

數學與課外活動

黃毅英

引 言

課外活動的教育功能已無可置疑。在香港，自一九六六和六七年社會騷動後，政府對青少年問題日益注視，大力發展暑期活動。八十年代初期，隨著普及教育之推行，政府進一步於中學裡推行課外活動，並於一九八三年於各學校設立課外活動統籌主任一職。又於翌年，成立了香港課外活動統籌主任協會，使課外活動的管理變得專業化（馮和黃，待刊）。

然而，課外活動的發展在八十年代後期卻有放緩迹象，不少教師反映課外活動在校內得不到足夠的重視。據筆者分析：普及教育無可避免地帶來了一批質素參差的學生，令學校感到困擾，不少學校於是作出一自然反應：要確保學校成績的陣地，而把課外活動放於次要位置（馮和黃，待刊）。

這固非解決問題之明智策略。事實上，近年反而有不少學校發現課外活動能提高學生學習興趣，可使學生在不知不覺間走過學習歷程的功能，於是數學學會便有復甦的趨勢。但怎樣安排數學學會的內容便一再成為大家關注的課題。筆者便欲以本文一一探討。

數學學會的運作

早期數學學會多以講座與討論的形式進行，又或播放幻燈、電影等。電腦普及化後，當然亦有加入了電腦程式設計及遊戲等活動。在講座與討論中，數論、幾何三大問題、黃金分割及拓樸學等都是一些熱門的講題。隨著學生素質參差，數學學會在一些學校裡曾變成了補習班，甚或補課。這自然是學校本身有此協助成績低落學生的需要。然而補課往往只是從加長學生學習數學的時間量去著眼，而不能治本地引起學生學習之動機和解決他們學習數學面對的困難。故補課若於數學學會中出現，會大大破壞了數學學會的形象，數學學會在大家心目中便變成附加的一課了（黃，1986）。不過，若學生放學後確有得專人指導溫習的需要，學校有系統地組織補習班，由教師策劃高年班同學協助低年班同學溫習，亦是能達至美滿效果的。

隨著時代的轉變，學生在感到講座等數學學會活動過於拘謹時，形形色色的活動便開始引入學校裡，例如數學遊戲、數學競賽、習作、作坊、各種製作和展覽和攤位遊戲等。除此之外，外國有不少專為學生而寫的數學通訊、

問題徵答欄等。本刊亦設有問題徵答欄。香港的《數學通報》自創刊(1981)亦有問題徵答之設立，於第十四期增闢了學生園地版。在過去九年內(1981—1989)，該刊亦曾刊登了十六篇中學生的投稿(黃，待刊)。在另一方面，本刊第五十六期(蕭，1990)詳述了習作坊之運作(又見Siu和Yiu，1989)。此外，亦有數學燈謎之提出(馮，1988；馮和曾，1986)，亦甚為有趣。

近年亦有人提倡數學課外閱讀之計劃，以增強學生數學之讀、寫、講能力。《時代數學叢書》(時代圖書有限公司，1975)、《數學和數學家的故事》1—4集(李，1978、1979，1980，1984)和《概率萬花筒》(蕭和林，1982)等便是常用作課外閱讀之舉隅。不過要有大批適合各程度、不同課題、專為中學生而設的數學課外讀物，恐怕是先決條件的。

數學遊戲

田尼氏(Dienes, 1981)指出數學概念可透過自由玩耍，有規律遊戲、尋找共同結構、描述或圖示、符號化及形式化六個階段形成。在Bell(1978)中亦有提出利用遊戲學習數學之方法，並詳細舉出了遊戲所能達到知性與情性的教育效能及運用遊戲的局限等。常見的數學遊戲實屬不少，《數學遊戲》(鄭，1980)一書中便列舉了讓梨、秤量、幻方與魔陣、拓樸、劃鬼腳、火柴、棋盤上的包圍戰、節牌、獨子棋、多方垛片、七巧與十五巧、拉丁方陣和數學歸納等十三大類。本刊第五十六期(黃，1990)則列舉了幫助建立空間想像力的立體數學遊戲。Gardner(1956, 1959, 1966, 1975, 1977a, 1977b, 1979)中的內容亦是常被取材的。其他參考書籍包括高木(1984)、倪和朱(1986)、Deft(1987)、van Delft和Botermans(1978)、Hirsch(1986)、Kohl

(1974)、Maletsky和Hirsch(1981)、de-Roche和Bogenschild(1977)等。

當然不少人對遊戲能否真的可以促進數學學習仍有存疑。不過不少數學遊戲確實能使參與者自我發現規律，從而定出解難策略等。鄭(1980)中亦指出「遊戲帶來的受益往往不是內容方面而是遊戲本身的過程」(第一章《遊戲與學習》)。問題似乎在於如何選擇適當的遊戲去配合課題吧了。

在常見的遊戲中，梵天塔(河內塔)一類的數學內容(數學歸納法)較強，領導者(教師)若能適當選擇，很容易能令參與者(學生)認識所要引入的教學內容。

另一類的數學遊戲，是把數學套進了一些常見的遊戲形式裡。如井棋遊戲、戰艦遊戲、飛行棋遊戲、接龍遊戲、串字遊戲等。井棋可變成立體井棋、接龍牌的數字變了數學公式、幾何形狀：甚至飛行棋走至某一格時要作答數學問題等。而市面亦有數字串字(Mathable)之出售。這些遊戲沒有特定的數學內容，只是利用遊戲方式吸引學生。由於它們沒有特定內容，這些遊戲的長處也在於變化多端，用同一種模式可套入不同的數學課題、還可作不同的變化。井棋中由 3×3 棋盤變 9×9 、立體、下子後可走子等便可表現這類遊戲的變化，對於這類遊戲領導者若能掌握此特性，即能創出既吸引學生參與又能從中作出數學演習的遊戲來。

在現時學生人數過多與面積狹窄的課室環境中自然帶來很大的局限性，這亦是使不少教師於課堂運用遊戲裹足不前之主因。於數學學會及人數較少的輔導班等，應該可以派上用場。至於課堂環境之改善，就唯有繼續盼望未來了。

數學競賽

數學競賽亦是一個極能提高學生對數學興趣的活動。在香港，一九八三年起，教育署與羅富國教育學院每年都合辦香港數學競賽。這比賽前身是羅富國教育學院所辦的數學比賽。一九八八年開始，香港派隊參加國際數學奧林匹克，屢獲佳績，包括一九八八年（澳洲）兩面銅牌、八九年（西德）兩銀一銅及到九零年（中國）的四銅等。於是近年各種數學比賽仿如雨後春筍（黃，待刊）。

一些學校利用數學學會進行數學競賽的選拔和訓練；另一些學校更看到這樣的受惠者只屬數學較好的一群，索性將競賽推廣，不一定為作選拔出外參賽之用。例如舉辦全校（分級）的數學比賽，甚至聯同就近學校切磋等。這種提高整體的數學興趣、養成一種風氣可能便是各種競賽的本意。

在校內辦數學比賽是種種比賽的一種，對於任何比賽，賽制、賽程等都要專業的安排（馮，1987；黃，1985）。要盡快選出優勝者呢？還是希望所有人都有較多參與？能容許多久的賽程？用循環制、淘汰制還是混合制等。

對於學科性的比賽，在現時大部份按能力分班的情況下，對壘方式是最值得留意的。以一級五班為例，若以班際作比賽，其中四隊入決賽，成績最遜的一班最容易在早期被擯出局。當決賽在禮堂舉行時，對被淘汰者的挫敗感不可謂不大。改用社際、自由組隊或個人參賽或可緩和這種情況。此外，若有文理分流的情況，文組學生參賽的意願可能不大，這就可考慮將數學題目與其他學科常識、時事、生活常識等題目混在一起，作一綜合性的常識問答比賽，這除能減輕學術味道外，一些學科成績不出衆但具一般常識的同學也可以有發揮的機會。

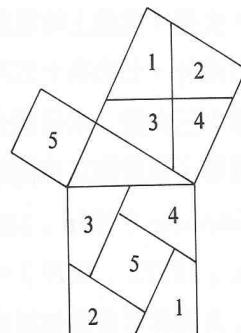
比賽形式絕不限於全校性，在課堂裡使用亦甚常見。不過上述被數學較好的同學壟斷、數學較遜者無法參與的問題依舊存在。這在搶答中尤為顯著。若以均勻實力作適當的分組，問題當可減輕。

此外，習作比賽可發揮合作和集體探索的精神（Sachs, 1988a、1988b；Trowell, 1990）。統計習作更甚能將枯燥統計學習變得生活化。香港統計學會自一九八六年，採納了Cheung, Lam, Siu, & Wong (1986) 的建議，每年均舉辦全港中學生統計習作比賽。一九八八年開始分成初、高中兩組，而自一九八九年起則在分析數據之上容許參賽隊伍自行搜集數據，增加了比賽的趣味。這一類的統計習作比賽在校內舉辦應會是甚受歡迎的。

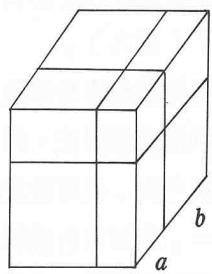
模型製作

隨著科技發達，教具亦日漸先進和多元化。當然亦有指出各種視聽器材，只令學生的注意力集中到感官刺激的追求上，與從而思考與學習未必有必然的關係。如何從外在動機轉為內在又是另一課題。教具亦是一種工具，能否達到教育目的自然亦乎是否有適當的運用。

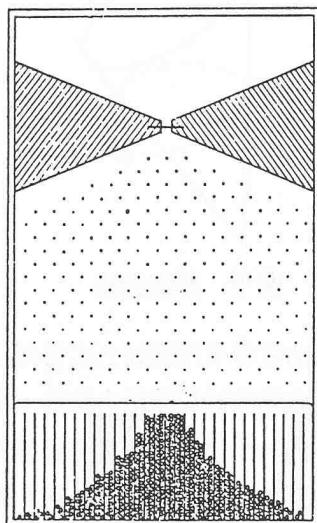
Cundy 和 Rollett (1951) 和 National Council of Teachers of Mathematics (1973) 可謂已包括了大部分常見的數學的教具與模型。比如關於勾股定理（圖一）、 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ （圖二）、二項式分佈（圖三）及最速降線等之模型（圖四），諧振圖（harmonograph）的製作（圖五）和二進位加法、邏輯線路等電子製作（圖六）均是



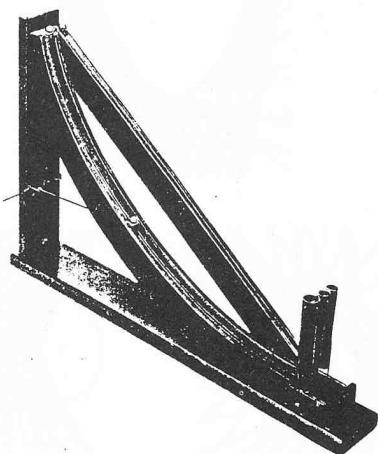
圖一 勾股定理



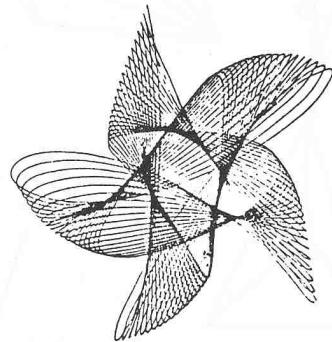
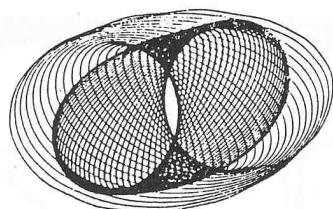
圖二 $(a+b)^3$ 的模型



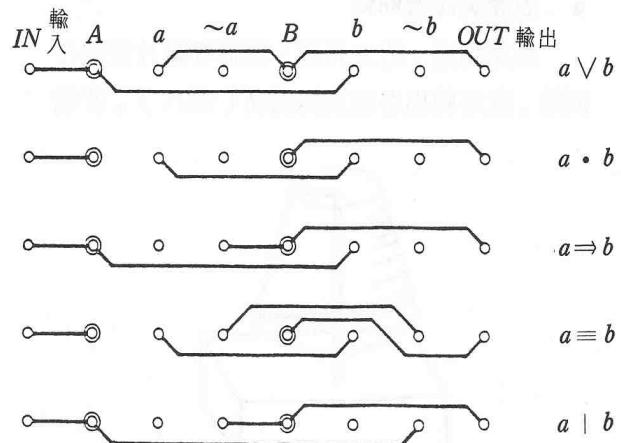
圖三 二項分佈



圖四 最速降線模型



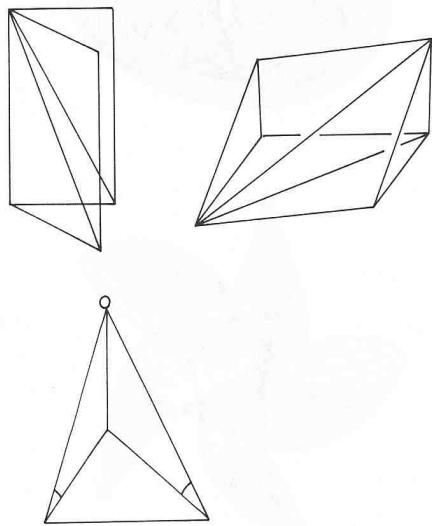
圖五 諧振圖



圖六 電子線路

爲人所熟識的。在以往，這些模型與器材一般乃由教師製作（或購置），遇到適當的課題時展示於學生面前。這不只需要動用了教師的時間，且器材與學生之間較爲疏離。於是便有器材製作班之意念，讓學生親自製作。材料則由硬卡紙、木、膠片，以至發泡膠不等。例如當學生學到三角學對立體問題的應到，學生每對空間的關係無法觸摸，若能讓學生按題意親自構造出「半開的門」、「斜坡」、「兩點向高

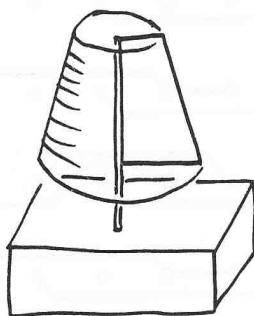
物仰視」等模型，不只能更易洞悉問題，更能增強空間想像力（圖七）（黃，1990）。以下舉出其他三類較廣為人用的製作來討論。



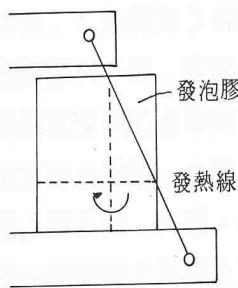
圖七 三角應用問題之模型

a. 錐體與錐體曲線

利用馬達，把三角形、矩形等紙片安裝在頂端，就可轉出各種旋轉曲面（圖八）。若想



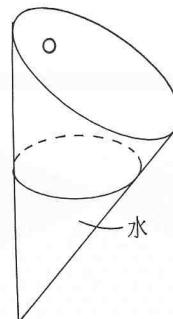
圖八 旋轉曲面



圖九 錐體的製作

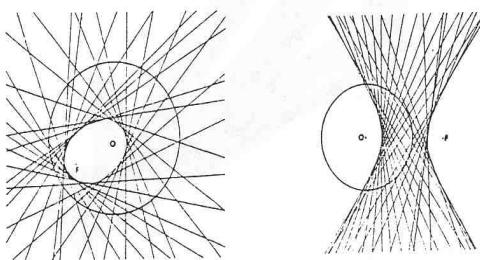
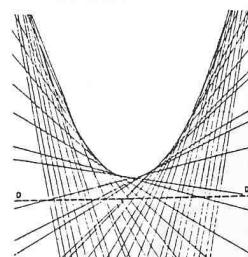
製造出圓錐體以便切割出錐體曲線，可將數片發泡膠疊厚黏好，利用斜發熱線旋轉割之，即得出圓錐體。以適當角度切割後，便得出不同的錐體曲線了（圖九）。

當然，利用發泡膠是無法達至塑膠製作之透明效果。利用塑膠同底、同高的錐體和圓柱體，利用注水三次，便可驗證錐體體積為柱體體積之三分之一。若以有色液體注入錐體至半滿，在不同的傾斜角度下，亦可顯出各種的錐體曲線來（圖十）。

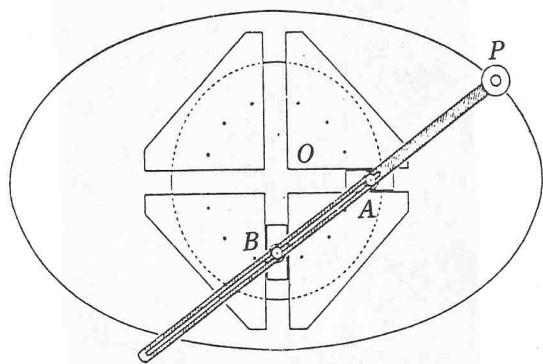


圖十 錐體曲線

錐體曲線亦可用摺線方式得出。主要利用拋物線為定點定線間等距之軌跡、橢圓為固定圓形與圓內一點間等距之軌跡而雙曲線則為固定圓形與圓外一點間等距之軌跡（圖十一）。至於橢圓形之繪圖，除了利用其為兩定點間拉直繪出，亦有特別之橢圓圓規（圖十二），其



圖十一 利用摺紙得出錐體曲線

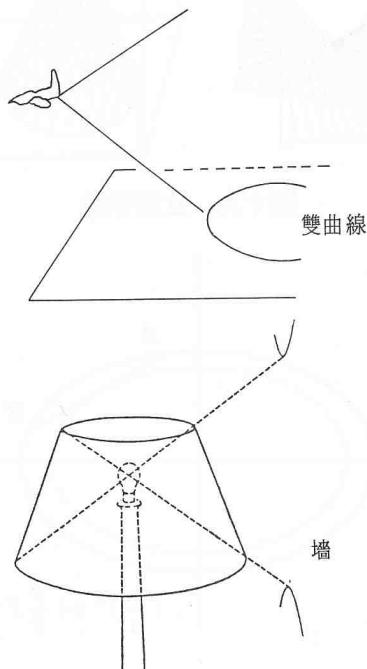


圖十二 橢圓圓規

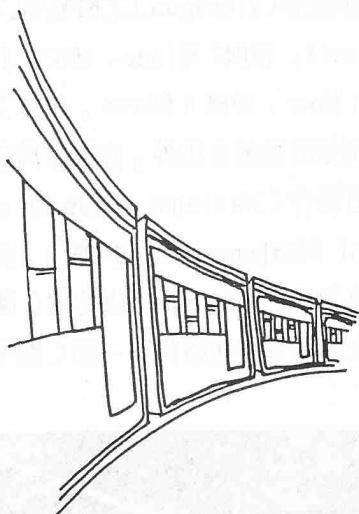
中也是利用了軌跡的道理 (Cundy & Rollett, 1951)。



圖十三 抛物線焦點的特性



圖十四 雙曲線之實例



圖十五 火車拐彎時，車頂形成雙曲線

至於各錐體曲線性質的顯示，一般都集中於拋物線及橢圓中焦點的特性。香港科學館中便有兩個巨型的拋物面，兩人坐於各別的焦點處，縱使相距甚遠，亦可清晰地收到對方的聲音。若於橢圓的圍牆內兩焦點各置一棋子，將棋子彈向牆上任何一點，反彈後必會打中另一棋子 (National Council of Teachers of Mathematics, 1973) (圖十三)。至於雙曲線，一般可以地面聽到超音速飛機聲音的範圍作解釋，也可把坐燈放近牆邊，雙曲線即於牆上顯現。(圖十四)火車拐彎時觀察車頂之曲線亦為雙曲線 (圖十五)。

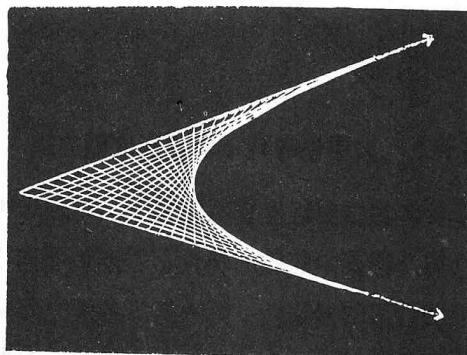
b. 摺紙和穿線習作

上面談到利用摺紙可摺出錐體曲線來。用摺紙也可造成不同種類的立體。最常見的是正立方體和亞基米德立方體 (Cundy & Rullett, 1951)。摺正立方體和亞基米德立方體除了有立體製作的意義外，它們還有很多可供探索的性質，而其表達數學最美麗一面的對稱性只是其中之一。其他如體積與表面面積計算、尤拉公式、對偶、及為何只得五種正立方體、十三種 (prism 與 antiprism 除外) 亞基米德立方等，均可帶來不少數學知識 (黃, 1990)。

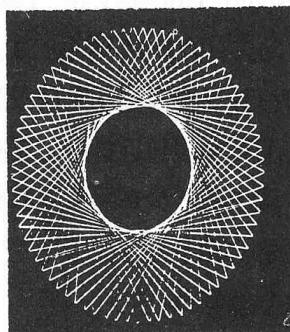
利用摺紙還可得出不少的形狀，如各種星形 (Jenkins 和 Bear, 1985a, 1985b, 1990

)；及伸縮形(flexagon)之摺製等(Davidson 和 Willeutt, 1984; Hiner, 1985; Johnson, 1974; Row, 1966; Olsen, 1975)。

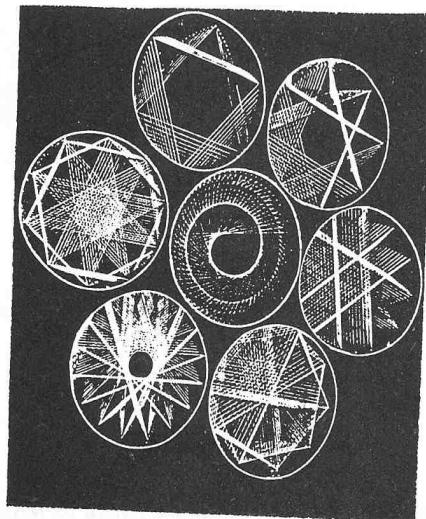
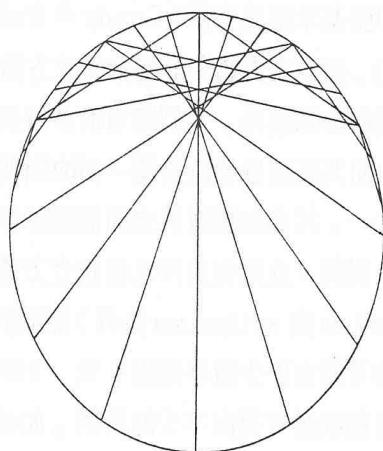
除可摺出種種曲線外，穿線亦為產生曲線之極流行習作(National Council of Teachers of Mathematics, 1973)。例如利用直角可絡包出(envelope)拋物線(圖十六)、在圓上等距穿線包絡出另一圓(圖十七)，



圖十六 穿線形成拋物線



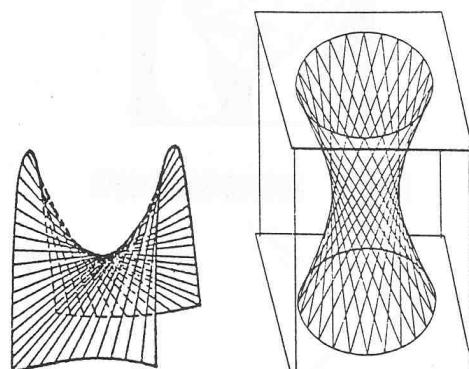
圖十七 一圓包絡另一圓



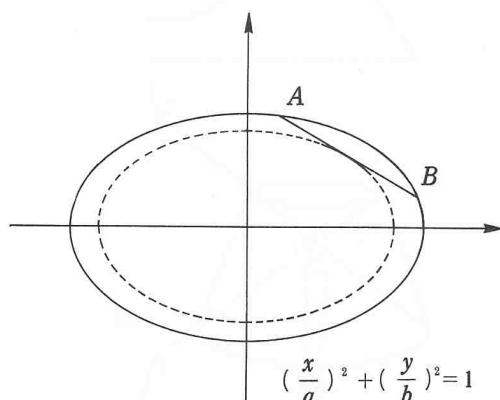
圖十八 心臟線與其他穿線

式產生(Millington, 1989)。不過在橢圓所套出的卻非橢圓，這現象也頗為有趣(圖十九)(Han, 1985)。

至於立體穿線更多姿多采，可得出各種法線曲而來(圖二十)。



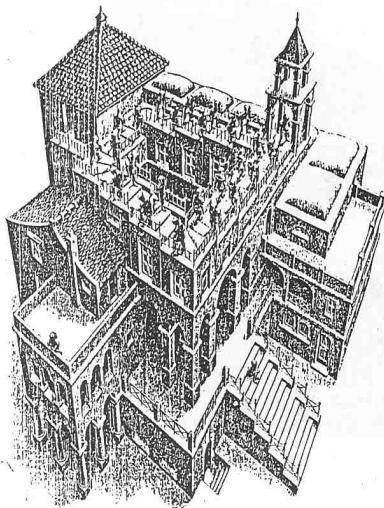
圖十九 立體穿線



圖二十 橢圓包絡的並非橢圓

c. 數學視覺藝術

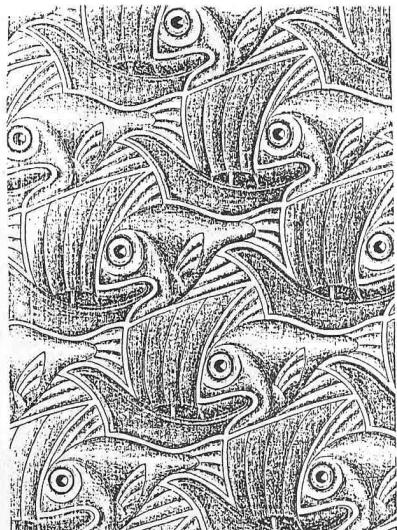
名畫家 Escher 其具有數學觀念的藝術馳名之際（圖廿一），數學視覺藝術亦風靡一時



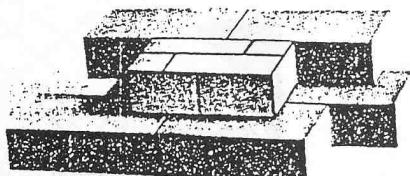
圖廿一 Escher 之視覺藝術

(Gardner, 1975)。事實上，數學（尤以幾何圖案）本具不少對稱的美感。其中鑲嵌圖案最常為人提及（圖廿二）（林，1988a，1988b，1988c；Maletsky, 1974），還有立體鑲嵌圖案的討論（圖廿三）（林，1988a，1988b，1988c）。這些圖案在生活裡甚為常見，諸如於建築、裝飾、及行人道的砌磚等（圖廿四）。

這些圖案的設計，大量的利用到旋轉、平移等轉換，學生在年幼時利用對摺有墨跡的紙張（圖廿五），窗花剪紙製作（圖廿六）等，

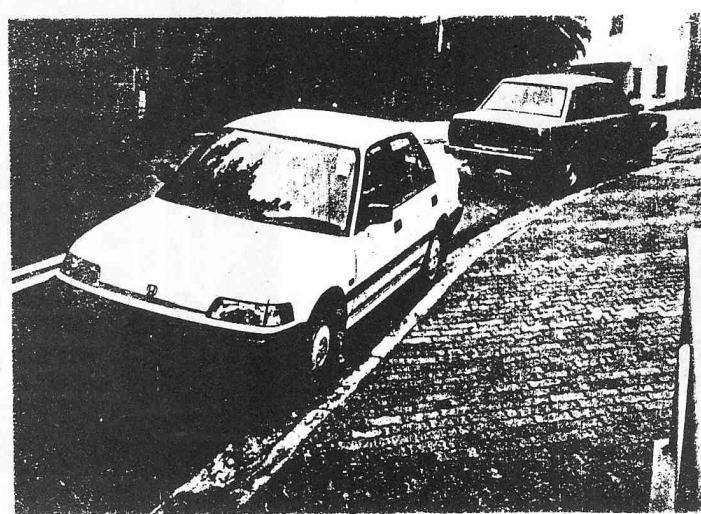


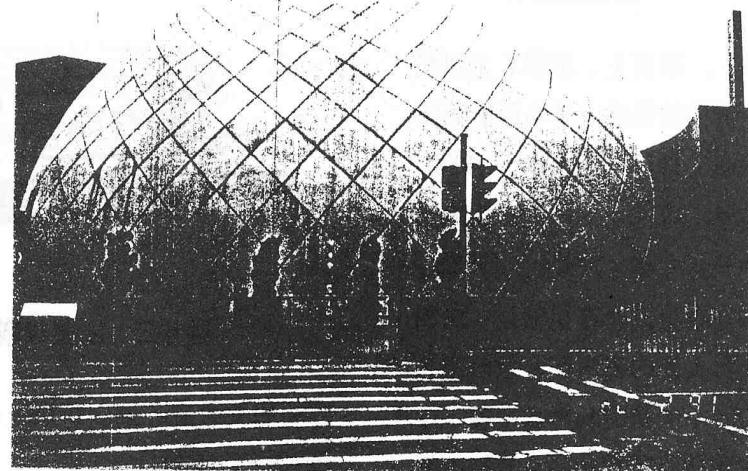
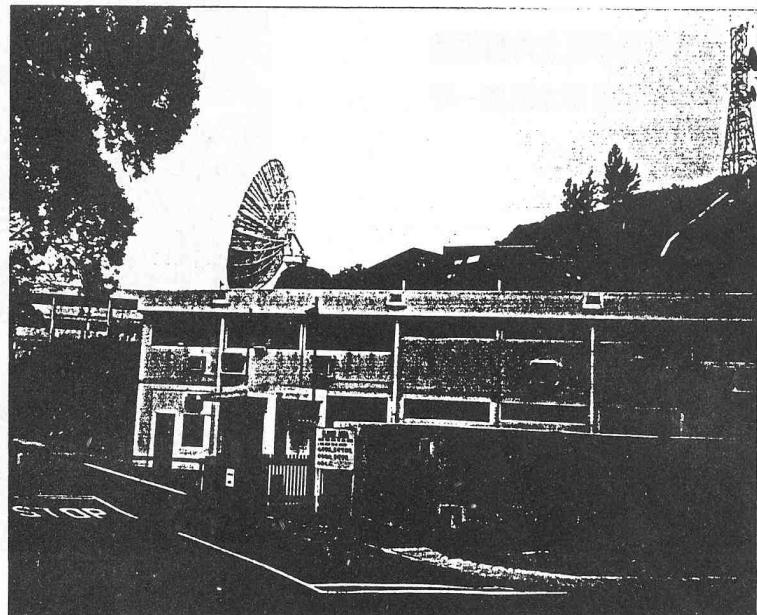
圖廿二 平面裝嵌圖案



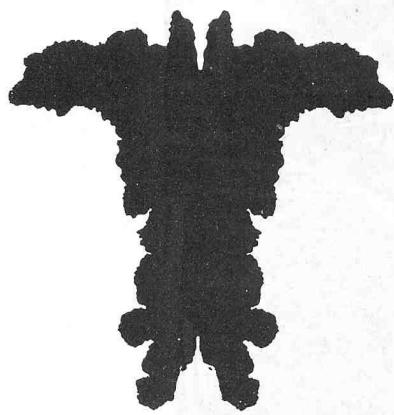
圖廿三 立體鑲嵌之問題

亦能感受對稱之美（徐和殷，1989，1989；馮和許，1989）。

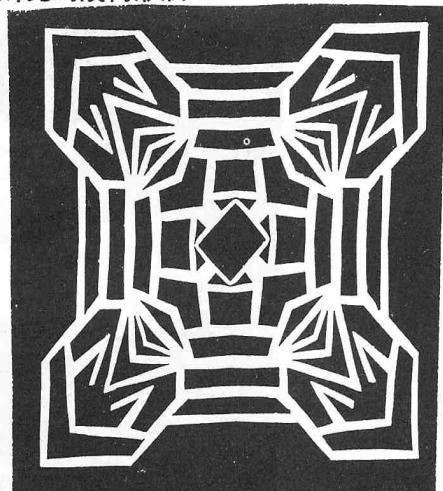




圖廿四 行人道的圖案與建築所見的幾何形狀



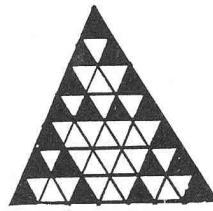
圖廿五 墨跡



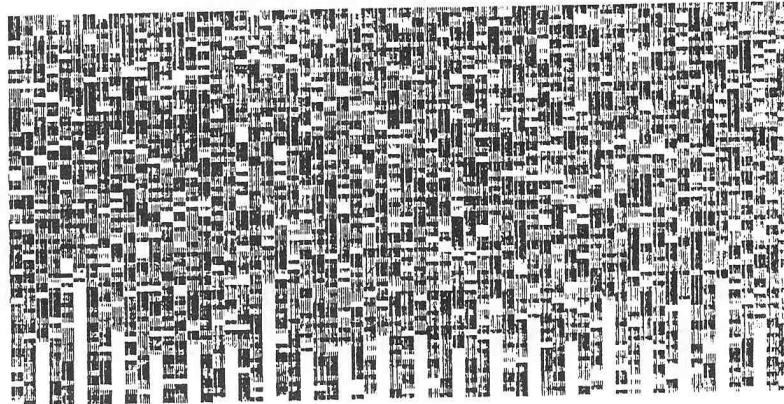
圖廿六 窗花

還有是利用楊輝三角繪成圖案。方法是先定出著色的數目，例如三色，於是將楊輝三角的數字用模(modulo)三找出其殘數，故不外是0、1、2；以這三數字配三種既定的顏色，便成極具對稱性的圖案(圖廿七)。

一種類似的製作是利用隨機數(如擲骰等)，為小方格著色(圖廿八)。



圖廿七 利用楊輝三角所成之圖案(二色)



圖廿八 隨機圖案

以上的製作，若作為一個學會的全年活動，可能有點零散。黃(1982a)中便曾舉出了由製作，到探索數學關係，以至最後展覽整套計劃的經驗。將製品展出不只為參與者帶來成功感，在另一角度，是擴大了參與面，更有宣傳之效。

現時不少學校都會利用新生輔導等介紹全校的學會活動，數學學會的製作自然可於此時展出。又可開設攤位進行數學遊戲等。於學期終以展覽、數學週、或與其他科作科學週等，做全年活動大檢閱都是可以考慮的念頭。其中可配合展板、幻燈、錄影帶等製作。

數學故事、數學家小傳亦為展板常見的內容，不過亦有指出宜避免過份渲染個別數學家，其怪異行徑和詭秘莫測的靈感，而多點強調數學的整體發展。

結論

課外活動在學校得以順利推行，除如上所述，須得到校方的支持外，過份關注成果或比賽成績往往是窒息有意義活動的主因。若課外活動得到適當的重視，負責數學學會者之工作自然亦應得到承認和鼓勵(黃，1983, 1989)。

另一方面，若能把數學活動滲透到週會、集會、活動時間、班主任時間、德育課、期終活動等時間裡，又與學生會、社組織及其他學會合辦；同時加強學會與校內其他活動在時間上、場地上與人手上的統籌與安排，再加上適當的宣傳，數學課外活動當可再一次活躍於學校生活裡(黃，待刊)。

參考書目

- 李學數（1978）「數學和數學家的故事」(1)，廣角鏡出版社。
- 李學數（1979）「數學和數學家的故事」(2)，廣角鏡出版社。
- 李學數（1980）「數學和數學家的故事」(3)，廣角鏡出版社。
- 李學數（1984）「數學和數學家的故事」(4)，廣角鏡出版社。
- 林義雄（1988a）平面的多邊形圖案，「九章數學」(26)，P. 2-11。
- 林義雄（1988b）平面的多邊形圖案，「九章數學」(27)，P. 11-20。
- 林義雄（1988c）多面體與空間的鑲嵌圖案，「九章數學」(28)，P. 32-42。
- 高木茂男著、丁一譯（1984）「立體數學遊戲」科學普及出版社。
- 時代數學叢書（1975）：華羅庚「從孫子的“神奇妙算”談起」；「從祖沖之的圓周率談」；吳文俊「力學在幾何中的一些應用」；閔嗣鶴「格點和面積」；龔升「從劉徽割圓談起」；段學復「對稱」；史濟懷「平均」；江澤涵「多面的歐拉定理和閉曲面的拓撲分類」；蔡宗熹「等周問題」；姜伯駒「一筆畫和郵遞路線問題」。時代圖書有限公司（原版：人民教育出版社）。
- 倪進、朱明書（1986）「智力遊戲中的數學方法」，江蘇教育出版社。
- 徐本順、殷啓正（1990）「數學中的美學方法」，江蘇教育出版社。
- 馮以浤（1987）「中學課外活外活動的理論與實踐」，廣角鏡出版有限公司。
- 馮以浤（1988）「課外活動研究」，廣角鏡出版有限公司。
- 馮以浤、黃毅英（待刊）八十年代中學課外活動的發展，收於「八十年代香港教育回顧」內，商務印書館。
- 馮家俊、許祖龍（1989）數學教材中的美育內容，收於「美育知識手冊」內（頁222）。福建教育出版社。
- 馮德華（1988）數學燈謎，「數學通報」十五期，p.26。
- 馮德華、曾德成（1980）「數學學會導師資料冊」，香港數理教育學會。
- 黃國義（1985）「運動競賽制度之比較研究」，體育出版社。
- 黃毅英（1982a）辦數學學會的一些經驗，「數學教學」四期，p. 37。
- 黃毅英（1982b）課外活動的真正意義，「明報」(9.23)。
- 黃毅英（1983）課外活動的真正意義，「明報」(5.8)。
- 黃毅英（1986）填鴨教育與心智啓迪，「明報」(7.5)。
- 黃毅英（1989）比賽活動側面，「課外活動通訊」四期，p.12。
- 黃毅英（1990）立體數學遊戲與空間想像力之訓練，「數學傳播」五十六期，p. 78-96。
- 黃毅英（待刊）八十年代中學數學教育回顧，收於「八十年代香港教育回顧」內。商務印書館。
- 蕭文強（1990）數學作坊的經驗，「數學傳播」五十六期，p. 72-77。
- 蕭文強・林建（1982）「概率萬花筒」，香港：廣角鏡出版社。

- Bell, F.H. (1978) *Teching and Learning Mathematics in Secondary Schools*, Wm. C. Brown Company.
- Cheung, P.H., Lam, K., Siu, M.K., & Wong, N.Y. (1986) An appraisal of the teaching of statistics in secondary schools of Hong Kong, Paper presented to the Second International Conference on Teaching of Statistics, Canada: Victorea.
- Cundy, H.M. & Rollett, A.P. (1961) *Mathematical Models*, Oxford University Press.
- Davidson, P.S. & Willeutt, R.E. (1984) *Spatial Problem Solving with Paper Folding and Cutting*, Cuisenaire Co.
- Deft, J. (1987) *Mathematics Games*. Macmillan Education Ltd.
- vanDelft, P. & Botermans, J. (1978) *Creative Puzzles of the World*, Harry N. Abrams.
- Dienes, A.P. (1981) *Building Up Mathematics*, Hutchinson Educational Ltd.
- Gardner, M. (1956) *Mathematics, Magic and Mystery*, Dover.
- Gardner, M. (1959) *Mathematical Puzzles and Diversions*, Simon & Schuster.
- Gardner, M. (1966) *More Mathematical Puzzles and Diversions*, Penguin.
- Gardner, M. (1975) *Mathematical Carnival*, Alfred Knopf.
- Gardner, M. (1977a) *Mathematical Magic Show*, Alfred Knopf.
- Gardner, M. (1977b) *Further Mathematical Diversions*, Pelican.
- Gardner, M. (1979) *Mathematical Circus*, Alfred Knopf.
- Han (1985) The envelope of equal chords of an ellipse, *Mathematics Bulletin* (10), 6-7.
- Hiner, M. (1985) *Paper Engineering*, Tarquin Publications.
- Hirsch, C.R. (1986) *Activities for Your Classroom*, National Council of Teachers of Mathematics.
- Hodgson, N. (1988) *Classroom Display*, Tarquin Publications.
- Holden, A. (1971) *Shapes, Space and Symmetry*, Columbia University Press.
- Jenkins, G. & Bear, M. (1985a) *The Compound of Five Cubes*, Tarquin Publications.
- Jenkins, G. & Bear, M. (1985b) *The Final Stellation of the Icosahedron*, Tarquin Publications.
- Jenkins, G. & Bear, M. (1990) *Make Shapes*, Tarquin Publications.
- Johnson, D.A. (1974) *Mathemagic with Flexagons*, Activity Resources Co.
- Kohl, H.R. (1974) *Writing Maths and Games in the Open Classroom*, Methuen & Co.
- Maletsky, E., Hirsch, C. (1981) *Activities from the Mathematics Teacher*, National Council of Teachers of Mathematics.
- Millington, J. (1989) *Curve Stitching*, Tarquin Publications.
- National Council of Teachers of Mathematics (1973) *Instructional Aids* (The 34th yearbook), National Council of Teachers of Mathematics.
- Olson, A.T. (1975) *Mathematics Through Paper Folding*, National Council of Teachers of Mathematics.
- Pappas, T. (1989) *The Mathematics Calendar, 1990*, Wide World Publishing.
- Pappas, T. (1990) *The Mathematics Calendar, 1991*, Wide World Publishing.
- deRoche, E.F. & Bogenschild, E.G. (1977) *400 Group Games and Activities and Teaching Math*, Parker Publishing.

- Row, T. S. (1966) *Geometrical Exercises in Paper Folding*, Dover Publications.
- Sachs, L. (1988a) *Projects to Enrich School Mathematics: Level 2*, National Council of Teachers of Mathematics.
- Sachs, L. (1988b) *Projects to Enrich School Mathematics: Level 3*, National Council of Teachers of Mathematics.
- Siu, M.K. & Yiu, P.Y.H. (1989) Mathematics workshop for students, *Mathematics Bulletin* (17). 1-3.
- Sobel, M.A. (1988) *Readings for Enrichment in Secondary School Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics.
- Trowell, J.M. (1990) *Projects to Enrich School Mathematics: Level 1*, National Council of Teachers of Mathematics.