曲面上的馬賽克

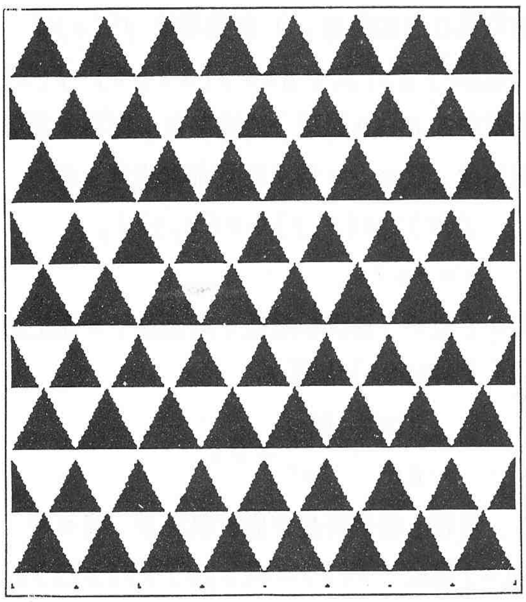
平　斯

懷爾H．Weyl　在耆暮之年出版了“對稱”這本書，討論自然界或日常生活裡所遇到的各式各樣對稱方式。書裡包羅萬象，搜集了建築、繪畫、化學晶體和生物細胞等，甚至還有時裝設計和東方的斗笠。以仍身居一代數學祭酒之尊，爲此雕蟲小技，眞是廉頗老矣！更何況如此樣公然歌頌自然，鼓吹直覺，而貶抑抽象推理的做法，在形式主義瀰漫得令人窒息的那個時代，簡直是現行反革命。四十年之後，時代與理念俱遷，如今我們在歷史的灰燼裡重新尋找，才再拾回他千錘百鍊的觀念，重頭磨銳對週遭現象觀察的能力。這是本文的出發點，我們不僅要討論，還要描繪對稱。

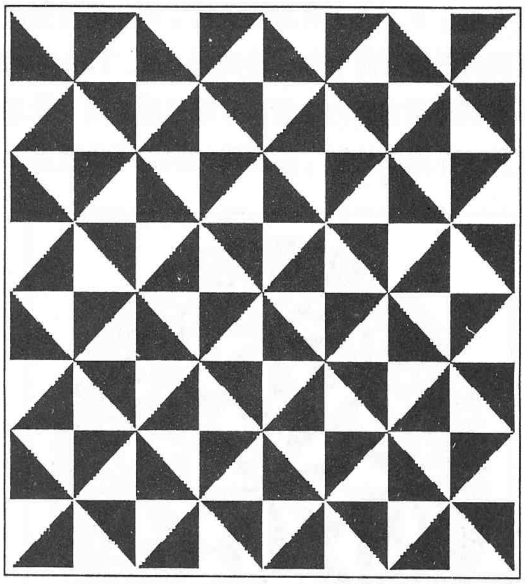
我們的對象是二維曲面上的對稱圖案，其實只考慮三個：平面，球面和雙曲面。爲什麼要劃地自限呢？因爲它們是所有曲面的覆蓋面，可經過保角變換成常曲率，所以有最豐富的對稱性。拿一個曲面上的三角形，正面是陽，反面是陰，不斷的翻來覆去，就像在舖馬賽克磁磚似的，蓋滿整個曲面。因爲只允許翻轉，所以三角形的形狀有個限制：每個頂角都是圓周的整約數。不妨假設它們是π/m，π/n，π/l，而所圍成三角形的面積是A，並且曲面的曲率是K。這三個數（m，n，l）連同A和K必須符合高斯朋涅（Gauss－Bonnet）定理。

$$\pi/m+\pi/n+\pi/l-\pi=KA$$

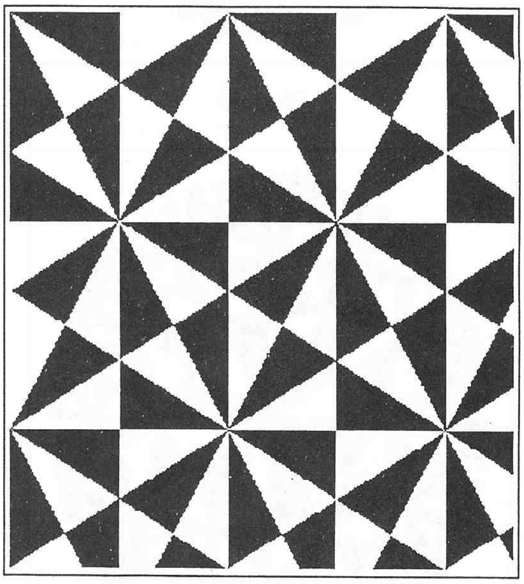
不同的K值，情況各異，我們各別分開來討論。當$K=0$時，這是最熟悉的平面三角形。（m，n，l）有三個解：（3，3，3），（2，4，4），（2，3，6）這些三角形分別是正三角，等腰直角和截半的正三角形。它們的頂角只有$\pi/2$，$\pi/3$，$\pi/4$，$\pi/6$四種可能。反應在晶體上，就是只有雙重、三重、四重與六重的對稱。這個獨缺五的現象，一直要到最近因爲發現了準晶，而把結晶群理論，推展到一個新的境界。



（3, 3, 3）



(2,4,4)

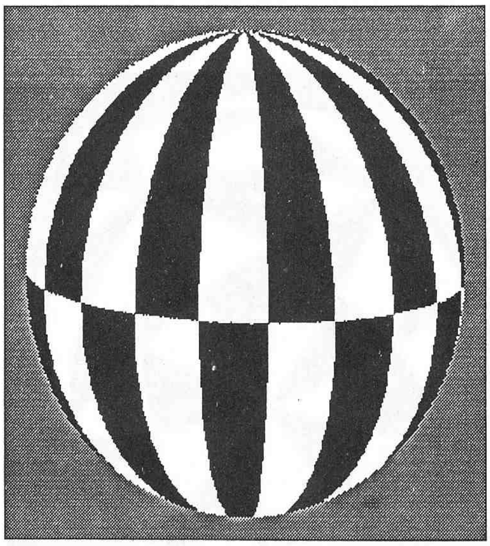


(2,3,6)

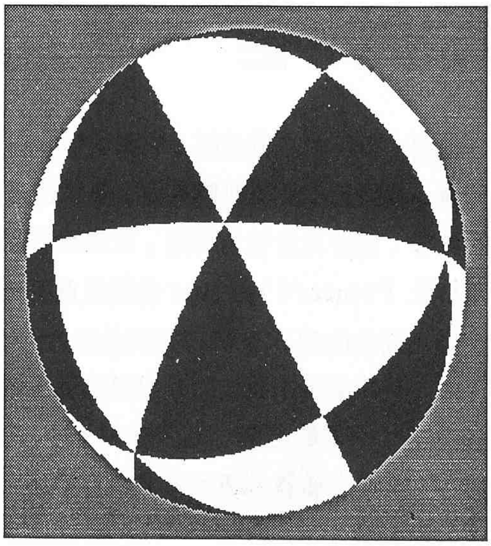
圖一

當$K=1$時，這是球面三角形，有四類解$(2,2,n)$ $n\geqslant 2$，$(2,3,3)$，$(2,3,4)$和$(2,3,5)$等。後面這三個，很明顯的可看出是圓內接正四面，八面，廿面體投射在球面的圖案。古典幾何學還有另外兩個柏拉圖多面體：正六面和正十二面體。這兩個分別是正八面和正廿面體的對偶，所以畫不出新的花樣。這三組的對稱群各依序是A_4，S_4和A_5。都是球面旋轉的有限子群。

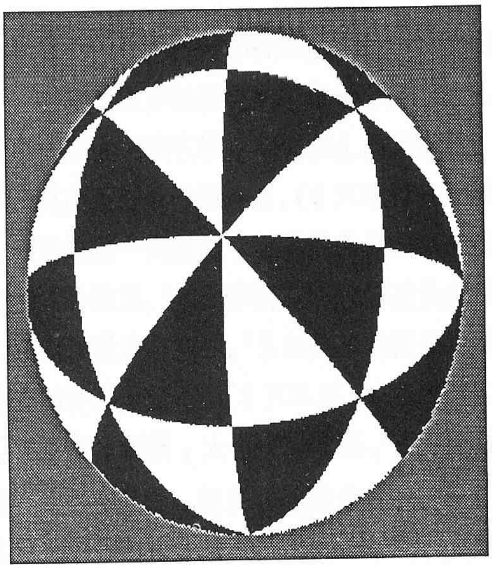
所有球面上的旋轉，用方陣來表示，構成一個正交群$SO(3)$，在拓樸裡是三維的投影面。所有單位長的四元數，也構成一個乘法群，同時也是拓樸裡的三維球面S^3。這兩個群的李代數都是帶著外積的R^3，因此彼此局部同態。剛才所說的A_5在$SO(3)$裡，透過這樣的對應，拉回到S^3，膨脹成兩倍大，階數足有120。它不僅把S^3分割成一塊塊，而且還指定了這些板塊之間，彼此黏貼的方式。在整個過程之



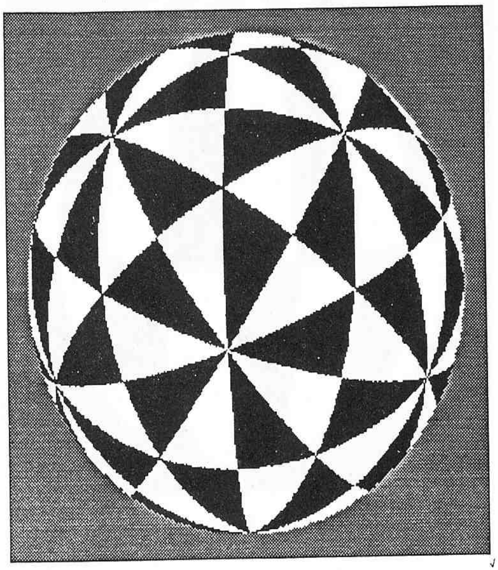
(2,2,10)



(2,3,3)



(2,3,4)

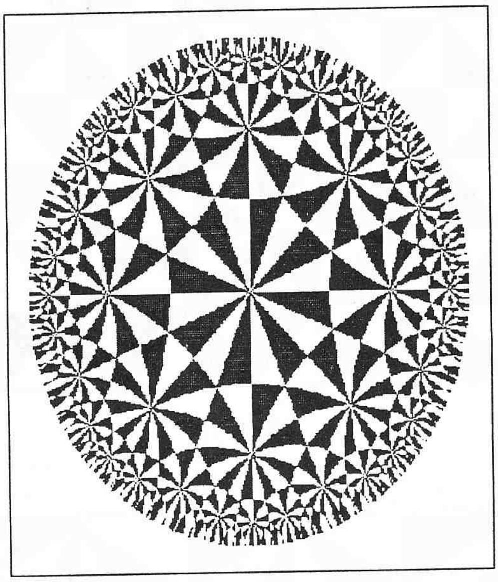


(2,3,5)

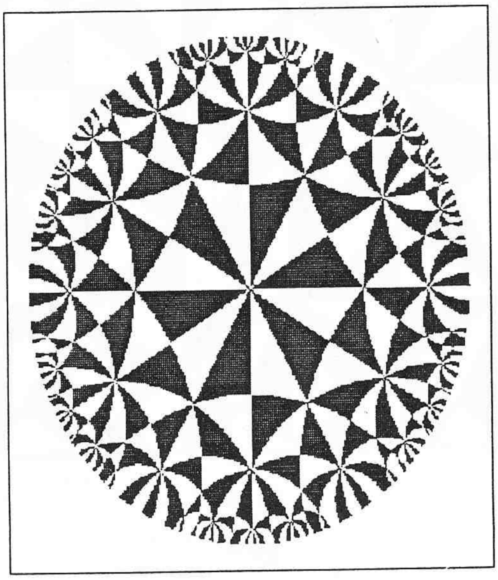
圖二

後，得到一個新的三維曲面，它與S^3同調，但不同倫。我們也不便稱他們亂倫，畢竟這裡只討論數學，而非社會倫理問題。法國數學家龐開瑞(H. Poincaré)在1903看到這個與球面同調而不同倫的例子,就問:是否同倫則必定同胚呢？好一件難解的公案，至今已經造就了兩個斐爾茲獎：一個是史味(S. Smale)，他在1960年證實當維數爲五或更大時，猜測爲眞。另外費得曼(M. Freedman)在1982年也證明四維時亦成立。

最後曲率爲負，也就是雙曲面三角形。這時(m, n, l)有無窮多解。因此使得雙曲面幾何更豐富而有趣。舍史登(W. Thurston)嘗試利用它們的性質來分類三維曲面。設想這件工作完成的話，龐開瑞的問題不也就迎刃



(2,3,8)



(2,4,6)

圖三

而解了嗎？順便一提的，這些令人眼花撩亂的圓盤，起源於許瓦(Schwarz)等人，本來是函數論的課題。有一天龐開瑞上公車時，猛然靈感湧現，才把它們定位在目前所瞭解的雙曲面幾何裡。