Bernoulli數與

Bernoulli多項式(上)

余文卿

從1到n的正整數和、平方和或立方和都可寫成n的多項式。如：

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad 。$$

而對於一般的m-次方的和

$$S_m(n)=\sum_{k=1}^{n-1} k^m = 1^m+2^m+\cdots+(n-1)^m \ ,$$

是否也可以寫成n的多項式呢？答案是肯定的，出現在$S_m(x)$中的係數即是鼎鼎有名的Bernoulli數(Bernoulli numbers)。這類數首先被Jacob Bernoulli(1654－1705)引用到高冪次方的求和公式，Euler(1707－1783)在導出高冪次的求和公式後，將這些數稱爲Bernoulli數。

Euler導出的求和公式是

$$\frac{dS_m(x)}{dx} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B_k x^{m-k}, \ S_m(0)=0$$

亦即

$$S_m(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k x^{m+1-k}$$

其中$\binom{m}{k}$是二項係數，而$B_k(k=0,1,2\ldots\ldots)$是Bernoulli數，可由$z/(e^z-1)$的冪級數展開而得出；即

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n z^n}{n!} \ , \quad |z| < 2\pi \ 。$$

而多項式

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B_k x^{m-k} \ 。$$

稱爲Bernoulli多項式，以$B_m(x)$表示。

Bernoulli數與Bernoulli多項式可分別看成Riemann zeta-函數$\zeta(s)$與Hurwitz zeta函數$\zeta(s,\delta)$在負整數的取值，當$\mathrm{Re}\, s>1$，這兩種zeta-函數分別定義爲

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \ , \ \zeta(s;\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\delta)^{-s} 。$$

它們都可經由解析延拓到整個s-平面上，而對任意正整數m

$$\zeta(1-m) = (-1)^{m-1}\frac{B_m}{m} \ , \ \zeta(1-m;\delta) = -\frac{B_m(\delta)}{m} \ ,$$

利用這樣的關係式，我們導出一些有關Bernoulli數與Bernoulli多項式的等式(第二節)。

另一方面，古典的Kummer同餘式

$$\frac{B_{m+p-1}}{m+p-1} \equiv \frac{B_m}{m} \pmod{p}$$

可擴充爲

$$m_1 \equiv m_2 (\mathrm{mod}\ \varphi(n)) \Rightarrow [\prod_{p|n} (1-p^{m_1-1})]\frac{B_{m_1}}{m_1}$$

$$\equiv [\prod_{p\mid n}(1-p^{m_2-1})]\frac{B_{m_2}}{m_2}(\mathrm{mod}\ n) \text{。}$$

經由 p-adic 語言，這種同餘式可看得比較清楚；然而需引進 p-adic 積分與 p-adic範數(第三節)。

最後，我們經由兩種看法來解釋一些 Bernoulli數的遞廻關係式，如

$$-(2n+1)B_{2n}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!}B_{2k}B_{2n-2k}$$

利用同樣的技巧，我們導出一些新的遞廻關係式(第四節)。

第一節　基本性質

1-1　Bernoulli數的定義

Bernoulli 數$B_m(m=0,1,2,\cdots\cdots)$是由函數$z/(e^z-1)$的冪級數所定義，即

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n z^n}{n!}\quad,|z|<2\pi \text{。}$$

利用

$$z=(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n z^n}{n!})(e^z-1)$$

$$=(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n z^n}{n!})(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{m+1}}{(m+1)!}),$$

比較兩邊的係數得出

$$B_0=1,\quad B_1+\frac{1}{2!}B_0=0,$$

$$\frac{B_2}{2!1!}+\frac{B_1}{1!2!}+\frac{B_0}{3!}=0,\cdots\cdots$$

或改寫成

$$B_0=1,\ B_0+2B_1=0,\ B_0+3B_1+3B_2=0 \text{。}$$

一般地，

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k=0,\quad n\geq 2 \text{。}$$

這就是Bernoulli數的遞廻定義式，由這式子可很容易計算出前面幾個Bernoulli 數如下：

$$B_0=1,\ B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0,$$

$$B_4=-\frac{1}{30},\ B_5=0,\ B_6=\frac{1}{42},\ B_7=0,$$

$$B_8=-\frac{1}{30},\ B_9=0,\ B_{10}=\frac{5}{66},\ B_{11}=0,$$

$$B_{12}=-\frac{691}{2730},\ B_{13}=0,\ B_{14}=\frac{6}{7},\ B_{15}=0,$$

$$B_{16}=-\frac{3617}{510} \text{。}$$

命題 1：對任意正整數k，$B_{2k+1}=0$。

證明：考慮

$$f(z)=\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2}=\frac{z(e^z-1)}{2(e^z-1)},$$

則有

$$f(-z)=\frac{(-z)(e^{-z}+1)}{2(e^{-z}-1)}=\frac{-z(e^z+1)}{2(1-e^z)}=f(z),$$

即$f(z)$是偶函數，故$f(z)$的冪級數展開式中奇數項的係數是0；又

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_m z^m}{m!}+\frac{z}{2},$$

故　$B_{2k+1}=0$　。

1-2　負偶次方的級數和

在西元 1735 年，Euler 利用超越方程式$y=\sin s$的根與係數關係，得出

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

他更進一步得出：對一般的正整數m，$\zeta(2m)=Q_m\pi^{2m}$　其中Q_m是有理數。

Euler 的證明方法在當時引起很大的爭議，其中質疑最強烈的是下面兩點：

(1)多項式方程式使用的根與係數的關係是否能一成不便地運用到超越方程式上面？

(2)方程式　$\sin s=0$ 除了可見的實數解$s=n\pi$，$n\in Z$外，是否還會有其他的複數解？

到 1740 年，Euler 發現了正弦函數的無窮乘積表示，即

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

這至少清除了第二個疑點。利用這無窮乘積，Euler 也得到 $\zeta(2m)=Q_m\pi^{2m}$ 的另一個證明。

命題 2：對任意正整數 m，

$$\zeta(2m)=\frac{(-1)^{m-1}(2\pi)^{2m}B_{2m}}{2(2m)!}$$

證明：取 $\log\sin z$ 的微分得出

$$\cot z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-(n\pi)^2}\ 。$$

又另一方面

$$\cot z=i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}=i+\frac{2i}{e^{2iz}-1}$$

故

$$\frac{z}{e^z-1}=1-\frac{z}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{z^2+(2n\pi)^2}$$

然而

$$\frac{z^2}{z^2+(2n\pi)^2}=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\left(\frac{z}{2n\pi}\right)^{2m}$$

故

$$\frac{z}{e^z-1}=1-\frac{z}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{z^{2m}}{(2n\pi)^{2m}}$$

$$=1-\frac{z}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{2\zeta(2m)}{(2\pi)^{2m}}z^{2m}\ 。$$

比較 z 的係數得出

$$\frac{B_{2m}}{(2m)!}=(-1)^{m-1}\frac{2\zeta(2m)}{(2\pi)^{2m}}$$

故

$$\zeta(2m)=\frac{(-1)^{m-1}(2\pi)^{2m}B_{2m}}{2(2m)!}$$

直到目前爲止，除已證明 $\zeta(3)$ 是無理數外，對於 $\zeta(2m+1)$ 的值尙一無所知，甚至尙無法知道 $\zeta(2m+1)$ 是否是超越數或無理數。

另一方面，交錯級數

$$L(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$$

在奇正整數 $2m-1$ 的取値爲 π^{2m-1} 的有理數倍；更準確地說，

$$L(2m-1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2m-1}}$$

$$=(-1)^m\frac{(2\pi)^{2m-1}}{2(2m-1)!}B_{2m-1}\left(\frac{1}{4}\right)$$

特別地，由 $B_1(x)=x-\frac{1}{2}$，$B_3(x)=x(x-1)(x-\frac{1}{2})$ 得出

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}=\frac{\pi}{4}\ ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^3}{32}\ 。$$

以上式子的證明請參考1-7有關 Bernoulli 多項式的級數展開。

1-3 Bernoulli多項式的定義

Bernoulli 多項式 $B_m(x)$ 定爲

$$B_m(x)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}B_kx^{m-k}$$

其生成函數是 $ze^{xz}/(e^z-1)$，即

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_m(x)z^m}{m!}\ ,\ |z|<2\pi\ 。$$

特別當 $x=0$ 時，$B_m(0)=B_m$，又 $B_m(x)$ 的首項 x^m 的係數是 $B_0=1$ 。

命題 3：對任意正整數 m，

$$B_m(1-x)=(-1)^mB_m(x)\ 。$$

證明：這只是直接的驗證，由定義

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_m(1-x)z^m}{m!}$$

$$=\frac{ze^{(1-x)z}}{e^z-1}$$

$$=ze^{-xz}\frac{e^z}{e^z-1}$$

$$=ze^{-xz}+\frac{ze^{-xz}}{e^z-1}$$

$$=\left(z+\frac{z}{e^z-1}\right)e^{-xz}$$

$$=\left(z+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_kz^k}{k!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^nz^n}{n!}\right)$$

注意到$B_1=-\frac{1}{2}$且$B_{2k+1}=0$，故比較兩邊z^m的係數得出

$$B_m(1-x)=m!\Big[\frac{B_0}{m!}(-x)^m-\frac{B_1}{(m-1)!}(-x)^{m-1}$$
$$+\frac{B_2}{2!(m-2)!}(-x)^{m-2}+\cdots\cdots+\frac{B_m}{m!}\Big]$$
$$=(-1)^m\Big[B_0+\binom{m}{1}B_1x^{n-1}$$
$$+\binom{m}{2}B_2x^{m-2}+\cdots+\binom{m}{m}B_m\Big]$$
$$=(-1)^mB_m(x)\text{。}$$

推論：若k是正整數，則 $B_{2k+1}(\frac{1}{2})=0$ 。

證明：$B_{2k+1}(1-x)=-B_{2k+1}(x)$ ，

$x=\frac{1}{2}$代入得 $B_{2k+1}(\frac{1}{2})=-B_{2k+1}(\frac{1}{2})$ 。

故 $B_{2k+1}(\frac{1}{2})=0$

第二節 簡單的zeta-函數

1-4 Hurwitz zeta-函數與 Riemann zeta-函數

對任意正數δ，Hurwitz Zeta 函數的定義是

$$\zeta(s;\delta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+\delta)^s}\text{，Re } s>1\text{，}$$

而有名的Riemann Zeta-函數的定義是

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\text{，Re } s>1\text{。}$$

比較之下，則有$\zeta(s)=\zeta(s;1)$，故我們底下只考慮較一般化的Hurwitz Zeta-函數。

階乘函數$\Gamma(s)$的積分定義爲

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}t^{s-1}e^{-t}dt\text{，Re } s>0\text{。}$$

當s是正整數時，這也是衆所周知的階乘函數，即

$$\Gamma(n+1)=n!\text{。}$$

又$\Gamma(s)$滿足泛方程式

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)\text{。}$$

命題4：對任意s滿足Re $s>1$，我們有

$$\Gamma(s)\zeta(s;\delta)=\int_0^{\infty}\frac{t^{s-1}e^{(1-\delta)t}dt}{e^t-1}$$

證明：經由簡單的變數變換可得

$$(n+\delta)^{-s}\Gamma(s)=\int_0^{\infty}t^{s-1}e^{-(n+\delta)t}dt\text{，}$$
$$\text{Re } s>0$$

故在Re $s>1$時，

$$\Gamma(s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+\delta)^s}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}t^{s-1}e^{-(n+\delta)t}dt\text{。}$$

由Lebesque的Dominating Convergence Theorem,右式的積分與Σ可互換而得

$$\Gamma(s)\zeta(s;\delta)=\int_0^{\infty}t^{s-1}(\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(n+\delta)t})dt$$
$$=\int_0^{\infty}\frac{t^{s-1}e^{-\delta t}dt}{1-e^{-t}}$$
$$=\int_0^{\infty}\frac{t^{s-1}e^{(1-\delta)t}dt}{e^t-1}$$

現我們利用上面的積分式定出$\zeta(s;\delta)$的解析延拓，並進一步求出$\zeta(s;\delta)$在負整數與0的取值。

定理1：視爲s的解析函數，$\zeta(s;\delta)$在s-平面上有其解析延拓。延拓出來的函數除在$s=1$有一單極點外，在其他地方都是可解析，且滿足下面的性質。

(1) $\zeta(s;\delta)$在$s=1$的留數是1。

(2)對任意正整數，

$$\zeta(1-m;\delta)=-\frac{B_m(\delta)}{m}\text{。}$$

證明：對任意$\varepsilon>0$，以$L(\varepsilon)$表示路徑：從$+\infty$到ε，依逆時針方向繞圓$|z|=\varepsilon$一圈，再由ε回到$+\infty$，如下圖所示：

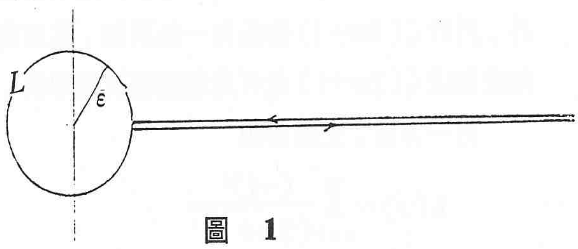

圖 1

對 Re $s>1$，

$$\int_{L(\varepsilon)}\frac{z^{s-1}e^{(1-\delta)z}dz}{e^z-1}$$

$$=(e^{2\pi is}-1)\int_0^\infty\frac{t^{s-1}e^{(1-\delta)t}dt}{e^t-1}$$

$$+\int_{|z|=\varepsilon}\frac{z^{s-1}e^{(1-\delta)z}dz}{e^z-1}。$$

定 $M=\max\limits_{|z|=\varepsilon}|ze^{(1-\delta)z}/(e^z-1)|$，

則有

$$\left|\int_{|z|=\varepsilon}\frac{z^{s-1}e^{(1-\delta)z}dz}{e^z-1}\right|\leqslant\varepsilon^{(Re\ s-1)}(2\pi M)。$$

因而 Re $s>1$ 時，

$$(e^{2\pi is}-1)\Gamma(s)\zeta(s,\delta)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{L(\varepsilon)}\frac{z^{s-1}e^{(1-\delta)z}dz}{e^z-1}。$$

但右式的積分與 ε 無關，可去掉極限，而直接寫成

$$(e^{2\pi is}-1)\Gamma(s)\zeta(s;\delta)$$

$$=\int_{L(\varepsilon)}\frac{z^{s-1}e^{(1-\delta)z}dz}{e^z-1}$$

利用 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin\pi s}=\dfrac{2\pi i\ e^{\pi is}}{e^{2\pi is}-1}$；

式子兩邊同乘上 $\Gamma(1-s)$ 可得出

$$\zeta(s;\delta)$$

$$=e^{-\pi is}\Gamma(1-s)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{L(\varepsilon)}\frac{z^{s-1}e^{(1-\delta)z}dz}{e^z-1},$$

上面的積分表現式適用於 Re $s\leqslant1$ 的情形，也就是 $\zeta(s;\delta)$ 在 s- 平面的解析延拓。

$s=1$ 時，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L(\varepsilon)}\frac{e^{(1-\delta)z}dz}{e^z-1}=1。$$

而 $\Gamma(1-s)$ 在 $s=1$ 是單極點，且留數是 -1，故 $\zeta(s;\delta)$ 在 $s=1$ 也是單極點，留數是 1。

當 $s=1-m$ 是負整數或零時，從 $+\infty$ 到 ε 與從 ε 到 $+\infty$ 的積分相消；故

$$\zeta(1-m;\delta)$$

$$=(-1)^{m-1}\Gamma(m)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon}\frac{z^{-m}e^{(1-\delta)s}dz}{e^z-1}$$

$$=(-1)^{m-1}(m-1)!\frac{B_m(1-\delta)}{m!}$$

$$=(-1)^{m-1}(m-1)!\frac{(-1)^mB_m(\delta)}{m!}$$

$$=-\frac{B_m(\delta)}{m}。$$

推論：對任意正整數 m，$\zeta(1-m)=(-1)^{m-1}B_m/m$。

到此，我們已經看出 Bernoulli 數與 Bernoulli 多項式分別是 Riemann Zeta- 函數與 Hurwitz Zeta - 函數在負整數的取值。即對任意正整數 m

$$\zeta(1-m)=\frac{(-1)^{m-1}B_m}{m},$$

$$\zeta(1-m;x)=-\frac{B_m(x)}{m}。$$

在下面的小節中，我們利用上面的取值公式導出一些常見的公式與等式。

1-5 正冪次方的有限和

以 $S_m(n)$ 表示 1 到 $n-1$ 的 m 次方的和，

即 $$S_m(n)=\sum_{k=1}^{n-1}k^m$$

命題 5：$(m+1)S_m(n)=\sum\limits_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_kn^{m+1-k}$。

證明：對任意 Re $s>1$，

$$\sum_{k=1}^{n-1}k^{-s}=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-s}-\sum_{k=0}^{\infty}(k+n)^{-s}$$

$$=\zeta(s)-\zeta(s;n)$$

$\zeta(s)$ 與 $\zeta(s,n)$ 在整個 s-平面上都有解析延拓，令 $s=-m$ 得出

$$S_m(n)=\sum_{k=1}^{n-1}k^m=\zeta(-m)-\zeta(-m;n)$$

$$=\frac{1}{m+1}((-1)^mB_{m+1}+B_{m+1}(n))$$

故 $(m+1)S_m(n)$

$$=\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}B_k n^{m+1-k}+(-1)^m B_{m+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k n^{m+1-k}$$

對任意兩正整數M，N，$N>M$，則有

$$\sum_{M}^{N-1}k^m=\zeta(-m;M-1)-\zeta(-m;N-1)$$

$$=-\frac{1}{m+1}B_{m+1}(M)+\frac{1}{m+1}B_{m+1}(N)$$

$$=\frac{1}{m+1}[B_{m+1}(N)-B_{m+1}(M)]$$

命題6：對任意正整數k與非負整數m，

$$B_m(kx)=k^{m-1}\sum_{j=0}^{k-1}B_m\left(x+\frac{j}{k}\right)。$$

證明：$m=0$時顯然成立，現只考慮m是正整數的情形。又式子兩邊都是x的多項式，只需證明$x>0$時即可。

對$x>0$以及$\mathrm{Re}\,s>1$，我們有

$$\zeta(s,kx)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+kx)^s}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{(km+j+kx)^s}$$

$$=k^{-s}\sum_{j=0}^{k-1}\zeta\left(s;x+\frac{j}{k}\right)$$

等式兩邊的Zeta-函數都有其解析延拓，取 $s=1-m$，則得出

$$-\frac{1}{m}B_m(kx)=k^{m-1}\sum_{j=0}^{k-1}\left(-\frac{1}{m}B_m\left(x+\frac{j}{k}\right)\right)$$

故

$$B_m(kx)=k^{m-1}\sum_{j=0}^{k-1}B_m\left(x+\frac{j}{k}\right)\quad。$$

討論：上面的關係式也經由Bernoulli多項式的生成函數得出。

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\left(\sum_{j=0}^{k-1}B_m\left(x+\frac{j}{k}\right)\right)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{ze^{xz}e^{jz/k}}{e^z-1}$$

$$=\frac{ze^{xz}}{e^{z/k}-1}$$

$$=k\frac{(z/k)e^{kx\cdot(z/k)}}{e^{z/k}-1}$$

$$=k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_m(kx)}{m!}\cdot\left(\frac{z}{k}\right)^m,$$

比較兩邊的z^m係數即得出所要的等式。

1-6 von Staudt定理

von Staudt定理在決定一Bernoulli數的分母時非常重要。事實上，這定理告訴我們：對任意正偶數m，只有那些$p-1$整除m的質數p才會出現在B_m的分母中，且冪次是1，

而 $$B_m+\sum_{(p-1)|m}\frac{1}{p}=G_m$$

是一整數。以B_4爲例

$$B_4+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 1)$$

$$B_4\equiv-\frac{1}{30}\ (\mathrm{mod}\ 1)。$$

將一有理數q寫成a/b的形式，而a與b互質。若b沒有質數p的因數，則稱q是p-整數。如3不是$\frac{9}{14}$之分母14的因數，故$\frac{9}{14}$是3-整數。

定理(von Staudt)：設p是質數且m是正偶數，則

(1)若$p-1$不是m的因數，則B_m是p-整數。

(2)若$p-1$是m的因數，則pB_m是p-整數。

且

$$pB_m\equiv-1\ (\mathrm{mod}\ p)。$$

證明：首先我們證明

$$pB_m\equiv S_m(p)=\sum_{k=1}^{p-1}k^m\ (\mathrm{mod}\ p)。$$

現用數學歸納法。將

$$S_m(p)=\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m+1-k)!}B_k p^{m+1-k}$$

改寫爲

$$pB_m=S_m(p)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{m+1}C(m+1,k)p^{m-k}(pB_k)。$$

由歸納假設 $pB_k(k=0,1,\cdots\cdots,m-1)$ 都是 p 整數，現考慮

$$\frac{1}{m+1}C(m+1,k)p^{m-k},$$

$p=2$ 時，$m+1$ 爲奇數，故正數是 2-整數。若 $p>2$，則

$$\frac{1}{m+1}C(m+1,k)=\frac{m(m-1)\cdots(k+1)}{(m-k+1)!}p^{m-k}\text{。}$$

定 $r=m-k+1$，則出現在 $r!$ 中 p 的冪次是

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{r}{p^j}\right]<\sum_{j=1}^{\infty}\frac{r}{p^j}=\frac{r}{p-1}\leqslant\frac{r}{2}\leqslant r-1=m-k$$

故 $\dfrac{1}{(m-k+1)}p^{m-k}$ 是一 p-整數，且可被 p 整除。因而

$$pB_m\equiv S_m(p)\pmod p\text{。}$$

(1)若 $p-1$ 是 m 的因數，則對 $1\leqslant k\leqslant p-1$。

$$k^m\equiv 1\pmod p$$

因而

$$S_m(p)\equiv\sum_{k=1}^{p-1}k^m\equiv\sum_{k=1}^{p-1}1=p-1\equiv-1\pmod p\text{。}$$

(2)若 $p-1$ 不是 m 的因數，取乘法群 $(\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})^*$ 的一生成元素 g，則

$$S_m(p)=\sum_{k=1}^{p-1}k^m\equiv\sum_{r=0}^{p-2}g^{mr}=\frac{g^{(p-1)m}-1}{g^m-1}$$

$$\equiv 0\pmod p$$

其中用到 $g^{p-1}\equiv1\pmod p$ 且 $g^m\not\equiv1\pmod p$。

討論：在第三節介紹 p-adic 積分後，我們將再用 p-adic 語言來看 von Staudt 定理。

1-7 Bernoulli多項式的富氏係數

對任意正整數 m，

$$\frac{d}{dx}B_{m+1}(x)=\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{m+1}\frac{(m+1)!}{k!(m+1-k)!}B_kx^{m+1-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\frac{(m+1)!}{k!(m-k)!}B_kx^{m-k}$$

$$=(m+1)B_m(x)\text{。}$$

因而

$$B_{m+1}(x)=(m+1)\int_0^x B_m(u)\,du+B_{m+1}\text{。}$$

由 $B_1(x)=x-\dfrac{1}{2}$，可很容易導出

$$B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6},$$

$$B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{x}{2},$$

$$B_4(x)=x^4-x^3+x^2-\frac{1}{30},$$

$$B_5(x)=x^5-\frac{5}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{x}{6}\text{。}$$

注意到 $m\geqslant2$ 時，

$$B_m(1)=(-1)^mB_m(0)=(-1)^mB_m,$$

$$B_m(0)=B_m\text{。}$$

當 m 是偶數時，$B_m(1)=B_m(0)$；而 m 是奇數時，$B_m(1)$ 與 $B_m(0)$ 都是 0，故無論如何，我們總有

$$B_m(1)=B_m(0),\quad m\geqslant2\text{。}$$

命題 7：設 $0<x<1$，則

$$B_{2m-1}(x)=2(-1)^m(2m-1)!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{(2n\pi)^{2m-1}},$$

$$B_{2m}(x)=2(-1)^{m-1}(2m)!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nx}{(2n\pi)^{2m}}\text{。}$$

證明：設

$$B_m(x)=\frac{a_0^{(m)}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_0^{(m)}\cos 2\pi nx$$

$$+b_0^{(m)}\sin 2\pi nx)\text{。}$$

而

$$a_n^{(m)}=2\int_0^1B_m(x)\cos 2\pi nx\,dx,$$

$$b_n^{(m)}=2\int_0^1B_m(x)\sin 2\pi nx\,dx\text{。}$$

分別考慮 $n=0$ 與 $n>0$ 的情形，$n=0$ 時

$$a_0^{(m)}=2\int_0^1B_m(x)\,dx$$

$$=\frac{2}{m+1}\int_0^1B'_{m+1}(x)\,dx$$

$$=\frac{2}{m+1}(B_{m+1}(1)-B_{m+1}(0))$$

$$= 0, \quad m = 1, 2, \cdots\cdots$$

而在$n>0$時，利用部分積分得

$$a_n^{(m)} = 2\left[B_m(x)\frac{\sin 2\pi nx}{2\pi n}\right]_0^1$$

$$-\frac{2}{2\pi n}\int_0^1 B_m(x)\sin 2\pi nx\,dx$$

$$= -\frac{2m}{2\pi n}\int_0^1 B_{m-1}(x)\sin 2\pi nx\,dx$$

$$= -\frac{m}{2\pi n}\,b_n^{(m-1)}, \quad m \geqslant 2\text{。}$$

同理

$$b_n^{(m)} = \frac{m}{2\pi n}\,a_n^{(m-1)}, \quad n \geqslant 1, \quad m \geqslant 2,$$

又 $$B_1(x) = x - \frac{1}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{\pi n}\text{。}$$

因而得出

$$a_n^{(2m-1)} = 0, \quad b_n^{(2m-1)} = (-1)^n\frac{2(2m-1)!}{(2\pi n)^{2m-1}}$$

$$a_n^{(2m)} = (-1)^{m-1}\frac{2(2m)!}{(2\pi n)^{2m}}, \quad b_n^{(2m)} = 0\text{。}$$

討論：除$B_1(x)$外，命題7事實上對$0 \leqslant x \leqslant 1$都成立，特別取$B_{2m}(x)$中的$x=0$，則得出

$$B_{2m} = 2(-1)^{m-1}(2m)!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi n)^{2m}}$$

即

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1}(2\pi)^{2m}B_{2m}}{2(2m)!}\text{。}$$

而另一方面，令$B_{2n-1}(x)$中的$x = \frac{1}{4}$，則得出

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2m-1}}$$

$$= (-1)^m\frac{(2\pi)^{2m-1}}{2(2m-1)!}B_{2m-1}\left(\frac{1}{4}\right)\text{。}$$

1-8 L─級數

從乘法群$(Z/NZ)^*$到$C^* = C - \{0\}$的同態(homomorphism)稱爲Dirichlet示性(Dirichlet character)，說清楚一點，函數$\chi:(Z/NZ)^* \to C^*$若滿足

$$\chi(ab) = \chi(a)\chi(b),$$

則稱χ是一Dirichlet示性，而N則稱爲χ的模。

引理：對任意χ，若χ不恆對映到1，則

$$\sum_{a \in (Z/NZ)^*}\chi(a) = 0$$

證明：取$b \in Z/NZ$，使$\chi(b) \neq 1$，則

$$\chi(b)\sum_{a \in (Z/NZ)^*}\chi(a) = \sum_{a \in (Z/NZ)^*}\chi(a)\chi(b)$$

$$= \sum_{a \in (Z/NZ)^*}\chi(ab) = \sum_{a \in (Z/NZ)^*}\chi(a)$$

因$\chi(b) \neq 1$，故

$$\sum_{a \in (Z/NZ)^*}\chi(a) = 0$$

一般也將模爲N的Dirichlet示性的定義域擴充爲整數全部，即

若N，n的最大公因數$d = (n, N) > 1$則定$\chi(n) = 0$。如此，χ依然滿足

$$\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$$

以χ_0表示恆對應到1的示性，則在$\chi \neq \chi_0$時

$$\sum_{a=1}^{N}\chi(a) = 0$$

現考慮帶示性$\chi \neq \chi_0$的L-級數

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s}, \quad \mathrm{Re}\ s > 1\text{。}$$

這類級數是Hurwitz zeta-函數的組合，即

$$L(s) = \sum_{a=1}^{N-1}\chi(a)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(a+kN)^s}$$

$$= N^{-s}\sum_{a=1}^{N-1}\chi(a)\zeta\left(s; \frac{a}{N}\right),$$

因而$L(s)$在整個s-平面上有其解析拓延，而在$s=1$時，因$\zeta(s; a/N)$的留數都是1，又$\sum_{a=1}^{N-1}\chi(a) = 0$，故$L(s)$在$s=1$也是可解析，故$L(s)$是一全純函數，對任意正整數$m$

$$L(1-m) = N^{m-1}\sum_{a=1}^{N-1}\chi(a)\left[-\frac{B_m(a/m)}{m}\right]$$

$$=-\frac{N^{m-1}}{m}\sum_{a=1}^{N-1}\chi(a)B_m\left(\frac{a}{m}\right)。$$

一般也定義 $B_{m,\chi}$ 爲

$$B_{m,\chi}=N^{k-1}\sum_{a=1}^{N-1}\chi(a)B_m\left(\frac{a}{m}\right) ,$$

稱爲帶示性的Bernoulli 多項式，而其生成函數是

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_{m,\chi}z^m}{m!}=\sum_{a=1}^{N-1}\frac{\chi(a)ze^{az}}{e^{Nz}-1}$$

底下我們計算 $L(1)$ 的取値。

命題 8：

$$L(1)=\frac{1}{N}\sum_{a=1}^{N-1}\chi(-a)\sum_{\ell=1}^{N-1}(1-e^{-2\pi i\ell a/N})$$

$$\cdot\ln(1-e^{-2\pi i\ell/N})$$

其中

$$\ln(1-e^{-2\pi i\ell/N})$$

$$=\ln(2\sin\frac{\pi\ell}{N})+\pi i(\frac{1}{2}-\frac{\ell}{M})。$$

證明：對 $\operatorname{Re} s>1$，則有

$$L(s)\Gamma(s)=\sum_{a=1}^{N-1}\chi(a)\int_0^{\infty}\frac{t^{s-1}e^{(N-a)t}dt}{e^{Nt}-1}$$

把 a 與 $N-a$ 的角色對調，則有

$$L(s)\Gamma(s)=\sum_{a=1}^{N-1}\chi(-a)\int_0^{\infty}\frac{t^{s-1}e^{at}dt}{e^{Nt}-1}$$

又 $\sum_{a=1}^{N-1}\chi(-a)=0$，故

$$L(s)\Gamma(s)=\sum_{a=1}^{N-1}\chi(-a)\int_0^{\infty}\frac{t^{s-1}(e^{at}-1)dt}{e^{Nt}-1}$$

而右邊的積分式在 $s=1$ 時也收斂，故

$$L(1)=\sum_{a=1}^{N-1}\chi(-a)\int_0^{\infty}\frac{(e^{at}-1)dt}{e^{Nt}-1}$$

現只需要算出積分值即可，經由 $e^{-t}=u$ 的變換得

$$\int_0^{\infty}\frac{(e^{at}-1)dt}{e^{Nt}-1}$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{(u^{N-a-1}-u^{N-1})du}{1-u^N}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{\ell=1}^{N-1}(1-e^{-2\pi i\ell a/N})\int_0^1\frac{du}{u-e^{2\pi i\ell/N}}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{\ell=1}^{N-1}(1-e^{-2\pi i\ell a/N})\ln(1-e^{-2\pi i\ell/N})$$

而

$$\ln(1-e^{-2\pi i\ell/N})$$

$$=\ln[(ie^{-\pi i\ell/N})(2\sin\frac{\pi\ell}{N})]$$

$$=\ln(2\sin\frac{\pi\ell}{N})+\pi i(\frac{1}{2}-\frac{\ell}{N})。$$

討論：其實上述積分是一實數值，而可改寫爲

$$L(1)=\frac{1}{N}\sum_{a=1}^{N-1}\chi(-a)\sum_{\ell=1}^{N-1}(2\sin^2\frac{\pi\ell a}{N})$$

$$\cdot\ln(2\sin\frac{\pi\ell}{N})-\frac{1}{N}\sum_{a=1}^{N-1}\chi(-a)$$

$$\cdot\sum_{\ell=1}^{N-1}(\frac{1}{2}-\frac{\ell}{N})\sin\frac{2\pi\ell a}{\ell}$$

特別在 $\chi(-1)=1$ 時

$$L(1)=\frac{1}{N}\sum_{a=1}^{N-1}\chi(a)\sum_{\ell=1}^{N-1}(2\sin^2\frac{\pi\ell a}{N})$$

$$\cdot\ln(2\sin\frac{\pi\ell}{N})$$

而在 $\chi(-1)=-1$ 時

$$L(1)=\frac{1}{N}\sum_{a=1}^{N-1}\chi(a)\sum_{\ell=1}^{N-1}(\frac{1}{2}-\frac{\ell}{N})\sin\frac{2\pi\ell a}{\ell}。$$

上面的結果與用其他方法(如〔2〕)所得到的吻合。

(未完待續)

—本文作者任教於國立中正大學應數所—