前期徵答問題解答

15401　3×5矩陣配號問題

優勝名單：

　優良：胡豐崇（內灣國小）

參考答案：（張國男提供）

任一解經列置換（permutation，亦稱爲排列）與行置換（包括僅作一類置換及兼作二類置換），均可產生(3!)×(5!)＝720 個解（包括該解在內）。如此 720 個解，可併爲一類。對於同類 720 個解，爲方便計，可僅列出一解以爲代表。

若以 16 爲被減數，減去任一解中各格所配之號數，以作爲新配之號數（即各格所配新舊二號數之和均爲 16），則所得者亦爲解。如此二解，稱爲互補解；其中之任一者，均爲另一者之補解。本文於若干處所，將藉此種互補概念，以簡化解題手續，縮短解題過程。（參閱評註第一段）

此後，對於三數組與五數組，均限定其數全異，且由小而大排之；再者，提及三數組鏈或五數組鏈之節數時，均指鏈中所含數組之個數。

對於任一解而言，每行三格之號數和均爲（1＋2＋…＋15）÷5＝24，每列五格之號數和均爲（1＋2＋…＋15）÷3＝40。

由 1 至 15 共 15 個自然數，可作出下列 25 個和爲 24 之三數組：

〔1,8,15〕,〔1,9,14〕,〔1,10,13〕,〔1,11,12〕,〔2,7,15〕,〔2,8,14〕,〔2,9,13〕,〔2,10,12〕,〔3,6,15〕,〔3,7,14〕,〔3,8,13〕,〔3,9,12〕,〔3,10,11〕,〔4,5,15〕,〔4,6,14〕,〔4,7,13〕,〔4,8,12〕,〔4,9,11〕,〔5,6,13〕,〔5,7,12〕,〔5,8,11〕,〔5,9,10〕,〔6,7,11〕,〔6,8,10〕,〔7,8,9〕。

利用上列三數組表，可如次進行以求出矩陣五行可選配之五節三數組鏈：①首先，可由上列25個三數組選配出包含 1 與 2 之二節鏈，得〔1,8,15〕＋〔2,9,13〕，〔1,8,15〕＋〔2,10,12〕，〔1,9,14〕＋〔2,7,15〕，〔1,9,14〕＋〔2,10,12〕，〔1,10,13〕＋〔2,7,15〕，〔1,10,13〕＋〔2,8,14〕，〔1,11,12〕＋

〔2,7,15〕,〔1,11,12〕+〔2,8,14〕與〔1,11,12〕+〔2,9,13〕。②其次,對上列各條二節鏈選配包含3之三數組,可得三節鏈〔1,8,15〕+〔2,9,13〕+〔3,7,14〕,〔1,8,15〕+〔2,9,13〕+〔3,10,11〕,〔1,8,15〕+〔2,10,12〕+〔3,7,14〕,〔1,9,14〕+〔2,7,15〕+〔3,8,13〕,〔1,9,14〕+〔2,7,15〕+〔3,10,11〕,〔1,9,14〕+〔2,10,12〕+〔3,6,15〕,〔1,9,14〕+〔2,10,12〕+〔3,8,13〕,〔1,10,13〕+〔2,7,15〕+〔3,9,12〕,〔1,10,13〕+〔2,8,14〕+〔3,6,15〕,〔1,10,13〕+〔2,8,14〕+〔3,9,12〕,〔1,11,12〕+〔2,7,15〕+〔3,8,13〕,〔1,11,12〕+〔2,8,14〕+〔3,6,15〕,〔1,11,12〕+〔2,9,13〕+〔3,6,15〕與〔1,11,12〕+〔2,9,13〕+〔3,7,14〕。③復次,對上列各條三節鏈選配包含4之三數組。由上列三數組表,可知〔1,8,15〕+〔2,9,13〕+〔3,7,14〕,〔1,9,14〕+〔2,7,15〕+〔3,8,13〕以及〔1,11,12〕+〔2,9,13〕+〔3,6,15〕三條鏈均不能加節,應捨棄之,其餘各條皆可增長,共得11條四節鏈。④最後,可將上述各條四節鏈配以其餘三數所構成之三數組。如是。遂得下列11條五節三數組鏈:

〔1,8,15〕+〔2,9,13〕+〔3,10,11〕+〔4,6,14〕+〔5,7,12〕
〔1,8,15〕+〔2,10,12〕+〔3,7,14〕+〔4,9,11〕+〔5,6,13〕 互補鏈
〔1,9,14〕+〔2,7,15〕+〔3,10,11〕+〔4,8,12〕+〔5,6,13〕 自補鏈
〔1,9,14〕+〔2,10,12〕+〔3,6,15〕+〔4,7,13〕+〔5,8,11〕
〔1,9,14〕+〔2,10,12〕+〔3,8,13〕+〔4,5,15〕+〔6,7,11〕 互補鏈
〔1,10,13〕+〔2,7,15〕+〔3,9,12〕+〔4,6,14〕+〔5,8,11〕
互補鏈 〔1,10,13〕+〔2,8,14〕+〔3,6,15〕+〔4,9,11〕+〔5,7,12〕 自補鏈
〔1,10,13〕+〔2,8,14〕+〔3,9,12〕+〔4,5,15〕+〔6,7,11〕
〔1,11,12〕+〔2,7,15〕+〔3,8,13〕+〔4,6,14〕+〔5,9,10〕 互補鏈
〔1,11,12〕+〔2,8,14〕+〔3,6,15〕+〔4,7,13〕+〔5,9,10〕
〔1,11,12〕+〔2,9,13〕+〔3,7,14〕+〔4,5,15〕+〔6,8,10〕 自補鏈

(附記:因〔1,8,15〕,〔2,9,13〕,〔3,10,11〕,〔4,6,14〕與〔5,7,12〕之補數組爲〔1,8,15〕,〔3,7,14〕,〔5,6,13〕,〔2,10,12〕與〔4,9,11〕,故謂〔1,8,15〕+〔2,9,13〕+〔3,10,11〕+〔4,6,14〕+〔5,7,12〕與〔1,8,15〕+〔2,10,12〕+〔3,7,14〕+〔4,9,11〕+〔5,6,13〕爲互補鏈;又因〔1,9,14〕+〔2,7,15〕+〔3,10,11〕+〔4,8,12〕+〔5,6,13〕之補鏈爲其自身,故稱之爲自補鏈。餘類推,不贅述。)

由1至15共15個自然數,可作出下列141個和爲40之五數組:

(1,2,8,14,15),(1,2,9,13,15),(1,2,10,12,15),(1,2,10,13,14),(1,2,11,12,14),(1,3,7,14,15),(1,3,8,13,15),(1,3,9,12,15),(1,3,9,13,14),(1,3,10,11,15),(1,3,10,12,14),(1,3,11,12,13),(1,4,6,14,15),(1,4,7,13,15),(1,4,8,12,15),(1,4,8,13,14),(1,4,9,11,15),(1,4,9,12,14),(1,4,10,11,14),(1,4,10,12,13),(1,5,6,13,15),(1,5,7,12,15),(1,5,7,13,14),(1,5,8,11,15),(1,5,8,12,14),(1,5,9,10,15),(1,5,9,11,14),(1,5,9,12,13),(1,5,10,11,13),(1,6,7,11,15),(1,6,7,12,14),(1,6,8,10,15),(1,6,8,11,14),(1,6,8,12,13),(1,6,9,10,14),(1,6,9,11,13),(1,6,10,11,12),(1,7,8,9,15),(1,7,8,10,14),(1,7,8,11,13),(1,7,9,10,13),(1,7,9,11,12),(1,8,9,10,12),(2,3,6,14,15),(2,3,7,13,15),(2,3,8,12,15),(2,3,8,13,14),(2,3,9,11,15),(2,3,9,12,14),(2,3,10,11,14),(2,3,10,12,13),(2,4,5,14,15),(2,4,6,13,15),(2,4,7,12,15),(2,4,7,13,14),(2,4,8,11,15),(2,4,8,12,14),(2,4,9,10,15),(2,4,9,11,14),(2,4,9,12,13),(2,4,10,11,13),(2,5,6,12,15),(2,5,6,13,14),(2,5,7,11,15),(2,5,7,12,14),(2,5,8,10,15),(2,5,8,11,14),(2,5,8,12,13),(2,5,9,10,14),(2,5,9,11,13),(2,5,10,11,12),(2,6,7,10,15), (2,6,7,11,14),(2,6,7,12,13),(2,6,8,9,15),(2,6,8,10,14),(2,6,8,11,13),(2,6,9,10,13),(2,6,9,11,12),(2,7,8,9,14),(2,7,8,10,13),(2,7,8,11,12),(2,7,9,10,12),(2,8,9,10,11),(3,4,5,13,15),(3,4,6,12,15),(3,4,6,13,14),(3,4,7,11,15),(3,4,7,12,14),(3,4,8,10,15),(3,4,8,11,14),(3,4,8,12,13),(3,4,9,10,14),(3,4,9,11,13),(3,4,10,11,12),(3,5,6,11,15),(3,5,6,12,14),(3,5,7,10,15),(3,5,7,11,14),(3,5,7,12,13),(3,5,8,9,15),(3,5,8,10,14),(3,5,8,11,13),(3,5,9,10,13),(3,5,9,11,12),(3,6,7,9,15),(3,6,7,10,14),(3,6,7,11,13),(3,6,8,9,14),(3,6,8,10,13),(3,6,8,11,12),(3,6,9,10,12),(3,7,8,9,13),(3,7,8,10,12),(3,7,9,10,11),(4,5,6,10,15),(4,5,6,11,14),(4,5,6,12,13),(4,5,7,9,15),(4,5,7,10,14),(4,5,7,11,13),(4,5,8,9,14),(4,5,8,10,13),(4,5,8,11,12),(4,5,9,10,12),(4,6,7,8,15),(4,6,7,9,14),(4,6,7,10,13),(4,6,7,11,12),(4,6,8,9,13),(4,6,8,10,12),(4,6,9,10,11),(4,7,8,9,12),(4,7,8,10,11),(5,6,7,8,14),(5,6,7,9,13),(5,6,7,10,12),(5,6,8,9,12),(5,6,8,10,11),(5,7,8,9,11),(6,7,8,9,10)。

茲設矩陣五行所配之三數組鏈爲首條五節鏈，即〔1,8,15〕+〔2,9,13〕+〔3,10,11〕+〔4,6,14〕+〔5,7,12〕。在此種情況下，利用上列五數組表，可如次進行以求出矩陣三列可選配之三節五數組鏈：①首先，由上表最初43個包含1之五數組，篩選出〔1,8,15〕,〔2,9,13〕,〔3,10,11〕,〔4,6,14〕與〔5,7,12〕各供給一數者，可得(1,2,11,12,14),(1,4,10,12,13)與(1,5,9,11,14)三個，是即經過1之列可選配之五數組也。篩選方式不一，且述數種於下：其一爲最原始者，即對上述43個五數組依次檢驗是否合乎上述條件；合者取之，不合者棄之。其二，先由上述43個五數組棄去含有8或15者，而後對其餘每一數組檢驗1以外四數是否由〔2,9,13〕,〔3,10,11〕,〔4,6,14〕與〔5,7,12〕各供給一數；是則取之，否則棄之。其三，先由上述43個五數組取出2,9,13三數恰出現一數者，而後由之篩選出其餘三數恰由〔3,10,11〕,〔4,6,14〕與〔5,7,12〕各供給一數者。其四，將上述第二種與第三種合併使用，即先棄去含8或15者，次取出2,9,13出現一數者，而後檢驗其餘三數，選出恰由〔3,10,11〕,〔4,6,14〕與〔5,7,12〕各供給一數者。其五，將上述第三種分開處理如下：(i)若入選之五數組含1與2，則必不含8,9,13,15中任一數，且必由〔3,10,11〕,〔4,6,14〕與〔5,7,12〕各供給一數。檢查上表(特別注意不含8,9,13,15中任一數)，可知必爲(1,2,11,12,14)。(ii)若入選之五數組含1與9，則必不含2,8,13,15中任一數，且必由〔3,10,11〕,〔4,6,14〕與〔5,7,12〕各供給一數。檢查上表(特別注意不含2,8,13,15中任一數)，可知必爲(1,5,9,11,14)。(iii)若入選之五數組含1與13，則必不含2,8,9,15中任一數，且必由〔3,10,11〕,〔4,6,14〕與〔5,7,12〕各供給一數。檢查上表(特別注意不含2,8,9,15中任一數)，可知必爲(1,4,10,12,13)。(當然，上述第三種至第五種中之〔2,9,13〕，亦可以〔3,10,11〕,〔4,6,14〕或〔5,7,12〕替代之。)②其次，對①中所得三個五數組，檢驗是否可繼續選配適當之五數組以構成二節鏈。茲舉(1,2,11,12,14)爲例說明之：因未出現於(1,2,11,12,14)之最小自然數爲3，故考慮經過3之列可選配之五數組(參考下註)。入選之五數組必含3，必不含1,2,10,11,12,14中任一數，且必由〔1,8,15〕,〔2,9,13〕,〔4,6,14〕與〔5,7,12〕各供給一數。檢查上表中以3爲首之五數組(特別注意不含10,11,12,14中任一數)，可知必爲(3,4,5,13,15)或(3,6,7,9,15)，故得二節鏈(1,2,11,12,14)+(3,4,5,13,15)與(1,2,11,12,14)+(3,6,7,9,15)。〔註：此處之3，當然亦可以4,5,6,7,8,9,10,13或15替代之。但考慮最小數3時，只須查以3爲首之五數組，因此等五數組在上表中一接一連續排列，故較其他情形(五數組分散排列)便於檢索也。〕對(1,4,10,12,13)與(1,5,9,11,14)二者，仿此

處理之，可得二節鏈(1,4,10,12,13)+(2,5,8,11,14)與(1,5,9,11,14)+(2,6,7,10,15)。③最後，將②中所得各條二節鏈配以其餘五數所構成之五數組，即得四條三節五數組鏈，如〔子〕之(1)至(4)所示。由是，遂求出此一情況下之代表解（圖一至圖四）矣！

其他情況，尚有十種，即下段所列之〔丑〕,〔寅〕,…,〔戌〕也。在〔寅〕,〔卯〕,〔辰〕,〔午〕,〔未〕與〔戌〕六種情況下，可模仿前段所述之方法（即對〔子〕所用之解法），以檢驗本題是否有解；若有，並可由此求出其（代表）解。情況〔丑〕與〔子〕互補，可藉互補概念而得解。其餘情況〔巳〕,〔申〕及〔酉〕，按次與〔卯〕,〔辰〕及〔未〕互補，亦可如是解之。

依照上述之解題步驟，實際處理之，即得下列之結果：

〔子〕行配〔1,8,15〕+〔2,9,13〕+〔3,10,11〕+〔4,6,14〕+〔5,7,12〕

(1)列配(1,2,11,12,14)+(3,4,5,13,15)+(6,7,8,9,10)：圖一可作爲代表解。
(2)列配(1,2,11,12,14)+(3,6,7,9,15)+(4,5,8,10,13)：圖二可作爲代表解。
(3)列配(1,4,10,12,13)+(2,5,8,11,14)+(3,6,7,9,15)：圖三可作爲代表解。
(4)列配(1,5,9,11,14)+(2,6,7,10,15)+(3,4,8,12,13)：圖四可作爲代表解。

1	2	11	14	12
15	13	3	4	5
8	9	10	6	7

圖一

1	2	11	14	12
15	9	3	6	7
8	13	10	4	5

圖二

1	13	10	4	12
8	2	11	14	5
15	9	3	6	7

圖三

1	9	11	14	5
15	2	10	6	7
8	13	3	4	12

圖四

〔丑〕行配〔1,8,15〕+〔2,10,12〕+〔3,7,14〕+〔4,9,11〕+〔5,6,13〕

與〔子〕互補：圖五至八（圖一至四之補解）可作爲代表解。

15	14	5	2	4
1	3	13	12	11
8	7	6	10	9

圖五

15	14	5	2	4
1	7	13	10	9
8	3	6	12	11

圖六

15	3	6	12	4
8	14	5	2	11
1	7	13	10	9

圖七

15	7	5	2	11
1	14	6	10	9
8	3	13	12	4

圖八

〔寅〕行配〔1,9,14〕+〔2,7,15〕+〔3,10,11〕+〔4,8,12〕+〔5,6,13〕

列配(1,3,8,13,15)+(2,6,9,11,12)+(4,5,7,10,14)：圖九可作爲代表解。

1	15	3	8	13
9	2	11	12	6
14	7	10	4	5

圖九

〔卯〕行配〔1,9,14〕+〔2,10,12〕+〔3,6,15〕+〔4,7,13〕+〔5,8,11〕

(1)列配 (1,3,11,12,13)+(2,4,5,14,15)+(6,7,8,9,10)：圖十可作爲代表解。

(2)列配 (1,4,8,12,15)+(2,5,6,13,14)+(3,7,9,10,11)：圖十一可作爲代表解。

(3)列配 (1,4,8,12,15)+(2,6,7,11,14)+(3,5,9,10,13)：圖十二可作爲代表解。

(4)列配 (1,5,7,12,15)+(2,3,8,13,14)+(4,6,9,10,11)：圖十三可作爲代表解。

(5)列配 (1,6,8,12,13)+(2,4,5,14,15)+(3,7,9,10,11)：圖十四可作爲代表解。

1	12	3	13	11
14	2	15	4	5
9	10	6	7	8

圖 十

1	12	15	4	8
14	2	6	13	5
9	10	3	7	11

圖十一

1	12	15	4	8
14	2	6	7	11
9	10	3	13	5

圖十二

1	12	15	7	5
14	2	3	13	8
9	10	6	4	11

圖十三

1	12	6	13	8
14	2	15	4	5
9	10	3	7	11

圖十四

〔辰〕行配〔**1,9,14**〕+〔**2,10,12**〕+〔**3,8,13**〕+〔**4,5,15**〕+〔**6,7,11**〕

(1)列配 (1,3,10,11,15)+(2,4,7,13,14)+(5,6,8,9,12)：圖十五可作爲代表解。

(2)列配 (1,3,10,11,15)+(2,5,6,13,14)+(4,7,8,9,12)：圖十六可作爲代表解。

(3)列配 (1,5,10,11,13)+(2,3,6,14,15)+(4,7,8,9,12)：圖十七可作爲代表解。

(4)列配 (1,5,10,11,13)+(2,6,8,9,15)+(3,4,7,12,14)：圖十八可作爲代表解。

(5)列配 (1,6,8,10,15)+(2,4,7,13,14)+(3,5,9,11,12)：圖十九可作爲代表解。

(6)列配 (1,6,8,10,15)+(2,5,9,11,13)+(3,4,7,12,14)：圖二十可作爲代表解。

1	10	3	15	11
14	2	13	4	7
9	12	8	5	6

圖十五

1	10	3	15	11
14	2	13	5	6
9	12	8	4	7

圖十六

1	10	13	5	11
14	2	3	15	6
9	12	8	4	7

圖十七

1	10	13	5	11
9	2	8	15	6
14	12	3	4	7

圖十八

1	10	8	15	6
14	2	13	4	7
9	12	3	5	11

圖十九

1	10	8	15	6
9	2	13	5	11
14	12	3	4	7

圖二十

〔巳〕行配〔**1,10,13**〕+〔**2,7,15**〕+〔**3,9,12**〕+〔**4,6,14**〕+〔**5,8,11**〕

與〔卯〕互補：圖二十一至二十五（圖十至十四之補解）可作爲代表解。

15	4	13	3	5
2	14	1	12	11
7	6	10	9	8

圖二十一

15	4	1	12	8
2	14	10	3	11
7	6	13	9	5

圖二十二

15	4	1	12	8
2	14	10	9	5
7	6	13	3	11

圖二十三

15	4	1	9	11
2	14	13	3	8
7	6	10	12	5

圖二十四

15	4	10	3	8
2	14	1	12	11
7	6	13	9	5

圖二十五

〔午〕行配〔1,10,13〕+〔2,8,14〕+〔3,6,15〕+〔4,9,11〕+〔5,7,12〕

列無適當三節五數組鏈可配：無解。

〔未〕行配〔1,10,13〕+〔2,8,14〕+〔3,9,12〕+〔4,5,15〕+〔6,7,11〕

(1)列配(1,3,7,14,15)+(2,5,9,11,13)+(4,6,8,10,12)：圖二十六可作為代表解。

(2)列配(1,3,7,14,15)+(2,5,10,11,12)+(4,6,8,9,13)：圖二十七可作為代表解。

(3)列配(1,5,9,11,14)+(2,3,7,13,15)+(4,6,8,10,12)：圖二十八可作為代表解。

(4)列配(1,7,8,9,15)+(2,5,10,11,12)+(3,4,6,13,14)：圖二十九可作為代表解。

1	14	3	15	7
13	2	9	5	11
10	8	12	4	6

圖二十六

1	14	3	15	7
10	2	12	5	11
13	8	9	4	6

圖二十七

1	14	9	5	11
13	2	3	15	7
10	8	12	4	6

圖二十八

1	8	9	15	7
10	2	12	5	11
13	14	3	4	6

圖二十九

〔申〕行配〔1,11,12〕+〔2,7,15〕+〔3,8,13〕+〔4,6,14〕+〔5,9,10〕

與〔辰〕互補：圖三十至三十五（圖十五至二十之補解）可作為代表解。

15	6	13	1	5
2	14	3	12	9
7	4	8	11	10

圖三十

15	6	13	1	5
2	14	3	11	10
7	4	8	12	9

圖三十一

15	6	3	11	5
2	14	13	1	10
7	4	8	12	9

圖三十二

15	6	3	11	5
7	14	8	1	10
2	4	13	12	9

圖三十三

15	6	8	1	10
2	14	3	12	9
7	4	13	11	5

圖三十四

15	6	8	1	10
7	14	3	11	5
2	4	13	12	9

圖三十五

〔酉〕行配〔1,11,12〕+〔2,8,14〕+〔3,6,15〕+〔4,7,13〕+〔5,9,10〕

與〔未〕互補：圖三十六至三十九（圖二十六至二十九之補解）可作爲代表解。

15	2	13	1	9
3	14	7	11	5
6	8	4	12	10

圖三十六

15	2	13	1	9
6	14	4	11	5
3	8	7	12	10

圖三十七

15	2	7	11	5
3	14	13	1	9
6	8	4	12	10

圖三十八

15	8	7	1	9
6	14	4	11	5
3	2	13	12	10

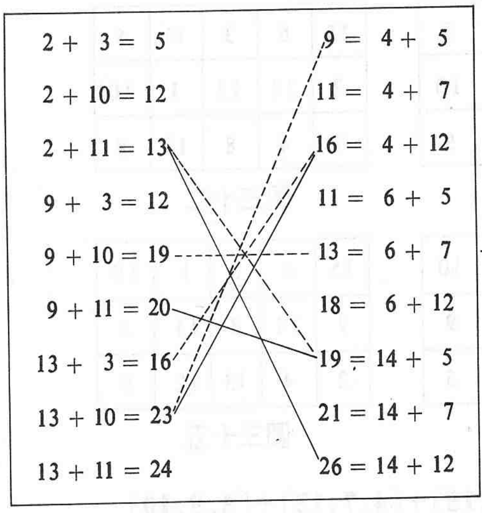
圖三十九

〔戌〕行配〔1,11,12〕+〔2,9,13〕+〔3,7,14〕+〔4,5,15〕+〔6,8,10〕

列無適當三節五數組鏈可配：無解。

總之：將上列39個代表作列置換與行置換（包括僅作一類置換及兼作二類置換），即得所有解；共有28080種配號法。

事實上，在上述解答過程中，於獲得11條五節三數組鏈後，亦可使用其他（多種）方法繼續推導之，以求出本題之（代表）解。茲以首條五節三數組鏈〔1,8,15〕+〔2,9,13〕+〔3,10,11〕+〔4,6,14〕+〔5,7,12〕（即〔子〕之情況）爲例，將其中一種解題步驟說明於後（參看下列二圖中之上圖或下圖）：①首先，由〔2,9,13〕與〔3,10,11〕中各取出一數相加之，即得九個和。②其次，由〔4,6,14〕與〔5,7,12〕中各取出一數相加之，又得九個和。③復次，由①所得九數與②所得九數中各取出一數，使其和爲39（圖中以實線標示者），如是即知可供包含1之列選配之五個號數共有三組，即1,2,11,14,12；1,9,11,14,5與1,13,10,4,12。④更次，由①所得九數與②所得九數中各取出一數，使其和爲32（圖中以虛線標示者），如是即知可供包含8之列選配之五個號數共有四組，即8,2,11,14,5；8,9,10,6,7；8,13,3,4,12與8,13,10,4,5。⑤最後，實際試求代表解：先將〔1,8,15〕中之1,8與15三數配予矩陣之第一行（1配上格，8配中格，15配下格），再取出③中實線所標示四數與④中虛線所標示四數全異者（例如③中之2,11,14,12與④中之9,10,6,7八數全異，可取之），將如此二線中實線所標示之四數按原序（如上例，依2,11,14,12之序）配予第一列之第二格，第三格，第四格及第五格，並將其中虛線所標示之四數按原序配予第二列之第二格，第三格，第四格及第五格，末將第三列剩餘四空格依據各行所配之三數組填入號數，即可配妥。如是，共得下圖右欄所示四個代表解。（附記：因解法不同，此處所得之代表解，與前法所得者頗有差異，但其所對應之三節五數組鏈，則與〔子〕項所得毫無二致也。）



1	2	11	14	12
8	9	10	6	7
15	13	3	4	5

1	2	11	14	12
8	13	10	4	5
15	9	3	6	7

1	9	11	14	5
8	13	3	4	12
15	2	10	6	7

1	13	10	4	12
8	2	11	14	5
15	9	3	6	7

2 + 3 = 5	9 = 4 + 5
2 + 10 = 12	11 = 4 + 7
9 + 3 = 12	11 = 6 + 5
2 + 11 = 13	13 = 6 + 7
13 + 3 = 16	16 = 4 + 12
9 + 10 = 19	18 = 6 + 12
9 + 11 = 20	19 = 14 + 5
13 + 10 = 23	21 = 14 + 7
13 + 11 = 24	26 = 14 + 12

→

1	2	11	14	12
8	9	10	6	7
15	13	3	4	5

1	2	11	14	12
8	13	10	4	5
15	9	3	6	7

1	9	11	14	5
8	13	3	4	12
15	2	10	6	7

1	13	10	4	12
8	2	11	14	5
15	9	3	6	7

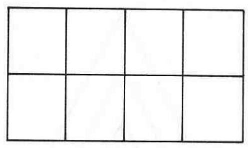
當然，〔寅〕,〔卯〕,〔辰〕,〔午〕,〔未〕與〔戌〕六種情況，均可仿上處理之；其餘情況，則可逕藉互補概念以求（代表）解也。

評　　註

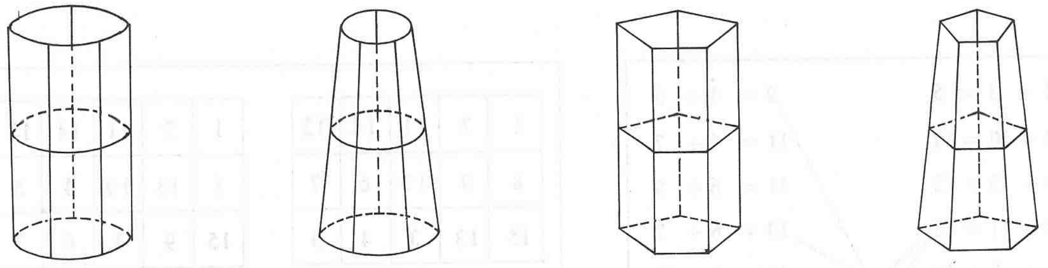
為簡化解題手續，縮短解題過程，作者於實際求出〔子〕,〔卯〕,〔辰〕與〔未〕各種情況之（代表）解後，即逕用互補概念以得〔丑〕,〔巳〕,〔申〕與〔酉〕各種情況之(代表)解。再者，為省篇幅，〔寅〕,〔卯〕,〔辰〕,〔午〕,〔未〕與〔戌〕六項皆「述而不作」，讀者宜實際作出其中所述之結果。

基本上，本題第一種解法，係先利用三數組表以求出矩陣五行可選配之五節三數組鏈，而後對於如是所得之五節三數組鏈，藉五數組表以檢驗矩陣三列是否有適當之三節五數組鏈可配；若有，並可藉以求出三列可配之三節五數組鏈。(〔丑〕,〔巳〕,〔申〕與〔酉〕四種情況亦可如此處理之，但據前所述，以逕用互補概念求解較為便捷。）當然，亦可「倒行逆施」，即先利用五數組表以求出矩陣三列可選配之三節五數組鏈，而後對於如此所得之三節五數組鏈，逐條檢驗矩陣五行是否有適當之五節三數組鏈可配；若有，並求出如是之五節三數組鏈。但如此進行以求解，其手續相當繁瑣，讀者無妨實際嘗試之。

原題顯然與下述問題相當：㈠將下圖所示之 15 個格子點（lattice point）由 1 至 15 配號，使每一條橫線上五點之號數和均相等，且每一條縱線上三點之號數和亦均相等，試求所有配號法。

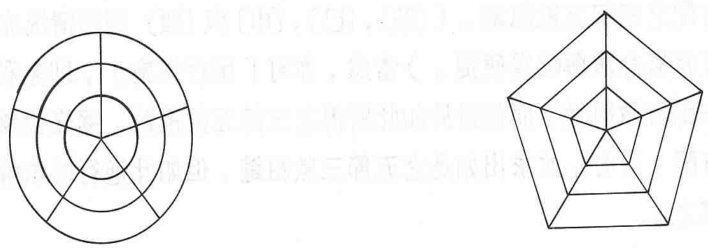


㈡將下列各圖所示之 15 個交點由 1 至 15 配號，使同高五點之號數和均相等，且側稜三點之號數和亦均相等，試求所有配號法。〔註：仿此，將㈠之圖形適當搬至輪胎面（ torus ），亦可得相當之問題。〕

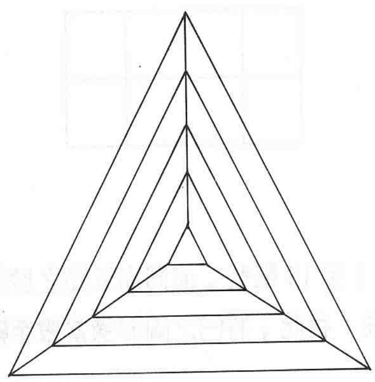


㈢將下左（右）圖所示之 15 個交點由 1 至 15 配號，使每一個圓上五點（每一個五邊形五頂點）之號數和均相等，且輻狀排列線段每條三點之號數和亦均相等，試求所有配號法。〔註：將下列二圖與問題㈠之圖形比較，或將問題㈡平面化，均可得之。〕

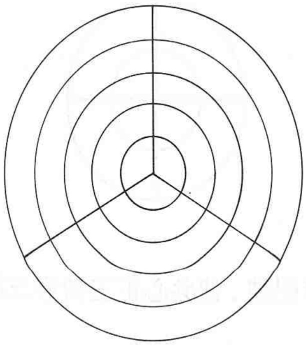
㈣將下左（右）圖所示之 15 個平面區域由 1 至 15 配號，使全等五個區域（即同層五個區域）之號數和均相等，且每一個五分輪盤（且由大五邊形之五條頂心連接線段所分割成之每一部分）三個區域之號數和亦均相等，試求所有配號法。〔註：將下列二圖與原題之圖形比較，可得之；先將原題之圖形適當搬至輪胎面，圓柱（圓錐，圓錐臺）側面或五角柱（五角錐，五角錐臺）側面，再將所得之問題平面化，亦可得之。〕



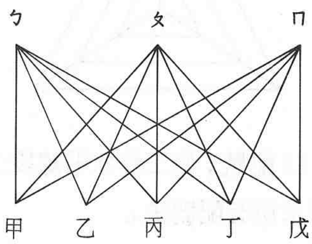
若將原題，前述輪胎面之相關問題及以上所述諸問題，皆歸類為 3×5 型者，則對應之 5×3 型諸問題，當然均與本文原題同意。為省篇幅，僅述其中二題於下：㈤將下圖所示之 15 個交點由 1 至 15 配號，使共心正三角形三頂點之號數和均相等，且共線五點之號數和亦均相等，試求所有配號法。



(六)將下圖所示之 15 個平面區域由 1 至 15 配號，使全等三個區域(即同層三個區域)之號數和均相等，且每一個三分輪盤五個區域之號數和亦均相等，試求所有配號法。

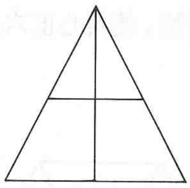


再者，若將對偶原理(principle of duality)應用於上述問題(一)或(一)所對應之5×3型問題，可知本文原題亦與下述問題等價：(七)將構成下圖之 15 條線段由 1 至 15 配號，使經過ㄅ,ㄆ,ㄇ各點五條線段之號數和均相等，且經過甲，乙，丙，丁，戊各點三條線段之號數和亦均相等，試求所有配號法。

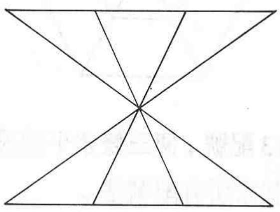


習　題

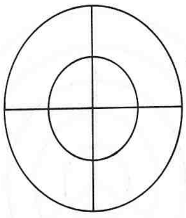
(一)將下圖所示七個交點由 1 至 7 配號，使二條水平線段上三點之號數和相等，且其他方向三條線段上三點之號數和亦均相等，試求所有配號法。



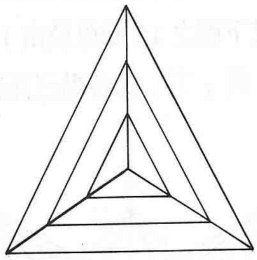
(二)將下圖所示九個交點由 1 至 9 配號，使二條水平線段上四點之號數和相等，且其他方向四條線段上三點之號數和亦均相等，試求所有配號法。



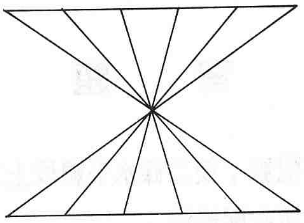
㈢將下圖所示九個交點由 1 至 9 配號，使二個圓上四點之號數和相等，且二條直徑上五點之號數和亦相等，試求所有配號法。



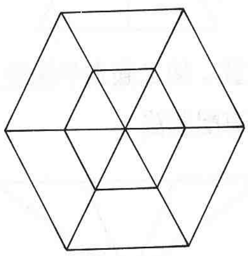
㈣將下圖所示十個交點由 1 至 10 配號，使共心正三角形三頂點之號數和均相等，且共線四點之號數和亦均相等，試求所有配號法。



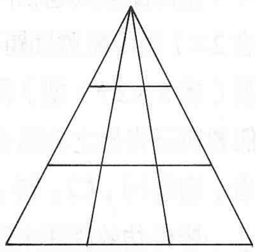
㈤將下圖所示十三個交點由 1 至 13 配號，使二條水平線段上六點之號數和相等，且其他方向六條線段上三點之號數和亦均相等，試求所有配號法。



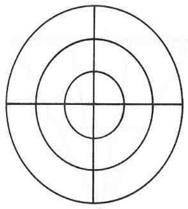
㈥將下圖所示十三個交點由 1 至 13 配號，使共心正六邊形六頂點之號數和相等，且共線五點之號數和亦均相等，試求所有配號法。



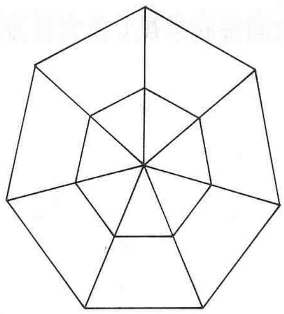
㈦將下圖所示十三個交點由 1 至 13 配號，使三條水平線段上四點之號數和均相等，且其他方向四條線段上四點之號數和亦均相等，試求所有配號法。



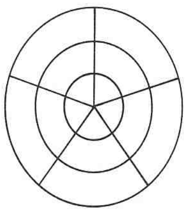
㈧將下圖所示十三個交點由 1 至 13 配號，使三個圓上四點之號數和均相等，且二條直徑上七點之號數和亦相等，試求所有配號法。〔提示：與㈥比較。〕



㈨將下圖所示十五個交點由 1 至 15 配號，使共心正七邊形七頂點之號數和相等，且輻狀排列線段每條三點之號數和亦均相等，試求所有配號法。

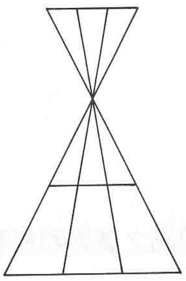
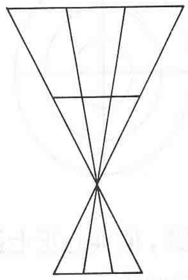
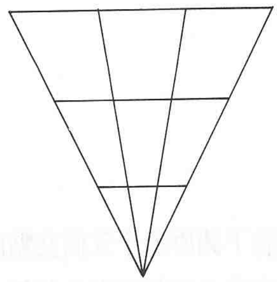


㈩將下圖所示十六個交點由 1 至 16 配號，使三個圓上五點之號數和均相等，且五條半徑上四點之號數和亦均相等，試求所有配號法。

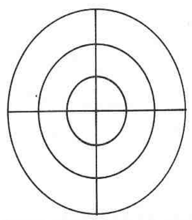
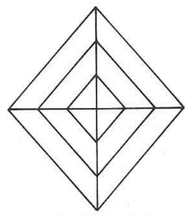


附記：若將上述習題㈠，㈡，㈤與㈦在水平線段外之唯一交點，㈢，㈧與㈩之同心圓圓心，以及㈣，㈥與㈨之共心正 n 邊形中心除去，可知習題㈠至㈩實際上包含 2×3，2×4，2×6，2×7，3×3，3×4 以及 3×5 矩陣配號問題在內。〔詳言之：㈠包含 2×3 矩陣配號問題在內；㈡包含 2×4 矩陣配號問題在內；㈢包含㈡及 2×4 矩陣配號問題在內；㈣包含 3×3 矩陣配號問題在內；㈤包

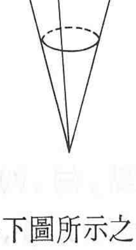
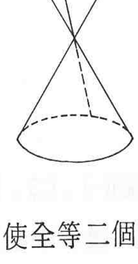
含 2×6 矩陣配號問題在內；㈦包含 3×4 矩陣配號問題在內；㈥與㈧等價，二者俱包含㈤，㈦及 2×6 與 3×4 矩陣配號問題在內；㈨包含 2×7 矩陣配號問題在內；㈩包含 3×5 矩陣配號問題在內。〕至於上述十題中未出現之 $2\times 5+1$ 型（或 $5\times 2+1$ 型）問題，則已列爲「五角星形配號問題㈠」一文之習題㈠矣。解題者若能注意二偶數與三奇數之和爲奇數之事實，甚易證明此題必然無解，是以將之歸入該處而不收錄於此也。再者，習題㈠，㈡，㈣，㈤，㈦，㈨與㈩俱呈 $m\times n+1$ 型〔㈠爲 $2\times 3+1$ 型，㈡爲 $2\times 4+1$ 型，……〕，皆得仿效評註末段之㈠至㈥以列舉出與該 $m\times n+1$ 型問題同義之諸問題（包含對應之 $n\times m+1$ 型問題在內）。例如習題㈦既與下述問題相當：將下列各圖所示之 13 個交點由 1 至 13 配號，使三條水平線段上四點之號數和均相等，且其他方向四條線段上四點之號數和亦均相等，試求所有配號法。〔註：事實上，下中圖應視同下左圖，下右圖亦應視同㈦之圖形。〕

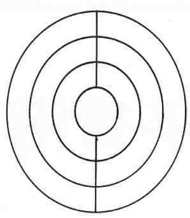
亦與下述問題無別：將下左（右）圖所示之 13 個交點由 1 至 13 配號，使每一個圓上四點（每一個正方形四頂點）之號數和均相等，且大圓每條半徑（且大正方形每條頂心連接線段）上四點之號數和亦均相等，試求所有配號法。

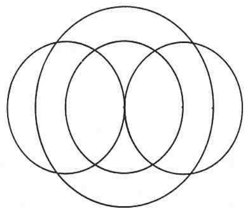
又如習題㈠既與下述問題相當：將下左圖所示圓錐面及下右圖所示雙圓錐面之七個交點由 1 至 7 配號，使同高三點之號數和相等，且三條稜上三點之號數和亦均相等，試求所有配號法。

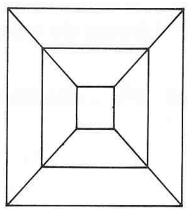
亦與下述問題無別：將下圖所示之七個平面區域由 1 至 7 配號，使全等二個區域（即同層二個區域）之號數和均相等，且最大圓水平方向半徑所經四個區域之號數和亦相等，試求所有配號法。



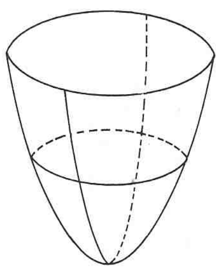
其餘甚多，留予讀者練習之。對於習題㈢，㈥與㈧，則均可摹擬評註末段之㈠至㈣以敍述出其等價問題。例如習題㈢既與下述問題同義：將下圖所示九個交點由 1 至 9 配號，使同心圓上四點之號數和相等，且相切圓上五點之號數和亦相等，試求所有配號法。

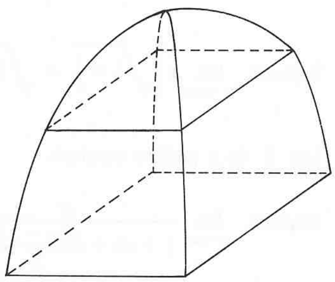


又與下述問題相當：將下圖所示九個平面區域由 1 至 9 配號，使全等四個區域（即同層四個區域）之號數和相等，且中縱線所經五個區域之號數和與中橫線所經五個區域之號數和亦相等，試求所有配號法。



更與下述問題無異：將下左圖所示機車車前燈鏡面〔爲圓拋物面（circular paraboloid)〕及下右圖所示四角餐桌紗罩面之九個交點由 1 至 9 配號，使同高四點之號數和相等，且二條拋物線上五點之號數和亦相等，試求所有配號法。





其餘不少，亦留作習題。最後，對於一般之 $m\times n$ 型問題及 $m\times n+1$ 型問題，有志讀者不妨研究之。當然，後者爲前者之推廣，二者均包含魔方陣（magic square ）問題在內，且俱爲高難度之問題也。