基本群與非正曲流形

翁秉仁

一、前　言

世紀之交，Poincaré 引進（拓樸）空間〔註 1〕上之同倫群（homotopy groups）與同調群（homology groups）等代數結構，希望藉由空間上自然的代數訊息，能對空間的分類作出決定性的刻劃。這個基本的想法可以圖示如下：

設 $\dim X=\dim Y$

$$(*)\quad \begin{array}{ccc} \pi_*(X)=\pi_*(Y) & \overset{?}{\Leftrightarrow} & \\ \Updownarrow ? & & X \overset{\text{Top}}{=\!=} Y \\ H_*(X)=H_*(Y) & \overset{?}{\Leftrightarrow} & (\text{甚至 } X \overset{\text{Diff}}{=\!=} Y) \end{array}$$

$\overset{\text{Top}}{=\!=}$ 同胚（homeomorphism）

$\overset{\text{Diff}}{=\!=}$（diffeomorphism）

首先我們當然要把一些無聊的反例去掉，因此從現在起文中所謂的空間都泛指流形。對於 1 或 2 維的流形而言，上述的想法是正確的，但在 3 維流形出現了反例：

1. 由 Poincaré 球的建構——$\exists X^3$，$H_*(X)=H_*(S^3)$ 但 $\pi_1(X)\neq 1$，我們知道同調群不能決定同倫群。

2. 由於 Lense space 的反例，我們也知道同倫群本身並不足以決定空間本身。事實上我們只有底下的已知結果：

$(**)\qquad \pi_*(X)=\pi_*(Y)\Longleftrightarrow X\simeq Y$，

$\simeq$ 同倫對等（homotopy equivelence）

也就是一系列的群（其中只有基本群 π_1 可能不是 abelian），僅能刻劃出一個比同胚弱的分類——同倫型式（homotopy type）〔註 2〕。

定義：（aspherical）

若 $\pi_i(X)=1$，$i\geqslant 2$，則稱 X 是 aspherical 流形。

Aspherical 流形的特徵是它的萬有覆蓋（universal covering）是一個 contractible 空間。

例 1：（非正曲（黎曼）流形是 aspherical 流形）

Cartan-Hadamad 定理說，若M^n是完備非正曲流形，在M上任取一點p，則由p的切空間M_p到M的 exp 映射是一個覆蓋映射，但是$M_p \overset{\text{Diff}}{=\!=} R^n$是單連通的，因此$R^n$是$M$的一個 contractible 萬有覆蓋，所以非正曲流形都是 aspherical 流形。

由(**)可知，aspherical 流形的基本群決定了它的同倫型式。Borel 在 50 年代提出了一個類似(*)的猜測：

Borel 猜測〔註 3〕

若X，Y是閉 aspherical 流形，而且 $\dim X = \dim Y$，

則 $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y) \Longleftrightarrow X \overset{\text{Top}}{=\!=} Y$

($\Leftarrow$)方向是顯然的，($\Rightarrow$)可以這樣說明：

若$f: X \to Y$是一連續映射而且f_*：$\pi_1(X) \to \pi_1(Y)$是群同構，則f會同倫於一個同胚映射$g: X \to Y$。

二、基本群與非正曲流形的結構

由基本群來決定拓樸（幾何）結構的原則，在微分幾何內起了重大的作用，並得到許多豐盛的結果。這些結果主要是集中在非正曲流形這個已知是 aspherical 的子類上〔註4〕。

即使先不考慮 Borel 猜測，由於非正曲流形的代數拓樸訊息全部集中在基本群上，我們自然希望基本群的結構本身能夠反映出該流形的幾何結構，在這個方向上有許多有趣的定理。

Pressman 定理：

M爲緊緻黎曼流形，$K_M < 0$，若Γ是$\pi_1(M)$的 abelian 子群，則$\Gamma \cong \mathbf{Z}$。

定理（丘成桐）：

M爲緊緻黎曼流形，$K_M \leqslant 0$。若Γ是$\pi_1(M)$的可解（solvable）子群，則Γ近乎$\mathbf{Z}^k$，其中近乎$\mathbf{Z}^k$的意思是$[\Gamma : \mathbf{Z}^k] < \infty$。

這兩個定理消極地告訴我們，一個黎曼流形的基本群如果擁有太大的小群（一般來說可解群在離散群中被視爲較小的群，因爲它們滿足 amenable 性質），則它不能是負曲流形或非正曲流形。

Wolf / Lawson - 丘成桐平坦存在定理：

若M緊緻黎曼流形，$K_M \leqslant 0$

$\Gamma < \pi_1(M)$，$\Gamma \cong \mathbf{Z}^k$，$k \geqslant 2$

則 $\Gamma = \pi_1(\Sigma)$，$\Sigma \subset M$，

其中Σ是一個k維 torus 保距浸入於M的像（Σ在M中是全測地平坦的）。

我們知道k維 torus 上存在一個平坦黎曼度量，而且它的基本群就是$\mathbf{Z}^k$。上述定理說明了非正曲流形基本群中的 abelian 子群與該流形中平坦結構的對應關係。

推論：

M緊緻黎曼流形，$K_M \leqslant 0$。

若 $\pi_1(M)$是一可解群，

則 M是平坦的（$K_M = 0$）。

Lawson - 丘成桐 / Gromoll-Wolf 分裂定理：

M緊緻黎曼流形，$K_M \leqslant 0$。

若 $\pi_1(M) = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ 且 $Z(\pi_1(M)) = 1$，Z是 center，

則 $M \overset{\text{Riem}}{=\!=} M_1 \times M_2$

（$\overset{\text{Riem}}{=\!=}$ 黎曼同構，isometric），

且 $\pi_1(M_1) = \Gamma_1$，$\pi_2(M_2) = \Gamma_2$。

代數上，基本群可被拆解爲直乘積的性質，被幾何地反映成黎曼流形可被拆解爲兩個子

流形黎曼乘積的性質。

這些定理的證明主要是運用非正曲流形許多自然函數的凸性質，與仔細研析 displacement 函數 $f_\gamma(x)=d(x,\gamma x)\gamma\in\pi_1(M)$，$x\in\widetilde{M}$ 的全凸極小集的特性，由此導致保距群可交換元素與可分裂性質間的對應關係。

關於其他由基本群反映非正曲流形幾何結構的結構，請參考〔E〕第七節。

三、非正曲流形上的rigidity現象

在 1982 微分幾何討論會結集裏，丘成桐曾經提出下述猜測（見四討論）：

M_1, M_2 閉黎曼流形，$K_{M_i}<0$，$i=1,2$。$\pi_1(M_1)=\pi_1(M_2)$ 是否能導致 $M_1 \overset{\text{Diff}}{=\!=} M_2$。

這是一個典型的Borel式猜測的例子，說明了在增加流形限制條件時，更強的Borel 猜測成立的可能性。底下要敍述的 rigidity 現象正是原初基本群決定幾何結構觀點下的另一自然產物。

例 2：（一個「反例」）

設M是 2 維可賦向流形，當M的虧格（genus）大於 0 時，M上存在有非正曲的黎曼度量，其實我們可以要求在 $g=1$ 時，$K_M=0$，$g\geqslant 2$ 時 $K_M=-1$（常曲流形!!）

由 2 維流形的分類結果，我們知道Borel猜測是對的。M，N是 2 維流形，$\pi_1(M)=\pi_1(N)\Leftrightarrow M \overset{\text{Top}}{=\!=} N \Leftrightarrow M \overset{\text{Diff}}{=\!=} N$。（也就是丘成桐的猜測在這個情形下是確立的）

但是基本群的群同構並不足以保證兩個 2 維可賦向黎曼流形是保角同構或是黎曼同構的。這也正是在 2 維時我們之所以會有黎曼面上的Teichmüller 理論與模（moduli）理論的原因。

令人訝異的是除了例 2 外，在高維度時的確存在更強的Borel 式敍述，這就是有名的 Mostow's rigidity 定理（〔M〕）。

Mostow's rigidity 定理：

M，N閉黎曼流形，$\dim M=\dim N\geqslant 3$，$K_M=K_N=-1$。

若 $f:M\to N$ 連續映射且 $f_*:\pi_1(M)\overset{\cong}{\to}\pi_1(N)$，則$f$ 同倫於一唯一的黎曼同構。

也就是如果限制到閉黎曼流形，$K_M=-1$ 的討論域中，則除了前述的黎曼面反例外，最強的Borel 式敍述是成立的。

六年後，Mostow 在非緊緻型局部對稱空間（locally symetric space of non-compact type）——非正曲流形常用的例子——的子類中也證明了類似的結果（〔M〕）。

Mostow's 強 rigidity 定理：

在扣除掉上述異例後。若M,N是不可解緊緻局部對稱空間，$K_M\leqslant 0$，$K_N\leqslant 0$。設 $f:M\to N$ 連續映射，且 $f_*:\pi_1(M)\overset{\cong}{\longrightarrow}\pi_1(N)$，則$f$ 幾乎同倫於一個黎曼同構，其中「幾乎」指的是可能差一個常數因子：$f^*(ds_N^2)=\lambda\, ds_M^2$。

不可解（irreducible）的意思是說該流形的萬有覆蓋不能拆解成兩個子流形的乘積。在可解的情況中，上述定理基本上還是正確的，只要我們調整一下各個不可解乘積單位上的常數因子。

又上述定理中的緊緻條件，可以被減弱成「完備且具有限體積（finite volume）」，這個工作是Margulis 超 rigidity定理的一個結果〔註 5〕。

由於局部對稱空間擁有豐富的李群與李代數的結構，Mostow 才能游刃有餘地使用這些工具。下一步困難的工作則是希望將類似的 rigidity 性質從一般的非正曲流形中刻劃出

來。

定義：（秩，rank）

(1)對M中任一點p上的任一單位切向量v，定義 rank$(v)=\gamma_v$上平行 Jacobi 向量場所成向量空間的維度，其中γ_v爲以v爲起始向量之唯一測地線。

(2)定義 rank(M)爲所有 rank(v) 的最小值。

如果v切於M內的一個平坦子流形，這個平坦性質自然會賦與γ_v上的平行 Jacobi 場。所以我們可以將這些平行 Jacobi 場看成是無窮小的平坦子流形，rank(v)則是v上平坦性的一個度量。這個秩的定義與局部對稱空間中秩的定義是一致的。

Gromov 使用類似於Mostow 的方法（主要是quasi-isometry與Tits 築（building））證明了下述 rigidity 定理。（〔BGS〕）

Gromov rigidity 定理：

M，N緊緻黎曼流形，$K_M\leqslant 0$，$K_N\leqslant 0$。

設N是不可解局部對稱空間，rank$(N)\geqslant 2$。若$f:M\to N$連續映射，$f_*:\pi_1(M)\xrightarrow{\cong}\pi_1(N)$，則$f$幾乎同倫於一黎曼同構。

在 rank$(N)=1$ 時這個定理是錯的，因爲秩爲1的局部對稱空間是負曲流形，稍微變動它的黎曼度量便能得到反例，但在 rank$(Y)\geqslant 2$時這個方法就可能失效了。

這個定理也說明了一個緊緻非正曲黎曼流形是不是一個高秩局部對稱空間是由其基本群來決定的。

要深入了解非正曲流形的第一步是盡量將局部對稱空間的一些概念推廣到一般的情況中。上述秩的定義便是一個例子。近年經由 Ballman, Brin, Eberlein, Spatzier等人的努力，運用動力系統（dynamical system）中類Anosov 流的觀念，漸次釐清了許多非正曲流形的結構問題，並因此導致Ballman與Burn-Spatzier 獨立用不同方法證得下述重要結果（〔B〕〔BS〕）。

Ballman / Burn-Spatzier 秩 rigidity 定理：

M緊緻非正曲黎曼流形，rank$(M)\geqslant 2$。

若$\widetilde{M}$爲不可解的（即$\widetilde{M}\overset{\text{Riem}}{\neq}M_1\times M_2$，則$M$是非緊緻型局部對稱空間。

首先這個結果加上Mostow強rigidity定理自然導出Gromov的定理。這個定理更指出一個緊緻非正曲黎曼流形是不是一個高秩局部對稱空間是由其秩來決定的。

關於秩1的 rigidity 定理應該如何陳述並不清楚（Mostow rigidity 定理與Gromov rigidity 定理是這個問題的兩個面相）。由於上述秩 rigidity 定理，我們知道所有非局部對稱空間的非正曲流形全都集中在秩1的情形，這使得秩1流形的研究饒富興味。在很多方面秩1非正曲流形享有負曲流形的性質：例如它們在單位球叢（sphere bundle）上的測地流（geodesic flow）都有遍歷性（ergodicity）；它們的基本群內都有無窮多個無窮循環群（$\cong\boldsymbol{Z}$）的共軛類。但是它們也有基本上的差別，例如由Pressmann 定理，我們知道負曲流形基本群的abelian子群一定是$\boldsymbol{Z}$，但在一般秩1非正曲流形基本群，卻允許有高秩$\boldsymbol{Z}^k$爲其子群（雖然它們分佈地不「均匀」）。

四、非正曲流形上Borel猜測的確立

在上節，我們看到許多近似於Borel猜測的定理，由於我們都加入了其他的幾何條件，

因此並沒有眞正證明出這些 aspherical 流形的Borel 猜測。

這個困難的拓樸問題，近來由於 Farrell 與 Jones 一系列的工作，在非正曲流形的情況上得到了突破。例如，1986年Annal 上「K 理論與動力系統」的工作，Farrell 與 Jones 結合非正曲流形上動力系統的結果與拓樸學上控制理論的方法，證明了非正曲流形基本群之 Whitehead torsion $=1$，算是證明 Borel 猜測的先聲（基本上這表示非正曲流形的 h-cobordism一定是直乘積，這是 Borel猜測的結論）。

在〔FJ1〕中，他們運用更多拓樸學中的工具（主要是surgery，因此他們的結果都有維度的下限限制），證明了如下 Borel 猜測。

定理：（常負曲率流形基本群之Borel 猜測）

M閉常負曲流形，$\dim M \geqslant 5$，

X：aspherical 流形，$\dim X = \dim M$，

則 $\pi_1(X)=\pi_1(M) \Longleftrightarrow X \overset{\text{Top}}{=\!=} M$。

這個定理對容許常負曲率黎曼度量的流形作了完整的刻劃。

定理：

X：閉連通（拓樸）流形，$\dim X = n \geqslant 5$，

則X上存在一個常負曲率黎曼度量

$\Longleftrightarrow$ (1)X是 aspherical 流形，

(2)$\pi_1(X) \cong \Gamma < O(n,1)$，$\Gamma$是 co-compact 子群。

證明：

($\Rightarrow$) 已知。

($\Leftarrow$) 令$M=\Gamma \backslash O(n,1)/O(n)\times O(1)$是一個常負曲流形，且$\pi_1(M)=\Gamma$。由前述定理$\pi_1(X)=\pi_1(M) \Rightarrow X \overset{\text{Top}}{=\!=} M$，將$M$上之黎曼結構拉回到$X$上即可。

約一年後，他們將Borel 猜測推廣到非正曲的情形（〔FJ3〕）。

定理：（非正曲流形基本群的Borel猜測）

M：閉非正曲流形，$\dim M \geqslant 5$，

X：閉 aspherical 流形，$\dim M = \dim X$。

則 $\pi_1(X)=\pi_1(M) \Longleftrightarrow X \overset{\text{Top}}{=\!=} M$。

至此，對於導源於幾何想法之非正曲（aspherical）流形的Borel 猜測算是近乎完滿解決（3維和4維的情況尚未知）。

最後我們要提到Farrell 與 Jones 另一個相關的工作（〔FJ2〕），這個結果主要是建構對於前述丘成桐關於負曲流形Borel 式猜測的反例。他們的方法主要依賴於既存的n維怪球（exotic sphere）的理論與適當地控制連接和上（connected sum）的曲率變化。我們要強調的是這個反例其實更強地否證了常負曲率的「球定理」（sphere theorem）猜測〔註6〕。

附 註

註1：當然當時尚沒有現代拓樸的觀念，不過基本的「流形」觀念是存在的。

註2：(**) 在 CW complex 的情況下都是成立的。

註3：Borel 猜測與拓樸上幾個懸而未決的猜測很有關係，例如Novikov 猜測與 Whitehead torsion 猜測。

註4：當然在其他情況也有許多結果，例如正曲流形的基本群是有限群。或是Brooks 的結果：一個閉黎曼流形萬有覆蓋上的底譜（bottom spectrum）$=0 \Longleftrightarrow$ 其基本群是amenable。

註5：rigidity 定理也可以看成是李群中離散子群的群同構如何擴張到李群間保距同構的問題。從這個觀點，Margulis

證明了一般地包括p-adic number 李群上的超rigidity 定理。他需要假設李群的實秩≥2。最近Corlette與Gromov-Schoen 作了一些實秩=1的工作。

註6：這裡的「球定理」是說，若M是閉常負曲流形，$K_M=-1$，假設$\pi_1(N)=\pi_1(M)$，$\exists\delta$使得，若N上有一個黎曼度量，且

$$|K_N(X,Y)(p)-(-1)|<\varepsilon,$$
$$\forall P\in N,\ X,Y\in N_p,$$

則 $M\overset{\text{Diff}}{=\!=}N$。

因爲Farrell-Jones 可以嚴格控制連接和處的曲率變化爲任意地小，因此常負曲率時的「球定理」是錯的。

参考資料

〔B〕: Ballmann, " Nonpositively Curved Manifolds of Higher Rank ", Ann. of Math, 1985.

〔BGS〕: Ballmann, Gromov & Schroeder, " Manifolds of Nonpositive Curvature ", Birkhäuser, 1985.

〔BS〕: Burns & Spatzier " Manifolds of Nonpositive Curvature and their Building ", IHES, 1987.

〔E〕: Eberlein, " Structure of Manifolds of Nonpositive Curvature, 1156 Lecture Note, Springer.

〔FJ1〕: Farrell & Jones, " A Topological Analogue of Mostow's rigidity Theorem ", J. AMS, 1989.

〔FJ2〕: Farrell & Jones, " Negatively Curved Manifolds with Exotic Smooth Structures ", J. AMS, 1989.

〔FJ3〕: Farrell & Jones, " Rigidity and Other Topological Aspects of Compact Non-positively Curved Manifolds ", Bull. AMS. 1990.

〔M〕: Mostow, " Strong Regidity of Locally Symmetric Space ", Princeton Press, 1973.

——本文作者任教於台灣大學數學系——