Vol.11, no.2, 1991, (這是一份討論數學史與數學教學的專刊).
10. Howson, A. G. «Developments in Mathematical Education — Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education », Cambridge, London: Cambridge University Press, 1973.
11. ICME-6 Report “Psychology of Mathematics Education ,” *For the Learning of Mathematics*, Vol.9, No.3, 1989, 43-44.
12. Jones, Phillip S. “The History of Mathematics as a Teaching Tool” in A. E. Hallerberg et al (eds), «Historical topics for the mathematics classroom» 31st yearbook of NCTM. Washington D. C.: NCTM, 1976.
13. Klein, Felix «Elementary Mathematics from an advanced standpoint : Arithmetic. Algebra. Analysis. », New York: Dover Publication, 1945.
14. Michiwaki, Yoshimasa “The International Symposium on the History and Education of Mathematics Using Chinese Characters (ISHEM),” *Historia Mathematica*, Vol.15, No.3, 1988, 278-280.
15. Nesher, Pearla & Jeremy Kilpatrick (eds) «Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education», Cambridge, London: Cambridge University Press, 1990.
16. Poincaré, Henri «The Foundations of Science : science and hypothesis, the value of science, science and method», Lancaster, PA.: The Science Press, 1946.
17. Rogers, Leo “History of Mathematics at Teachers Conferences in England, Exeter 1974,” *Historia Mathematica*, Vol. 1, No.1, 1974, 325-326.
18. Rota, Gian-Carlo ed. «George Polya: Collected Papers Volume IV : Probability; Combinatorics; Teaching and Learning in Mathematics», 1984.
19. Swetz, Frank eds., «Learn from the Masters!», The Pennsylvania State University, 1992.
20. Wagner, Sigrid & Carolyn Kieran (eds), « Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra», Virginia: NCTM, 1989.
21. Zweng, Marilyn et al eds. « Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education», Boston: Birkhauser, 1983.