

數學史與近代中國數學教育

張祖貴

中國是一個注重歷史的國度。在近代中國的數學教育中，數學史發揮了重要的作用。通過剖析 19 世紀下半葉至 20 世紀 20 年代數學史（主要是西方數學史）在中國傳播的歷程，我們可以看到，數學史在一定程度上破除了“西學中源”說，為中國人正確、全面認識數學開闢了道路，促進了近代中國的數學教育，並因而推動了中算史的現代研究。

在近代中國數學教育中，數學史是一個重要的有機組成部分。甚至在 20 世紀初葉，數學史還是數學系的必修課程之一。因此，了解近代中國數學教育中數學史的地位和作用，對於今天數學教育中加強數學史的教學和研究，無疑地將提供十分難得的歷史借鑒。

一、數學史在中國傳播肇始

與今日大多數數學教科書、數學著作字斟句酌的只按照定義、定理、例題、練習的方式敘述數學知識，全然不涉及數學歷史的做法相反。在近代中國數學傳播的過程中，從一開始，數學史就受到了高度重視。

1857 年，我國清代數學家李善蘭和英國人偉烈亞力合譯（續利瑪竇、徐光啓未竟之業）的《幾合原本》出版，這是近代數學傳播

的肇始。在這部著作中，偉烈亞力所做之序首先就概述了幾何學之發展簡史：

“幾何之學，不知託始何國。或云埃及，或云巴比倫。博考之士稱其造自天竺，迄無定論。今所傳最古者，周定王時他勒 [1] 著是學於希臘。景王時閉他臥刺 [2] 修明其術，元王時依卜加造作諸題，始有成書，皆幾何法也。顯王赧王時，有歐幾里得者。不知何許人傳是學亞力山太，述樂律算數等書，尤著名者曰《幾何原本》，較昔術尤精。後人宗之，莫可訾議。故歐幾里得之《幾何原本》獨為完書。當是時，埃及國王多祿某問曰：“幾何之法，更有捷徑否？”對曰：“夫幾何若大路，然王安所得獨闢一途也？”自此方輿之內，翻譯是書者，亞於《新舊約全書》。”

在這一簡短的歷史介紹中，偉烈亞力講述了西方幾何史上著名的“幾何無王者之道”的傳說，並且介紹了《幾何原本》是僅次於《新舊約全書》（《聖經》）的廣為流傳的文化典籍。這對於幾何學在中國的傳播、教育起了積極的影響。而且，上述史實（有些是歷史傳說）後來還融匯於中國文化之中了，對中國人學習數學、理解數學發揮了一定的作用。

在近代，中國數學家及西方學者、傳教士在傳播數學的同時，十分注重傳播數學史，

並且將其視為數學的重要組成部分。19世紀下半葉翻譯的數學著作，主要是用來作為教科書的，可見當時的數學家（同時大都是數學教育家）已經自覺地將數學教育與數學史有機地結合起來，使數學史融入數學教育之中。

在李善蘭、偉烈亞力合譯之《代數學》（出版於1859年）中，偉烈亞力在所做序中介紹了初等代數學之歷史：

“今略述其源流。其創自何國何人，莫可考已。當中國六朝時，希臘有丟番都者傳其法，但用數不用記號，而天竺已先有之，且精於丟氏，能推一次二次式，並有求一法，甚駭備，幾與秦九韶大衍術相埒。波期天方皆傳其法，而精不逮焉。及元時，以大利 [3] 薄那洗，學自天方，以傳於其國，歷三百年，習者寥寥，至明嘉靖萬歷間，思鐵法利以其法傳於日爾曼、白勒得利傳於法蘭西，立可傳於英國，由是其學漸盛。初天竺代未知數用五色名，波斯天方，則各用方言之物字，其傳入歐羅巴也，以大利、英國，仍用物字，故即名物術云。是時惟未知數用字代，已知數皆用本數。至肥乙大 [4] 始盡以字代，是為今代數術之始。

厥後學者，精益求精，創為方程式，即借根方之相等法也。即而佳但 [5] 造三次式，佛拉利造四次式，代加德 [6] 造指數，而用益便。至奈端 [7] 造合名法，而登峰造極矣。當借根方入中國時，西國於此術尚未深焉，殆不及天元四元，而今能如此精絕者，豈非好學之效哉。”

在這一段歷史敘述中，偉烈亞力有意識地將中國與西方進行比較，指出西方之代數學在19世紀能精深，實乃“好學之效”，這

無疑能由歷史之發展而引起後學者奮而向上。教育之意義，由此可見。

《代微積拾級》是李善蘭、偉烈亞力翻譯的我國第一本微積分學的漢譯本（1859年出版）。在漢譯本序中，偉烈亞力比較詳細地敘述了從幾何學到微積分思想的發展源流，並對微積分的實質進行了剖析，對於初學者來說，這無疑是入門的十分恰當的先導。

“幾何之學，自歐幾里得至今，專門名家，代不乏人。粵在古昔，希臘最究心此學。爾時以圓錐曲線之理為最精深。亞奇默德 [8] 而後，其學日進。至法蘭西代加德，立縱橫二軸線，推曲線內諸點距軸遠近。自有此法，而凡曲線無不可推。故曲線之數，多至無窮，而以直線為限，一例用曲線之法馭之。既得諸曲線，依代數理推之，可得諸平面、諸曲面、諸體，其已推定之曲線，略舉其目：曰平圓線、橢圓線、雙線、拋物線、半立方拋物線、薛荔葉線、蚌線、擺線、餘擺線、和音線、次擺線、弦切諸線、指數線、對數線、亞奇默德螺線、對數螺線、等角螺線、交互螺線、兩端懸線、葛而尼諸橢圓線、平行動線。而圓錐諸曲線與他曲線，統歸一例，無或少異。此代數幾何學 [9] 也。自有代數幾何，而微分學之用益大。

微分學，非一時一國一人所作。其源流遠矣。數學有數求數，代數無數求數，然所推皆常數。微分能推一切變數。創法者不一家，理同而術異。來本之 [10] 者，日爾曼人也，立界說曰：以小至無窮之點，積至無窮多，推其幾何，名為推無窮小點法。難者曰：無窮小之點雖積之無窮，不能成幾何。解之曰：但易無窮小為任何小，即有積可推矣。故其說雖若難解，而其理未始不合也。

而英國奈端造首末比例法，不用無窮小之長數，乃用有窮最小長數之比例，而推其漸損之限，其幾何變大，則為末限；變小，則為首限。此法便於幾何而不便於代數。後造流數術棄不用。而謂萬物皆自變，其變皆有速率，凡幾何俱可用直線顯之，故速率之增損，可用直線之界顯之。此說學者皆宗之。”

這一段概述了解析幾何發展史，並重點分析了微積分創始人萊布尼茨、牛頓兩人微積分思想的差異，這樣一來，初學者就對這門學科之必要性有了充分認識。隨後，偉烈亞力又敘述了牛頓之後微積分的發展歷史：

“嘉慶末，法蘭西特浪勃 [11] 造限法，自云不過用奈端首末比例耳。而蘭頓別創新法，凡微分一憑代數，不云任近限而云已得限，名曰賸理。拉格浪 [12] 亦造法，多依附戴老 [13] 之理，大略與蘭頓同。”

如此眾多的流派，微積分到底是怎麼一回事。人們學習這一門學科當以哪一種流派為標準？偉烈亞力闡述微積分的歷史，其目的就在於為學習者提供背景知識，了解數學發展的真正面目，數學創造過程中的挫折、數學家所經歷的艱苦漫長的道路，從而更好地學習這一重要的數學內容。於是，他接著揭示微積分的實質，並闡述當時所採用的微積分符號之歷史緣由：

“總論之，微分不過求變幾何最小變率之較耳。家數雖多，理實一焉。奈端來本之，同時各精思造法，未嘗相謀相師也。奈端於元上加點以顯流數，如甲為之流數，是也。用以推算，覺不便。故用來氏之彳號以顯之。積分者，合無數微分之積也，亦用來氏之禾號以顯之。”

在介紹了歷史發展之後，偉烈亞力又指出微積分與中國數學的關係，以及他與李善蘭翻譯此書之必要性。

“微分積分，為中土算書所未有。然觀當代天算家，如董方立氏、項梅侶氏、徐君青氏、戴鄂士氏、顧尚之氏，暨李君秋綬，所著各書其理有甚近微分者。因不用代數式，故或言之甚繁推之甚難。今特偕李君譯此書，為微分積分入門之助。異時中國算學日上，未必非此書實基之也。”

《代微積拾級》之中文譯本出版，距《幾何原本》中文全譯本出版不到二年。當時中國社會（學界）還未全盤吸收、消化《幾何原本》。因此，在《代微積拾級》中較全面、系統地概述微積分發展史，對於數學教育有極大的益處。而且，譯者希望是書能推動中國數學之發展。李善蘭在為該書所作之序中，也談到了牛頓、萊布尼茨創立微積分之事：“我朝康熙時，西國來本之奈端二家又創立微積分。”

在 19 世紀下半期翻譯之西方數學書籍中，論述發展史最詳備者，當推中國數學家華蘅芳與英國人傅蘭雅翻譯的《決疑數學》，現有光緒二十三年（1897）上海格致書室發售的四冊中文譯本。這是中國第一部介紹概率論的著作。該書首卷專述概率論發展史，從 17 世紀巴斯卡（B. Pascal）開始，一直講到 19 世紀的棣麼甘（A. De Morgan），詳細敘述了每一歷史階段概率論發展的問題、理論及取得的具體成果，幾乎概括了全書的主要內容。堪稱我國第一部完備的數學分支史 [14]。

縱觀 19 世紀末 20 世紀初之大多數數學著作，幾乎全都理所當然地將數學史作為其

組成部分。當時傳入中國的代數、幾何、解析幾何、微積分、概率論等主要數學領域，其發展歷史全都列入所譯、所編教科書中。實際上，當時的數學著作（尤其是流傳較廣者）主要是用做教材，因此，在數學著作中強調數學史，其目的就是為了數學教育。

對於數學史在數學教育中的作用，1903年江楚書局刊印的徐虎臣所編之《溥通新代數》進行了明確地闡述。這部著作是徐虎臣根據美國、日本流行的代數學課本改編而成的。完全按照教材體例編纂，例題、習題一應俱全。徐虎臣首先在序言中闡述了代數學發展史，長達二千餘字。較之李善蘭、偉烈亞力在《代數學》中所敘述的要完整得多，不僅勾勒了初等代數學史，而且一直談到了群論的產生歷史，“瑞西之尤拉 [15]、日耳曼之戈士 [16]、那威之阿拜爾 [17]等之諸大家興起，此學（指代數學）益進。”徐虎臣在序之最後明確地提到了數學史在數學教育中之目的，就是激發學生的熱情與刻苦精神：

“憶薄氏從天竺傳此學時能至今日之程度，亦思想所不及。所以得如此之精者，賴先輩好學之效。惟希後之學者懷先輩之功勞，益求精密，而更進此學於高深之域，庶不負前人之心力也。”

此外，《六合叢談》、《中西閒見錄》等刊物上也發表了一系列數學史文章，豐富了中國人的數學史知識。

二、數學史傳播與數學教育之勃興

在近代中國歷史上，從洋務派開始的衆多有識之士都把大力發展科學技術作為富國強兵的主要手段，作為科學技術基礎的數學亦因此受到了高度重視。可以說，在世界數學史上，像我國清末洋務運動時期把數學、數學教育作為振興國家的根本的做法，實乃絕無僅有。數學教育在中國成了人們非常關注的一個方面。我們只要提及設立天文算學館之爭在朝野引起的巨大反響，以及在從鴉片戰爭至宣統末年這一時期所翻譯的西方科技書籍中，數學書籍占三分之一，就足以說明數學教育在近代中國的地位。其所以如此，一個很重要的方面是由於數學史的廣泛傳播。

客觀的數學史的傳播，反對了曾經在中國社會占統治地位的“西學中源說”，使中國人得以衝破夜郎自大的自我束縛，公正地了解數學發展的歷史及現狀，從而加強了具有奮發向上思想的中國人的使命感，使人們認識到加強數學教育的必要性和緊迫感。我們看到，偉烈亞力，傅蘭雅在他們所撰寫的介紹各門學科發展史的序文中，絲毫不受“西學中源”說左右。除此之外，其他一些中外數學家也堅持客觀地述說歷史，如艾約瑟在《中西閒見錄》發表了《希臘數學考》、《阿爾熱巴喇源流考》、《阿爾熱巴喇源流附考》等一系列數學史文章，丁韞良等人也發表了一些關於科學技術源流的文章，堅決反對牽強附會的“西學中源”說。這些工作，使中國人開始具有世界眼光，1889年，洋務派首領李鴻章就認為“西學格致，始於希臘阿盧力士托爾德 [18]，至英人貝根 [19] 出，盡變前說，其學始精。”客觀地認識歷史，使人們提高了對數學（包括科

學技術)的重視。曾國藩、李鴻章正是在看到了中國數學落後的現實，才鼎力支持李善蘭刻印《幾何原本》等西方數學著作。李善蘭道出了他們這一批人的緊迫心情，“嗚呼！今歐羅巴各國日益強盛，為中國邊患。推原其故，製器精也。推原製器之精，算數明也。曾、李二公有見於此，亟以此（指《幾何原本》等）付梓。上好之，下必有甚焉者。異日人人習算製器日精，以威海外各國，令震攝奉朝貢。”

西方數學史的傳播，使中國人深切地瞭解到了數學的巨大作用，這是數學史對中國學術界乃至中國社會的巨大影響。其實，利瑪竇早在寫於明末的《譯幾何原本引》中，就闡述了幾何學在西方社會發展中的巨大威力，但未引起國人重視。直到19世紀鴉片戰爭後，中國人看到西方砲利船堅，追根溯源，終於知曉了數學的作用。於是，力主在中國大力推行數學教育，以圖從根本上改變中國落後狀況。

1861年馮桂芬在《采西學議》中就強調指出：“一切西學皆以算學出，西人十歲外無人不學算。今欲采西學，自不可不學算，或師西人，或師內地之知算者俱可。”學算即進行數學教育，在當時已成為不少關注的重要問題。洋務派首領從數學史中了解到數學的重要性，因此對數學教育十分關注。曾國藩告誡自己的兒子一定要好好學習天算。他不止一次地說過：“余生平有三恥……天文、算學，毫無所知，……。爾若為克家之子，當思雪此三恥。”奕訢在1866年12月11日請設立天文算學館的奏折中，更是明確地提出了進行數學教育的重要性及具體辦法：“因思洋人製造機器、火器等件，以及行船、行軍、無一不自天

文、算學中來。……現擬添設一館……延聘西人在館教習，務期天文、算學，均能洞徹根源，斯道成於上，即藝成於下，數年之後，必有成效。……誠以進取之途，一經推廣，必有奇技異能之士出乎其中。華人之智巧聰明不在西人以下，舉凡推算格致之理，製器尚象之法，鉤河摘洛之方，尚能專精務實，盡得其妙，則中國自強之道在矣。”經過奕訢等人的努力，天文算學館終於成立了，中國近代數學教育掀開了一頁。以後，在上海廣方言館，廣州同文館，以及一些專門學堂如福建船政學堂、天津北洋水師學堂、廣東水陸師學堂、南京礦務學堂等學校中，都陸續開設了數學課。

為了更進一步推動數學教育，1875年洋務派提出了以算學取士的建議，禮部奏請考試算學折中寫道：“同治九年（1871）九月二十七日軍機處片交閩總督英（英桂）、船政大臣沈（沈葆楨）等附片奏稱：水師之強弱，以炮船為宗，炮船之巧拙，以算學為本。西洋炮船愈出愈奇，幾於不可思議，實則由釐毫絲忽積算出來，算積一分，巧逾十倍，故後來居上耳。……臣等再四籌商，合無仰懇開恩，特開算學一科，誘掖而獎進之，使家有其書，人自為學……庶算學不難日益精密矣。”這一建議曾被採納，惜後來效果不佳。

洋務派以數學史，科學技術史為鑒，在各地新建的書院中，強調以算學作為最主要的課程。1895年，傅蘭雅在為新建的上海格致書院所作《格致書院西學課程》中，就引經據典論證洋務派的主張：“諸學以算學為起首功夫，違此則不能進。蓋算學為各學之根本，算學不明，則諸理難解，故不可不先習

也。……算爲中國古學，六藝之中，數居其一。今之科場，亦以考取算學爲重，人亦何憚而不學耶？”數學教育成了洋務學堂之根本。

學習數學史的目的之一，就是啓發人們理解數學是如何的“有用”，如何在歷史中與其他學問互相聯繫 [20]。19世紀中葉以後數學史在中國的傳播，的確起到了這種作用。不僅洋務派創辦的學堂注重數學教學，連舊式書院也紛紛改革，大力加強數學教育。1897年，廣西經古書院在“廣西書院添設算學季課示諭”中就反映了數學史傳播的影響，“照得自強之道，必先作育人才，求才之道，必先推廣學校。中國二十年來，京都同文館、上海廣方言館、格致書院、廣東博學館，皆合中西算學，相與講習討論，皆所以庶政而圖自強也。……公同酌議，擬仿廣東學海堂辦法，於經古書院添設算學一門，課以四季，每季由書院監院稟請撫憲命題考試，問以算數算理天文時務四項，……須知算學爲當時急務。”

當時散佈於全國的各種小書院，歷史上一向以經史詞章爲課業，在新形勢下也覺得必須開設算學課，並且從數學史中爲這種新舉動尋找根據。如地處湖南西北部的常德德山書院在 1897年“改課算學”之告示中寫道：“格致以算學爲體，算學以格致爲用……算學乃實事求是之學，其理法皆確鑿可憑，與術數占侯及太乙壬遁符讖之流，毫不相涉。……算學原有中法西法之分，然法雖殊而理則一，學者取其所長，棄其所短，並習兼攻，毋庸歧視。”其是時也，反對學習西方數學、科學之阻力在全國十分強大，地方書院能夠從數學史中得出中西算學“法雖殊而理則一”的結

論實難能可貴，而且使數學教育得以開展，乃一大進步也。

數學史的傳播，還對維新變法派的思想產生了巨大影響。實際上，康有爲、梁啓超、譚嗣同等仁人志士，所受的數學、科學教育十分有限，應該說在數學、科學水平方面有很大局限，這乃時代之局限。然而，他們對數學、科學技術的社會功用有深刻的洞徹與認識，關鍵就在於，他們從當時傳播的數學史、科學史中吸取了充分的知識，使中國傳統的“以史爲鑒”擴到了包括西方數學史、科學史。康有爲受古希臘哲學思想與數學關係之啓發，曾嘗試利用數學思維方法探討社會政治問題，1885年，他即開始“從事算學，以幾何著《人類公理》”，明確提出“人類平等是幾何公理”，強調“以幾何著《人類公理》，就是要推平等之議。”在他主持的書院、學校中，數學教育受到了高度重視。

譚嗣同爲近代中國數學教育做出了一定貢獻，這突出表現在他創辦湖南瀏陽算學社及其所產生的影響。他正是從對歷史的考察中闡述數學與西方國家發達的關係，從而力主創立專門的數學教育機構。“考西國學校課程，童子就傅，先授以幾何、平三角術，以後由淺入深，循序精進，皆有一定不易之等級。故上自王公大臣，下逮兵農工賈，未有不通算者，即未有通算而不出自學堂者。蓋以西國興盛之本，雖在議院、公會之互相聯絡，互相貫通，而其格致、製造、測地、行海諸學，固無不自測算而得。故無諸學無以致富強，無算學則諸學又靡所附麗，層台寸基，洪波纖受，勢使然也。”因此，他認爲加強數學教育實爲當

務之急，當時他在為湖南謀劃新政，指出，“為今日湖南計，非開礦無以裕商源，非製器無以錫軍政，而開礦、製器等事，隨在於算學相資，故興算一節，非但當世之遠模，抑亦湘省之亟務。”[21] 經過他的努力，湖南瀏陽算學社衝破阻力終於成立了，並且被後人稱為“戊戌變法運動期間湖南維新派的第一個學術團體”。數學教育亦因此而更為廣泛地普及開來。

這樣我們看到，隨著數學史的廣泛傳播，數學的重要性、數學對於富國強兵的迫切性逐漸為人們認識和接受了，因此數學教育得以衝破重重阻力，在一個只注重經史詞章、倫理綱常教育的國度裡占據著教育中越來越重要的位置。這不能不說是數學史傳播的一個極其成功的範例，而且19世紀末的中國數學教育明確地以承繼歷史為宗旨，不少數學教師提出的“收希臘之餘波，揚商高之舊業”口號，就再明顯不過地表明了數學史對數學教育的影響。

正是由於認識到了數學教育的重要性，而且歷史使命感使得全國從京城到地方的諸多書院、學堂都開始了數學教育，因此光緒二十九年所訂之小學、中學、大學學制（癸卯學製制）中，數學教育成了主要教育內容之一。至此數學教育在我國各級學校教育中都占據了一席之地。回顧這一歷程，數學史的作用明顯可見。

在近代數學教育中，注重在數學教材中融入數學史是值得稱道的特色之一。在翻譯的《決疑數學》中，有不少問題的闡述直接源於概率發展史，徐虎臣所編之《溥通新代數》中有不少題目都取材於歷史，在同文館天

文算學館的課本及試題中，以及不少書院、學堂的教材中，中國古算題、世界數學史上的著名問題不時可見，而且介紹一些中外數學大師對數學問題的思考過程。由於數學教育在當時尚屬初創，因此在大多數教材中，歷史的敘述占據了一定的篇幅，這對於教師和學生更好地教與學，都起了較好的促進作用。

三、數學史教學與世界數學史研究

由於數學史受到了人們的廣泛關注，因此在中國近代數學教育中，數學史的教學受到了高度重視。在今天世界數學界、教育界重新認識數學史的教育價值之時，20世紀初中國數學教育中重視數學史的舉動，顯然具有十分重要的歷史意義。

在我國最早設立數學系的北京大學，1917年在當時的數學門（1919年改門為系）的專業課中，就設置了“數學史”這一課程，這是專門為數學門三年級開設的，任課教師為當時北京大學數學教授會主任秦汾 [22]。其後，胡濬濟也講授過數學史 [23]，胡也是北大知名的教授。在正規大學數學系開設數學史課程，反映了在近代中國數學教育中，數學史的確十分受人重視。

隨後，我國著名的數學史家錢寶琮教授在20世紀20-30年代，分別在南開大學、浙江大學也開設過數學史課程，著名數學大師陳省身教授至今仍對錢寶琮的數學史課程印象頗深。在我國其他大學早期的數學教育中，數學史也占有一定的份量，有一些開設了專門的課程。

因此，我們看到，在近代數學教育中，數學史已經從序言中的簡短介紹，成了一門專門課程。正是在這一過程中，數學史的研究也開始受重視。

清末，由北京大學留日學生在日本創辦的綜合性學術刊物《學海》(Oceanus Scientiae)，刊登了一些數學史方面的文章。《學海》分爲甲、乙兩編，甲編爲文史哲類，乙編則包括理、工、農、醫諸科。《學海》(乙編)於光緒三十四年(1909年)正月廿八日在日本發行第壹號，其中景定成撰寫的《數學家列傳》一文中，就介紹了古希臘的諸多數學家，如皮他格拉斯 [24]等。20世紀我國早期知名數學家馮祖荀還是《學海》的創始人之一，他與景定成、季欽等人在該刊物上所發表的一系列文章，大都是從歷史的角度闡明一系列數學問題的來龍去脈。如《三角級數之發現》[25]、《幾何學之基礎》[26]、《算學詭誕》[27]。實際上，該雜誌在傳播、研究科學史方面十分有特色 [28]，如刊登科技史上著名人物的照片，圖文並茂，形象生動。

進入民國後，北京大學、北京高等師範學校等在進行數學史教學的同時，十分注重數學史的研究。這方面的情況，從當時兩校數學雜誌上的文章可見一斑。

北京高等師範學校於1918年創辦了《數理雜誌》，緊接著，北京大學也於1919年創辦了《數理雜誌》。這兩種刊物刊登了不少數學史方面的研究文章，而且注重將數學史研究與數學教育結合起來。在這以前，刊登數學史文章的刊物主要是中國科學社創辦的《科學》雜誌。

上述兩校《數理雜誌》創刊號上，都刊登了圓周率 π 的歷史的研究文章。從兩篇文章的研究風格可以看出，在近代早期的數學教育中，當時的學者已開始自覺地將中國數學發展與世界數學發展結合起來進行研究。北京高等師範學校《數理雜誌》創刊號上刊登的是楊荃駿的《 π 之略史》：“ π 乃希臘字母之一，西文數學書中常用之表圓周率與直徑之比，即吾國古算書中所謂圓周率是也。”該文著重比較了西方研究 π 與中國研究圓周率在歷史上所用方法之區別，並闡述對不同方法的看法。

北京大學《數理雜誌》創刊號上刊登的是齊汝璜的《圓周率考》。該文的目的是“考其沿革，究其法術，一可以知算法之進步，作歷史上之趣談，一可以知算法之由來，俾吾人以研究之術。”全文分爲兩部分，(一)圓周率之略史；(二)圓周率之求法。在第一部分，從《周髀算經》中以周三經一爲率，談到張衡，然後敘述劉徽的開創性工作，又論及劉歆、祖沖之乃至元代趙友欽、明代陳璉謀、方以智，最後以清乾隆時朱小梁“用西人杜美德法(連比例)求至四十位，爲古人所未得者”結束中國圓周率之略史，然後又論述印度、日本在這方面的工作，乃以古巴比倫、羅馬至文化復興，以1870年“復求至七百七位”結束第一部分。概述在不同歷史階段的成就。

對於圓周率之求法，這篇文章指出“分爲二種，一爲幾何法，一爲解析法。”“所謂幾何法者，乃將圓內容外切多邊形，割之又割，求其極限之值耳，故邊愈多，則值愈密也，今只述我國二法，蓋以幾何法求者，法雖殊理則一

也，故西法不贅焉。”重點剖析了劉徽求率法，認為“後齊祖沖之所得密率不過仍襲徽法，割之又割，計算精密耳，未別開新法也。”另著重分析了趙友欽求率法，“與徽法異者，乃由圓內正方形起也”，“故言其法精密也，要之方為數之始，圓為數之終，圓始於方，方終於圓也。”

圓周率之解析法主要分析了西方的發展史。“所謂由解析術求之者，理不外於收斂級數法不外於無窮級數無窮乘積，及無窮連分數也。”其中有 (1) 古累固里法 [29] (Gregory): $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ ，並附帶給出了奈端 (即牛頓 Newton) 求圓周率之級數: $\pi = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots$ 。

(2) 尤拉法 (Euler), $\frac{\pi}{4} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 5} + \frac{1}{2^5 \cdot 5} - \dots) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{3^3 \cdot 5} + \frac{1}{3^5 \cdot 5} - \dots)$

(3) 華里斯法 (Wallis): $\frac{\pi}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} (\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \dots 2m \cdot 2m}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \dots (2m-1)(2m+1)})$

(4) 馬斯氏法 (Machin): $\frac{\pi}{4} = 4(\frac{1}{5} - \frac{1}{5^3 \cdot 3} + \frac{1}{5^5 \cdot 5} - \dots) - (\frac{1}{239} - \frac{1}{239^3 \cdot 3} + \frac{1}{239^5 \cdot 5} - \dots)$, (5) 介紹了19世紀常用的一種方法: $\frac{\pi}{4} = 2\arctg\frac{1}{5} + \arctg\frac{1}{7} = 2\arctg\frac{1}{8}$ 。最後還介紹了一首法文詩，借助該詩可以記住小數點後近三十位。

北京大學《數理雜誌》刊登的數學史方面的文章，比較重要的有《世界上最重要的數學會》和《萬國數學會議》，這兩篇文章系根據米勒 (G. A. Miller) 的《數學文獻歷史導

論》(Historical Introduction to Mathematical Literature) 改寫而成 [30]。《世界上最重要的數學會》所介紹的“是世界各國重要的數學會，實在都可以叫為各國的國家數學會 … 這些重要的數學會，多在前世紀 (19世紀) 的後半段出現於世，各有定期的刊物。他們的會員，已然都是數學很高深的人，所以他們的會誌，非特名為出產他那一國的數學雜誌的領袖，對於數學藝文 (Mathematical Literature) 的發達，亦很有重要的關係。”文章對所介紹之重要數學會的歷史沿革、特徵做了闡述、並進行了一些評論，如指出“法蘭西數學會的會報和倫敦數學會的會報，都贈於會員，不另收費 … 這件事情，是近世數學會重大的益處，因為人民數學的智慧 (Mathematical Intelligence)，得這些會報的培養，實在增進不少。”在該文結尾，用列表的方式介紹了英國、法蘭西、蘇格蘭、意大利、美國、日爾曼、印度、西班牙等國數學會的基本概況。

《萬國數學會議》一文主要介紹了國際數學會議的早期歷史，尤其是介紹了國際數學會議早期演變的歷史：“十九世紀快完的時候，國際的數學會議又出現。現在世人公認的第一次萬國數學會議，乃在1897年，舉行於瑞士 Zürich。在這個會議以前的數學會議，至少亦有兩個。第一個是 Congrès International de bibliographie des Sciences Mathématiques，於1889年7月舉行於法國巴黎，第二個是 International Mathematical Congress，於1893年舉行於美國芝加哥，然現在世人大多數都公認於1897年舉

行於 Zürich 的為第一次萬國數學會議。”這兩次不屬於現今國際數學會議系列的國際性數學會議，是數學史上的重要事件。接著，該文詳細介紹了至第一次世界大戰結束時的國際數學會議的概況，指出會議的目的為 (1) 增進各國數學家個人的關係；(2) 考察現在數學各科的現狀，解決各種特別重要問題；(3) 審定下次會議計劃和組織；(4) 討論名詞和書目提要等事。這篇文章還介紹了成立於1908年的國際數學教授會“萬國數學教授會 International Commission on the Teaching of Mathematics”，其中 F. Klein, H. Felhr, G. Greenhill 為主任委員 (Central Committee)，後來又增補了美國的 D. E. Smith, 意大利的 G. Castelnuovo, 奧地利 (時稱奧匈帝國) 的 E. Czuber, 以及法國的 J. Hadamard, “這個教授會，起初本限於初等數學，後來乃把一切數學的教授，都包括在他的範圍裡。”顯然，這篇文章在介紹國際數學會議的歷史時，將數學教育放在了一個較重要的位置。文末，列出了直到該文寫作時的1919年為止所召開的國際數學會議簡況 (地點、日期、參會人數以及赴會國家數。)

在20世紀早期，北京大學《數理雜誌》就十分注重數學史在數學教育中的作用 [31]。不少文章在闡述問題之前先追溯歷史，如《一次有向量函數》一文，一開始就簡述向量分析之歷史 [32]，“蓋自19世紀中葉，哈密爾頓 (Hamilton) 之四原法 (quaternion) 及蓋拉司孟 (Grassmann) 之諸原 (Ausdehnungslehre) 發現後，有向量解析之基本始實，後經黑韋西特 (Heaviside)、邁克威爾

(Maxwell) 等，相繼研究，至極勃氏 (Gibbs) 於1881-1884年發表論文 Elements of Vector Analysis (《向量分析原理》)，於是有向量解析法，成為極完備而有系統之科學系。”

北京高等師範學校《數理雜誌》中的數學史內容更多，而且與數學教育結合得更緊 [33]。在創刊上就有三篇數學史文章。除此之外，這一期的《近世幾何之特色》(作者：孟廣照) 及雜記中也大量地講述了歷史，並且與數學教育聯繫得很緊。在第一卷第二期，刊登了《胡雪琴先生演講西洋幾何學略史筆記》，講述幾何學“起源於埃及，後漸傳至希臘羅馬等處。蓋埃及古時方尖塔 (金字塔) 等之建築，已有應用幾何處矣。”後又論及射影幾何、非歐幾何之歷史直至19世紀末，並以幾何發展史鼓勵學生：「幾何歷史約屬於此。至將來歷史，則鄙人不能不有望於諸君也。」其教育目的非常明確。這一期刊登的《高斯 (Gauss) 略史》[34] 一文，對高斯的生平，貢獻都給出了生動的介紹：「高斯為德國數學名家……其生平著作等身……高氏嘗曰：數學為科學之母，而算術為數學之母。」這可能是高斯這一名言在中國的最早出處。該文寫道：「高氏意志堅強，性質特異。寡言質，善嘔氣，有時自覺尊嚴，有時則如幼童之天真漫爛！」

北京高師《數理雜誌》還對數學史上的許多具體問題進行了探討，如《幾何學上三大問題之歸宿》[35]、《代數記號之變遷》[36] 等。這表明數學史在數學教育中已進入較深層次。

武昌高師創辦於1918年的《數理學會雜誌》，創辦於1922年的《數理化雜誌》，南

京高師創辦於1922年的《數理化雜誌》，南京東南大學創辦於1922年的《數理化》等刊物，都注重為數學教育提供數學史的背景知識。

四、數學教育與中算史研究

在中國近代數學教育中，由於注重在數學教育中融入數學史的內容，因此在一定程度上促進了現代中算史研究。偉烈亞力在中國傳播西方數學史的同時，曾在《中國算術科學摘記》等文章中向歐洲人介紹了中國的大衍求一術等數學成就。自從中國的有識之士意識到“西學中源”之類的數學史研究行不通之後，一批中國學者擺脫消極地沉陷在中國古算書中的傳統，開始在現代世界數學歷史及現狀的氛圍中，客觀地審視、整理中國傳統數學。他們利用世界數學的知識，結合世界數學發展史，用現代數學的符號表示中國古代神秘、奇妙的算式，將中國古代晦澀難解的數學思想進行注釋、研究，使中國古代數學瑰寶重放異彩。1908年江蘇高等學堂創辦的《數理化月誌》，1912年崔朝慶創辦的《數學雜誌》等都在中算史研究方面做了不少工作。1915年中國科學社創辦的《科學》雜誌，在一定程度上可以說發表了一批標誌著現代中算史研究肇始的文章。《學藝》等雜誌，也成了發表中算史研究成果的重要刊物。與此同時，20世紀初的中算史研究，在一定程度上與數學教育有很密切的關係。從中，我們不難找到數學史與數學教育關係中值得借鑒的材料。

北京大學《數學雜誌》第三卷第一期[37]（1921年3月號）開闢了《科學舊聞》欄目[38]，並在導言中提出了研究中國古代科

技史的意義、目的及方法：“中國學術思想之發達，以周秦為最。當是時也，百家騰躍，辨士縱橫，或聘談天雕龍之辭，或挾飛鉗轉丸之術，莫不爭光鬻采，務競新奇，其立言，間亦有具近今科學之概念者。惜其言論踳駁，不能成有系統之研究，而後淺陋陋小儒，後自之為異學，群鄙夷而不屑道，致使今日物質文明界中此東方開化最古之邦，反闐無光采，不亦重可感耶。

本雜誌有見於此，特於數理叢談內，另闢科學舊聞一欄，專取周秦諸子，及他代名家，凡與近今科學相發明之學說，條舉如次。且更以科學方法，略加詮譯。在作者本立意多方，今僅以一隅自賞，續貂之誚，在所難辭，然仁者見仁，智者見智，斷章取義，何傷大雅，是則一鱗一爪，或可供搜輯中國思想史者之一助云爾。”

在該期的《科學舊聞》中，對《莊子·天下篇》中的六個命題進行了闡釋：(1) “今日適越而昔來”；(2) “我知天下之中央，燕之北越之南是也”；(3) “飛鳥之景，未嘗動也”；(4) “乾不輾地” (5) “鏃矢雖疾，而有不行不止之時”；(6) “一尺之棰，日取其半，萬世不竭”。前三個命題係從物理學原理給出了闡釋（署名“品疑”），對後三個命題，則從數學角度進行了發揮。關於(4)，文章（署名“剛森”）寫道，“設想地為一平面，輪為垂直於此平面之圓，依幾何學之定理，則此二者相切於一點，即輪與地無論何時只有一點相接觸，點之度量（Dimension）為零，即無有長短、廣狹、厚薄。故輪未嘗輾地，所成之轍，為其切點之軌跡（Locus）而已”；對(5)則利用導數、瞬

時速度的概念給出了解釋；針對第6命題，利用了數列 $\{\frac{1}{2^n}\}$ 之極限理論，與今日中國之微積分教科書同，並且舉羅素 (B. Russell) 《函數之極限與連續》一章中之一例，印證該命題：“設有一吋長之線，二等分之，再二等分其半，以此逆推，而無限小數，終不可得。”

現代中等史研究的奠基者——“南錢北李”——之一的錢寶琮教授，從1912-1956年一直從事大學數學教育，在中算史方面的成就舉世公認，堪稱數學史與數學教育融為一體之榜樣。誠如著名數學大師蘇步青教授所評價的那樣 [39]：「寶琮先生經常在課堂上用生動的語言，典型的事例；滿腔熱情地宣講中華民族的悠久歷史和燦爛文明，介紹中國古代輝煌的數學成就，教育學生正確認識我們的偉大的祖國，珍視中華民族優秀文化傳統，鼓勵學生奮發圖強，爭取成為對祖國繁榮昌盛有所貢獻的有用之材。即教書又教人，結合教學培養學生的愛國主義思想，正是他教學工作的一大特色。」從1919年前後開始，他在進數學教學的同時，陸續在《學藝》、《科學》等雜誌上發表了一系列中算史研究論文，數學教育與中算史研究相互促進。

中算史研究的另一位奠基者——“北李”之李儼，20世紀20年代左右時是隴海鐵路局工程師，其時中算史研究尚屬他的業餘工作，似與數學教育全然無關。從1916年左右開始，李儼先生即開始在《科學》、《東方雜誌》等刊物上發表中算史研究論文。然而，確定其學術地位的早期奠基性成名之作《中國數學源流考略》卻發表於《北京大學月刊》，該文之發表過程，從一個側面反映了北京大

學數理學會推動數學教育與中算史研究的努力。

成立於1918年的北京大學數理學會，自覺地以推動數學、數學史研究促進數學教育為主要目的之一。該會重要人物張稔年師從秦汾，對數學史頗有興趣，並進行過一些研究，在主持編輯該會刊物《數理雜誌》過程中力主多登載數學史文章。他與李儼先生正是在這種共同研究志趣的基礎上結為朋友的，他在為李儼這篇重要論文撰寫的《“中國數學源流考略”識語》中講述了兩人“以文會友”的情形：“吾與樂知（即李儼）雖沒見過面，幾天一封信的往還已經兩年，並嘗同他通力合作的抱殘守闕蒐羅中國算籍；曉得他的 是個不可多得的學者。”這一歷史，堪稱中算史研究歷程中的一段佳話。

張稔年非常贊賞李儼的這篇研究論文，當時他正在主辦北京大學《數理雜誌》，該文刊於《數理雜誌》十分合適，但為了擴大該文及李儼的影響，他將該文推薦給了剛剛創辦的、在全國乃至世界更具影響的高級學術刊物《北京大學月刊》。他為發表該文做了很大努力 [40]，並撰寫介紹性文章《“中國數學源流考”略識語》闡述該文的重大學術價值，以及中算史這一研究領域之重要，使當時我國最高學府學者及全國學術界認識中算史研究的意義：「這篇文章是吾友李樂知君簡述他研究中國數學史的結果的。」

中國本土數學，現在是廢了，沒有多人講了。但是要創造將來，不可不察覈過往。……『使數學史成文明史是很容易的』，差不多成了自明之理。十九世紀以來，西土數學史的研

究，一天盛似一天，都為求歷代同現代數學在一般文化上照的影子，指示的東西。中國數學本來也很有所指示。那麼現在雖是把他那種器具擱起來不用了，但是拿他的源流當個鏡子照，卻還值得。(如由數學史知到一種學問，就今起初為實用，若沒有無偏私超脫實際的玄想，必不會大進步。又如從他的史，曉得數學的發達得助於良記號很多，因此推知一個學裡的記號實不是不必須的，應當極力使他精良。這兩層，在中國數學裡就都可得著證明，並是很邏輯的。)

… 近來西人說中國數學，比較著得要，可靠的，有美國斯密教授 (Prof. D. E. Smith)。他那篇短文大體頗精妙，但也不免紕繆數見。日本數學是本著中國的發達的。所以要修和算史，不能不求原於中國。東京學士院囑託三上義夫君就很認中算的價值，顯得極力，時常訂正歐人所述的錯偽，意自可感。不過就在他的書也見著些小差誤。史事本難，而況在今日以他國人說中國學史？曉得這個，吾們自考索，自纂紀，便越覺得不容緩。李君所作對於外人的失實，就很有戡正。他現在這篇雖未能求詳（他另有英文漢文兩種詳史之作），也可算得這方面的破天荒了。」

正是得力於張稔年獨到而中肯的學術評價與舉荐，才使得6萬餘字的《中國數學源流考略》——“第一篇用近代方法、觀點系統闡述中國數學史的著作” [41] ——能夠在《北京大學月刊》上分三期連載：1919年第1卷第4號1-19頁 [42]，1919年第1卷第5號第59-74頁，1920年第1卷第6號第65-94頁。當時，中算史研究的規範、方法及研究水平，學界人

士多漠然不知，因此，對於開闢新研究領域者來說，高水平的學術介紹就顯得十分重要。張稔年正是認識到了這些，才撰寫了《“中國數學考略”識語》一文，刊於李儼文章之後。實際上，為一篇論文專門寫一篇評價文章，在《北京大學月刊》(在其他刊物上也如此)中極其罕見(至多是加“按語”)，尤其是對一位當時名不見經傳的青年人(須知北大是名教授雲集之所)。可見，張稔年已經充分認識並預見到了李儼文章的開創性奠基意義。

不僅如此，張稔年的評價文章本身也具有重要的價值。從上述引文中不難看到，他明確地從理論上闡述了數學史研究的目的、意義，以及研究中算史的學術意義。尤其是他從國際數學史發展的趨勢審視中算史，早在1919年就指出了中算史研究的價值。他所談到的實用與理論發展的關係，以及數學符號的重要性，特別對這兩方面在中國數學裡的特點的體認，值得數學教育領域進行認真的處理。可以看出，張稔年所闡發的數學史研究的價值，其著眼點正是在數學教育，使之對數學發展“有所指示”。

在20世紀早期，在數學教育的同時從事中算史研究，將二者結合起來的學者並不乏人，甚至在一定程度上形成了當時數學界的特色之一。著名數學家、數學教育家傅種孫教授曾撰寫了《大衍(求一術)》，對這一中國古代數學的成就進行了闡釋 [43]，而且這篇表於1918年的中算史論文頗具歷史意義。另一位著名數學教育家鄭之蕃(桐蓀，陳省身之岳父)研究中算史亦頗有心得，曾於20年代在《清華學報》上發表了《四元開方釋要》[44]

一文，對中國古代開方術進行了深入探討。在教授們的影響下，學生中也有人研究中算史，如清華學生周明群在求學期間就寫成了《李邵顧戴徐諸家對於對數之研究》[45]一文，頗受鄭之藩、葉企孫等知名教授賞識。

數學史與近代中國數學教育這一問題揭示了兩方面的意義。從數學社會學角度來看，它促進了中國人對數學重要性的認識，加速了中國的近代數學教育；從文化傳播角度來看，則為在中國普及數學及數學史知識開闢了道路，推進了數學研究尤其是數學史研究的發展。

附註

1. 他勒即指泰勒斯 (Thales)。
2. 閉他臥刺即指畢達哥拉斯 (Pythagoras)。
3. 以大利，即指意大利。
4. 肥乙大，即指弗達 (F. Xiéte)。
5. 佳但，即指卡丹 (G Cardano)。
6. 代加德，即指笛卡爾 (R. Descartes)。
7. 奈端，即指牛頓 (I. Newton)。
8. 亞奇默德，即指阿基米德 (Archimedes)。
9. 代數幾何學，實為今日解析幾何。
10. 來本之，即指萊布尼茨 (G. W. Leibniz)。
11. 特浪勃，即指達朗貝爾 (D' Alembert)。
12. 拉格浪，即指拉格朗日 (Lagrange)。
13. 戴老，即指泰勒 (Toylor)。
14. 這一甚為完整的歷史敘述，我國現代著名的數學史家嚴敦傑教授曾有專文論述：《跋：決疑數學十卷》。嚴教授在這篇文章中詳盡地考證了《決疑數學》中史料部分的歷史來源及數學原理。見《明清數學史論文集》江蘇教育出版社，1990年版，第421-444頁。
15. 尤拉，即指歐拉 (L. Euler)。
16. 戈士，即指高斯 (C. F. Gauss)。
17. 阿拜爾，即指阿貝爾 (N. H. Abel)。
18. 阿盧力士托爾德，即指亞里士多德 (Aristotle)。
19. 貝根，即指培根 (F. Bacon)。
20. 洪萬生，《從李約瑟出發》(九章出版社1985年版)第18頁。
21. 《譚嗣同全集》中之“瀏陽興算記”，“興算學議”，中華書局(北京)，1981年版。
22. 《北京大學日刊》，中華民國六年十一月二十三日第四版。
23. 值得指出，當時在北京大學物理門開設了物理學史(教員為王瑩)，化學門開設了化學史(教員為俞同奎)，任教者均為知名教授。此外哲學門還開設了“科學發達史”，“科學方法論”課程。
24. 皮他格拉斯，即指皆達哥拉斯 (Pythagoras)。
25. 北京大學留日學生編譯社，《學海》(乙編)第壹號。
26. 《學海》(乙編)第貳號、第參號。
27. 《學海》(乙編)第貳號。
28. 如在《學海》(乙編)第貳、參號中連續刊登《石油製造歷史》(史錫綽)等。

29. 現在稱此式為萊布尼茨法。但該文說萊氏“以其法編示歐洲友人言為自己創獲……英國各算學家知為古累固里法，群起而笑之”。
30. 北京大學《數理雜誌》第一卷第二期（1919年4月）第109-113頁。
31. 對物理學史在物理教育中的作用，該雜誌同樣也給予了極大關注。
32. 吳維清，一次有向量函數，載北京大學《數理雜誌》第一卷第二期（1919年4月）第53-60頁。
33. 北京高師《數理雜誌》中數學內容占80-90%之篇幅。
34. 左禮振，高斯（Gauss）略史，載北京高等師範學校《數學雜誌》第一卷第二期（1918）第56-57頁。
35. 徐燦雲，幾何學上三大問題之歸宿，載北京高等師範學校《數理雜誌》第二卷第二期（1919）第61-72頁。
36. 裘友石，代數記號之變遷，載北京高等師範學校《數理雜誌》第三卷第三期（1920年）第54-59頁。
37. 從這一期起，該雜誌改由商務印書館印刷發行。在此之前，該雜誌由北京大學數理學會發行。
38. 北京大學《數理雜誌》第三卷第一期（1921年3月），第102-105頁。
39. 《錢寶琮科學史論文選集》序，科學出版社，1983年版。
40. 該月刊之“編輯略例”中第一條即指出“本月刊為北京大學職員學生共同研究學術發揮思想，披露心得之機關雜誌。其材料之供給，大體由本校職員學生擔任。校外宏哲，如有特別佳著，亦得代為發表。”
41. 李迪，《中國數學史簡編》（遼寧人民出版社，1984年版）第410頁。
42. 李儼文章受重視的程度，從發表的順序上也可見一斑。《北京大學月刊》“編輯略例”中第二條為“本月刊內容排列之次序，以問題重大者居先。討論局部事項，而性質較為專門者居次。”李儼文章居第1-19頁，實屬重大問題。張菘年之《“中國數學源流考略”識語》居該號第21-22頁。
43. 載北京高等師範學校《數理雜誌》第一卷第一期第70-77頁。
44. 載《清華學報》第一卷第二期（1924年）第233-278頁。
45. 載《清華學報》第三卷第二期（1926年）第1047-1068頁。

—本文作者任職於中國科學院自然科學史研究所—