# 概說概形(Scheme)

張海潮

我大四時，項武義在台大教了一學期課。有一天他找研究生準備討論 Hirzebruch 寫的 *Topological Method in Algebraic Geometry.* 。我那時無聊也坐進去；未料他第一句話就是：「André Weil 寫“*Foundation of Algebraic Geometry*”把代數幾何逼進了死胡同。」那時，我對代幾自是一點不通，但却懷疑項武義說這話的用意。下課後我到圖書館去找Weil的書，這本書初版是1946年；一開始，Weil 就定義了他整個討論的一個範圍叫做 Universal Domain。我當然是看的一頭霧水，而最妙的是整本書一個圖也沒有，這可把代幾在我心中的揣測全推翻了。雖然從大三複變裏談到的Riemann Surface這一類的觀念，我隱約感到許多事情都一定是像解析幾何一般，對一組多變數多項式的解的幾何性質進行研究是代幾的主題，但爲什麼Weil 的書一開始這麼怪異呢？事隔多年，回想起來，那時一點代幾的背景都沒有，如何去理解一種所謂“代幾基礎”的學問呢？

後來在Brandeis 幫Buchsbaum當代數助教，有一次聊天,他告訴我：當Grothendieck寫E.G.A(代幾基礎)時，Grothendieck說：「代幾從幼稚園就可以開始唸了」，Weil聽說以後很怒，(我證得Buchsbaum用的是furious這個字)立刻將他1946 年的書修訂再版，當時是1960年。

根據Dieudonné 寫的代幾歷史，Grothendieck大概在1957年前，經由H.Cartan的提議，提出了概形(Scheme)這個觀念，集了前代的大成。Grothendieck 的基礎工作主要發表在E.G.A這四本書裏。

却說在Grothendieck 之前，代幾基本上有兩套(蠻相近的)語言。一是前所提到的Weil，另一就是Zariski。後者有關代幾的整理收集在Zariski 和Samuel合寫的交換代數第二册的第七章。許多人都同意這兩個學派基本上都完成了代幾中相當重要的一個理論即Intersection Theory，不過兩者處理的方式却大異其趣。Weil其實一直想的是數論的問題，比方說 Diophantine問題，特別是他有名的Weil 猜想，是有關佈於有限體的代數曲體解的個數問題；但他却以較近幾何直觀的方式處理交點數。Zariski 一般公認是義大利幾何學派的嫡傳，他却引入了前所不見的交換代數，以Hilbert polynomial 這一類的觀念來定義交點數，Zariski幾乎不曾處理過佈於有限體的代幾問題，在他全集的自序裏他特別談到交換代數如何的在40歲以後進入他的研究之中。

一般所謂Foundation 的書其實多半是提供這個領域所需要的基礎知識和嚴格的語言，以Kobayashi 和Nomizu的微幾基礎一書來印

證我的這句話就非常恰當。你很難想像兩本微幾基礎的書用兩個截然不同的方式（雖然有重疊之處）來定義什麼是微分流形，這其實正是我想告訴讀者的：代幾基礎的書一定要定義什麼是Variety即代數曲體，偏偏Weil和Zariski定義的就不太一樣，Zariski的Variety活在一個給定的代數封閉體中，而同時也是方程式係數所存活之處。Weil的Variety就可能多了很多點，特別是Weil所定義的generic point，它活在Universal Domain裏面。

Weil定義交點數必須要靠generic point，這個意思就好像在初中解方程式組時，你若是不代係數而用文字運算去求解一樣，然後當你把係數代以特值時，才會發現有重根這一類現象，例如 $b^2-4ac=0$。可想而知，Zariski學派無法採取這種辦法，他用Local ring用交換代數的技巧。而Grothendieck在定義Variety時，確實是集了兩者的大成，而且還更進一步。

Grothendieck厲害的地方在於他揚棄了以點集來定義曲體的做法，他從一個環的光譜（Spectrum）出發，所謂Spec $R$ 指的是 $R$ 中所有的質理想，你可以說Spec $R$ 仍然是一個點集，不錯，但是他又把 $R$ 帶了進來。舉例來說在 $R=C[x]/(x^2)$ 時，Spec $R$ 只有一點，就是 $(x)$ 這個最大理想，但是它所帶的函數空間不是只有 $C$（常數函數），還有 $x$ 但是模 $x^2$；這一種看來奇怪的設計就是概形（Scheme）定義最厲害之處。如果你堅持我在此處給一個概形的定義，那麼最直接的說法就是：概形是一個帶著函數的拓樸空間，局部看來就是Spec $R$ 帶著 $R$ 這樣的東西。

Grothendieck為何要如此做？不如此，難道代幾就無法發展了嗎？以有名的數學家Kodaira為例，他從來不曾談過Scheme，但他對代數曲面的貢獻是無人可比的。但是Grothendieck對代幾本質的思考上的貢獻也是驚人的；主要是存在他心中一直有一個重要的問題就是數論，特別是代數數論的幾何化問題。今日對算術曲面的研究非常發達，在這個領域中，Scheme的語言和想法絕對無法避免。

Weil當年對概形是有意見的，但是不要忘了他所提出的Weil猜想是經過Grothendieck, Deligne完成的，在其中，Grothendieck定義了一個Etale Topology（Grothendieck Topology），這不是一般的拓樸，而是在概形這樣廣泛的基礎之下發展出來的新拓樸概念。當然，數學上常見以新的定義推廣舊的，但是像Etale拓樸這麼有用的技巧却不多見。

在Scheme剛出來時，有人喜歡，有人反對，有人絕口不提，但是却越來越多人接受它，談論和使用它。自從Hartshorne的教科書出來以後，更是如此。可以這麼說，在許多特定的領域中，仍然不必懂Scheme，但不懂Scheme在代幾領域中必定無法做完整的理解。我願意引述Zariski和他的得意弟子Mumford的話，來為本文作一註脚：

Mumford在 *Geometric Invariant Theory*（1965）的自序中說：

……it seems to me that algehraic geometry fullfills only in the language of schemes……: to state its definitions and theorems in their natural abstract and formal setting in which they can be considered independently of geometric intuition.

Zariski在他全集（1973）的自序中說：

There is no doubt that the concept of " Schemes " due to Grothendieck was a sound and inevitable generalization of the older concept of " variety "and that this generalization has introduced a new dimension into the conceptual content of algebraic geometry, …………

But a mathematical theory cannot thrive indefinitely on greater and greater generality.………

有一次我問我的同事黃武雄，「什麼叫做存在先於本質？」他說：「就好像Variety先於Scheme」，Mumford和Zariski談論Scheme時，Weil猜想還沒實現，在我的印象裏，當Scheme經歷了這許多重要工作的考驗之後，我想，它不僅僅是本質而已，它也活生生的存在於代幾之中。

**本文中提到的文獻：**

A.Weil, *Foundations of algebraic geometry*, New York ( A. M. S. Coll. Publ. no.29 ), 1946.

O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra*, D. Van Nostrand Company, Princeton, N.J. 1960.

A.Grothendieck, *Eléments de Géométrie algébrique* (*EGA*) Publ. Math de l' I.H.E.S. nos. 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32 ( 1960-1967 )

R.Hartshorne, Algebraic Geometry, Berlin-Heidelberg-New York ( Springer ) 1977.

**Weil猜想的介紹請見Hartshorne書的附錄**

M.Artin, *Grothendieck Topologies*, Harvard University, mimeogr. 1962 VⅢ, 47. See Seminaire Bourbaki no. 363, and

D. Knutson, *Algebraic Spaces*, LNM no. 203. 1971.

D. Mumford. *Geometric Invariant Theory*, Erg. der. Math, Neue Folge, Heft 34, ( Springer ) 1965.

P. Deligne, *La Conjecture de Weil I*, Publ. math de l' I.H.E.S. 43 ( 1974 ) p. 273-307.

J. Dieudonné : *History of Algebraic Geometry*, Wadsworth Math. Series 1985.

F. Hirzehruch *Topological Methods in Algebraic Geometry* ( Springer ), 1966.

——本文作者任教於台灣大學數學系——