

丘成桐院士演講

漫談微分幾何

地點：東海大學數學系、所
時間：八十年十二月七日上午
紀錄：林憲政(東海大學數研所)

今天很高興能夠在各位面前講講我做學問的經驗，可以供大家參考一下。我講「如何學好微分幾何」的題目，主要是想跟大家講講有關於從前我做學問的態度，因為我是做幾何的，所以我就講做微分幾何。很明顯的，大部份的同學不會選幾何，不過沒有關係，其實就是講講我做學問的態度。

首先，講講我從前的一些經驗。我從前在香港長大，在香港唸中學、大學，然後到美國唸研究所，所以至少在前一半跟大家的經驗應該差不了太遠，不過是時代有點不同。我在多年前唸數學，你們現在唸數學，看法上已經有許多不相同，事實上我也不太瞭解你們現在的想法。不過基本上，我們都是中國文化出身的，所以我想仍有一部份共同的地方。基本上我們是要講怎麼做科學研究，也就是純科學的研究，我們要看的是我們的志向是怎樣的。假如我們想做一個好的科學家，當然我講的是怎麼做一個好的數學家。先說我自己的經驗，我從前在香港培正中學唸中學的時候，就開始對數學有興趣。當然還有一些其它的課程，我對數學有興趣，一方面是受到我家庭的影響，我父親是做哲學的，所以對於唸數學一直都相當鼓

勵，到了中學以後，我父親去世了。不過也因此對於自然科學有很濃厚的興趣。另一方面受老師的影響也很大。我想很重要的當我們開始要做一個學問，尤其是你真的要做一個出色的科學家，跟你的興趣和你一開始所立下的志向有很大的關係。就是說，開始的時候你期望能夠做到什麼。假如說開始的時候你根本不想做一個好的科學家，那麼你就永遠也不可能做一個好的科學家。從前有位大學老師跟我講說：「假如你不買馬票，你永遠也中不了。」倒不是說我鼓勵你們去買馬票，是說假如你不準備做好的科學家，就永遠也做不了一個好的科學家。不過是不是講，你想做一個好的科學家，你就可以做個好的科學家呢？當然不是，你還要有很多其它的因素在裏面，我想第一點是要你將做人的目標先決定。

我在國外二十多年了，也教了不少的學生，有些在世界上算是很出名，但有些不是太行。從這方面來講，比較好的學生和不好的學生我可以曉得不同的經驗。我想好的學生大部份一開始就決定他要做到什麼程度的科學家，從很早就可以看得出來，因為有了志向以後，才曉得怎麼去用功、怎麼去花時間在上面。這看

起來倒是老生長談，因為你從小學、中學到大學，大概很多老師都跟你講同樣的意見，可能你聽多了都覺得沒有什麼意思，但是事實上這是成功的第一個因素。我的一位老師跟我講，你要決定以後你想做什麼，講明了，不是為名就是為利。當時我很驚訝，老師為什麼講這一句話。我們不能否定大部份的想法不是為名就是為利，同時這個想法也推動了不少科學的研究。不過我們也曉得，單是為名為利不可能將科學達到最高峰的研究，我們一定要對這個科學有濃厚的興趣。我們應當曉得，做科學，我們有一個很純正的想法，就是對真理的追尋，在真理的背後有一個很漂亮的境界在裏面，我們到了一個境界以後，對我們追求學問的人來講，是無法抗拒的，就算是沒有名沒有利，我們也希望能夠將這個真理搞清楚。舉例來講，如果你喜歡下棋的話，有時你會曉得下到一半的時候，結局會是怎樣，你非為名也非為利，當然可以講說你是為了好勝，但是有時候你總是想追求，想曉得怎麼解決這個問題。在科學上來講我們要追求的是比這個高的境界。我為什麼講為名為利這個事實呢？舉例來講，我們這幾年在哈佛大學裏教了幾個在大學裏唸數學唸得很好的學生，可是到了畢業的時候，我曉得他們明明對數學有很大的興趣，但是他們選取了完全不同的途徑，他們有些人寧願選取做生意或是到銀行裏面做事。我並不反對你們去做生意、賺大錢，我失望的緣故是因為這些學生明明是對做學問興趣特別大，但是他們沒有辦法去抗拒賺錢的引誘而放棄了繼續做學問的前途，有些人甚至過了幾年賺了錢，又想重新再做學問，但問題是無論你資質有多好，一般來講你將做學問的機會放棄以後，再想重新做起將會遇到許多困難。並不是說不可能，也曾有這種情形發生過，但是真正能夠達到的情形，幾乎是絕無僅有，做學問是不能中斷的。我遇見過很多朋友，有些甚至是很有名的數學家，他們有些人會講我現在一方面做行政的工作

，一方面可以做學問，可是事實上，這是沒有辦法可以達到兩者兼顧的情形。我們曉得做學問幾乎是全心全意的工作，當對證明追尋的時候，很難說受到其它外界的打擾，仍能夠達到很高的成功的。以我的經驗來講，在想問題的時候，晚上睡覺也在想這個問題，躺在床上也在想，早上起床第一件事就是想這個問題。我並不是講你們也要這樣子，我是希望你們在遇到一個問題要解決的時候，你要全力以赴，不可能在中間慢慢想一點而在其它也可以花點功夫，這樣精神不集中的態度是不可能做好學問的。我想對大家做個建議，假如你想做個真正的好科學家的話，就不能夠再往回走，假如你想做生意，那乾脆一開始就不要想這個問題，並不是你要做個好的教員就要照我剛才講的，要花這麼多功夫，倒是要唸好科學這是很重要的，所以這是第一點，立志很重要。

第二點我要講的，我在國外多年，遇見過許多很出名的數學家，甚至許多有名的物理學家我也見過許多。在我認為並沒有一個是真正的像一般報紙上所講的是天才，在我所親身認識的大科學家，都是經過很大的努力，才能夠達到他所達到的成就。我的學生問我：「為什麼你做得比我好？」我說很簡單，我比你用功。我在辦公室或是在家裏邊，我天天在想問題，你們在外面玩，而我花了功夫在解決想了很久的問題，我總比你不想、不花時間成就大一點。你可能去聽個大科學家或大數學家演講，你會覺得漂亮得不得了，怎麼一個人能夠講得這麼好！這個人是個天才！可是你有沒有想到，他在後面準備花了多少時間想這個問題？大概你們聽過最出名的科學家費因曼，「費因曼物理」（編註：徐氏基金會有中譯本）漂亮得不得了，所有出名的物理學家都這麼講，去聽的人不是學生，都是老師或物理學家。費因曼在準備費因曼物理的時候是什麼事都不做，就只有腦子在花功夫，整天在想這個問題，跟許多學生不停的在談這個問題。費因曼是個有名的天

才，可是他準備這個研究也花了許多不同的功夫。我想很多出名的科學家在有所表現出不同的時候，你會覺得他是天才，事實上他用在後面的功夫都是很不少的。

有許多很聰明很厲害的人可能是研究生甚至是教授，往往你給他一個問題，他可以很快給你一個答案，同時是很不錯的一個答案。可是很多這樣出色的學生或是教授，過了很久以後，你總會覺得他沒有做出很好的成績出來。問題是，你解決的問題太容易了，沒有再花很多精神去考慮這個問題。尤其在我們中國人最缺乏的，就是在做中學生或是大學生的時候，沒有將一個問題從頭到尾仔細考慮清楚，並沒有真正的全部瞭解，這是個很重要的問題。從一個很小的問題，我們可以引發很多不同而且有意思的問題。思考要自己訓練，不單是在聯考或在大學的時候，老師出個題目，你考了一百分就完了，假如這樣的話，你很容易就滿足你自己，你不覺得問題有什麼意思。往往出名的研究是在很平凡的問題裏面，不停的思考所找出來的，很多人因為很快將問題解決了，便不願再想下去，所以不能夠再啓發新的東西。科學的研究，不是解決人家已經曉得的問題。當一個科學家問一個好的問題的時候，即是成功的一半。因為科學的推動是從不斷的找尋新的問題，新的方向出來的，解決從前的問題雖是個重要的推動方向，可是我們還要找出新的方向，而不單是解決從前的問題。我們知道在物理上解決問題的時候，往往大的或出名的公式是將前面固定的理論推翻，而找出新的路子。為什麼大數學家或大物理學家能夠做到這個地步呢？因為他們不斷的問題。有時候在一般人來講很明顯的問題，在出名的科學家看起來，就不見得很明顯。為什麼不明顯呢？因為我們有不同層次的問題要一路考慮下去。問問題的能力是一個很重要的訓練，並不是花很多功夫就可做到，我想在我們中國的小學、中學或大學裏都沒有很好的做到這一點，我想從

小應該做到這一點的。

現在我們來看數學跟其它物理、化學或生物等實驗科學有那些不同？物理或化學等科學是從一般實驗、現象界所找的題目，最後再經過實驗的驗證，才能算是個成功的理論。理論物理學家可以發展很多不同漂亮的理論，但最後假如不能夠在實驗裏做出來的話，對物理學家來講就是一篇廢話。數學家有個好處。就是說，我們做了學問，一方面大部份是從一般的科學裏面產生給我們的，一方面可以當做文學作品來欣賞。我們的取材多采多姿，一方面是比較基本的，從自然界或物理上的基本粒子、廣義相對論、重力場去拿出很多基本的大自然的問題。這方面對近代幾何學上的影響很大，另一方面可從比較沒那麼基本的理論裏發生出來。所謂不基本，並不是說不重要。我們要瞭解到我們有些問題是從工業界來的，譬如說做飛機、做螺絲，甚至做流體變動的問題，都是可產生許多有趣的幾何問題或是數學問題。例如說機械人手怎麼去拿東西？這都可以看做是基本的幾何問題，物理學家不一定有興趣，可是數學家卻有很大的興趣。另外我們也可以對與實際問題不相近的問題產生興趣，我們對一個圖畫得漂不漂亮，我們也可以在數學上研究。幾何在數學上的取材有三個不同方向；第一是從基本自然界裏產生的問題。從基本粒子、重力場到電磁波基本上如何產生的種種重要幾何問題，從表面上你看不出來為什麼它跟幾何有關，但事實上近代物理將很多這種基本場論的問題變成幾何問題，對微分幾何來講有很大的貢獻。第二是剛才所講，工業界與古典力學出了很多很重要的幾何問題。第三就是純粹從美的觀點來找問題。舉例來講，從數論裏面找了許多很漂亮的問題，尤其是近十或二十年來，大部份重要的數論問題大多是用幾何的方法來解決的，這是幾何在數學上三個重要的取材方向。

我為什麼講取材的問題呢？因為很多中學

生或大學生在唸幾何或是某些數學課程的時候，認為我們唸那個學科就唸那個學科就夠了，而不要唸其它的學問，這是個很錯誤的觀念。因為數學裏面每一門的學問都有密切關聯的，不單是數學，其實所有的理論科學中間都有很密切的關係。例如我們剛剛所講的，高能物理與數學的關係，或是化學甚至生物都跟數學有很大的關係，所以我想怎麼學幾何呢？第一點是當你決定好要做一個好的幾何學家時，你一定要廣泛的學不同的學問，基礎要比較廣，如微分方程、代數、物理學以及其它學科，至少在心裏上有個準備，就是說這些學科將來是對你有幫助的。你聽起來會覺得這是很困難的事情，你不可能學會這麼多種不同的學問。這主要的分別就是你要有一個層次，你的專科是那一方面，就要多學一點，但不可忘掉其它的學科。有時在某個意義下，我們可以很驚訝的看到同一個學問、同一個命題，在兩個不同的學科裏面，可以以不同的方法出現，就是說以不同的方法證明。我想主要的原因是根本上這兩個學科的分別並不是很大。在幾十年前有個出名的物理學家說數學有不可思議的力量。為什麼數學能夠在物理上有這麼大的影響呢？因為從物理學家的看法，數學家祇是在玩一些簡單的符號，純粹是在家裏想一些自己的問題，與自然界的關係好像不大，其實這是個錯誤的想法。我們數學家研究的問題是很具體的，只是有不同的層次，所以有點不同而已。舉例來說我們研究微分幾何上一個最簡單的圖形——圓球，這圓球可以說是一個抽象的觀念，我們也可以說它是自然界很具體的一部份。也就是說我們將所研究的圓球視為自然界的一部份，其實跟物理的現象差不了太遠的。尤其在現代的高能物理裏，我們研究基本粒子，尤其到了量子力學的觀念以後，因為能量已經到了很高的地步，所以有很多根本沒有辦法做實驗，所以基本上也是在家裏或課堂裏或辦公室裏用紙筆來算，這跟數學家想像的差不了太遠。假如物理

學家可以這麼做，表示數學家也能夠坐在家裏面而對自然界達到某種程度的瞭解。

為什麼我要講這些呢？這些與微分幾何有什麼關係呢？我要講的是你在選題的時候，我們雖然有個自由度對於選題與自然界無關，但是我們也有一個限度在裏面，假如我們選的問題與現實相差太遠，最後我們的命題會被淘汰掉。在歷史上出現很多不同的研究，過了十年、二十年後就完全被淘汰的。你看現在的圖書館裏面有許多的文章出現，不過再過個十年八年以後，我想大部份的文章是會被淘汰掉的，根本在整個數學歷史上起不了任何作用。這是因為很多的文章實在沒有解決問題，其次是對我們研究的對象沒有產生任何效果。所以雖然我們數學界不用時間來做證明，可是我們有某種程度的測試。一般來講，證得很好的數學，二十年或五十年內都可以看到它在現實裏出現幫助。我們曉得在這個二十年以來，從前許多不重要的問題，在今日的工程上發生很大的影響。舉例來講，從前在數論裏對於質數的搜查這個問題，這完全是一個無聊的命題。就是說一個很大的數，你怎麼將它因子分解得很快。近十多年來，在國防科學上這問題變成一個重要的命題，有許多國防科學家在做這方面的研究，所以說數學上的選題很重要。為什麼因子分解很重要呢？表面上看來跟真正的用途好像沒有什麼關聯，可是它是一個很自然的問題，一個很大的整數它怎麼分解，很快地，表面上並不重要，但可以幫助我們瞭解質數的分佈情形，所以我說選題是一個很重要的問題。我記得從前我們在做大學生的時候，花了很多功夫去唸一些文章與參考書，有些對數學來講是很無意義的，可是反過來說因為花了很多功夫，所以可以瞭解到有些問題比較重要，有些問題比較不重要，所以花的功夫並沒有白費。

其次我們講做一個學生應該是怎麼一個看法。對於做數學或做微分幾何來講，我覺得研究的氣氛很要緊，尤其在中國的環境裏，好像

是不太容易培養出這種氣氛來。假如你旁邊的朋友或同學跟你談的都是其它的問題，譬如說股票漲了或跌了或其它問題，久而久之，你大概對於做學問也沒有很大的興趣，所以培養做學問的態度與你交的朋友、跟的老師的關係很大。如果你們時常討論學術上的問題，你就不會覺得自己很孤單，能夠激勵你對數學上有更大的興趣。假如你自暴自棄，就是說你認為自己不能夠在數學上做研究，不能夠在數學上達到貢獻的話，你永遠也達不到，而且同時也影響到你旁邊的朋友，使得大家都不能向前走。我們曉得許多出名的數學家甚至在牢裏也可以寫一些出名的文章，倒不是你永遠關在牢裏就能做好的文章，是說人在最困難的時候也可以做研究。除了氣氛很重要外，你也需要得到先進的支持，從前我們唸中學的時候，唸了很多關於做學問的方法，從前覺得很好笑，以後唸書唸得多了以後就覺得這些很重要，事實上這些是很重要的經驗。有句話說「學而不思則罔，思而不學則怠」，你單是學而不想是不行的，你單是想而不學也是不行的，這兩句話看起來很簡單，其實就是怎麼分配你的學習跟思想，這是一個很微妙很重要的問題。一個人無論你多用功多天才，你假如不將前人做過的東西去體驗去學習，是不可能做好的。這道理很簡單，一個人的智慧有限，我們不可能與前面十年、五年所有人做過的加起來的智慧相比，我們要靠前人的經驗，要靠他們的啟發，才能夠向前邁進，雖然有人自誇的講比他們加起來都行，我不相信這種情形，也沒見過這種情形。所以出名的貢獻如愛因斯坦、牛頓的貢獻，也是在前人的成果方面再向前走一大步或一小步。所以學是一定要的，可是如果你學過這個東西以後而不去思考，不去消化，就算你可以考第一，考一百分，但是你不學是絕對沒有用的。我們看過很多出名的天才，十二歲就拿到學士學位，甚至拿了很高分，可是往往我們看不出他以後的成就。為什麼很多所謂的天才在以後的

科學發展裏沒有任何的貢獻？這是因為他們沒有思考，沒有思考在科學上完全不會引起任何的波瀾、任何的貢獻，對於整個科學完全沒有好處。所以學了以後一定要思考，怎麼分配你的學習跟思考就往往要有導師的幫忙或是同學的幫忙。所謂的幫忙並不是說老師跟你講你應當這麼做或應當怎麼做，這樣往往是沒有很大的效果，所以我剛剛講的氣氛很重要。從人家用功的程度或是講話的態度的啟發，或是講話的時候能夠去聽，追根出什麼東西來，從它而得到很大的幫助。從前我到柏克萊去唸研究所時，我花了很多功夫去聽很多不同的科目，有些人覺得很奇怪，為什麼我會去聽那些課？我覺得這些課對我有好處，過了幾十年後我還是覺得有好處。有些課在我去聽的當時可能不懂，可是聽了還是覺得有好處，因為一個人的腦袋的想法並不是那麼簡單的，有時候某些東西當時可能不懂，可是慢慢的就能領悟很多東西。我舉例來講，我做博士論文的時候，我剛好要用到群論的問題，當時我問過許多專家，但是都不懂，我突然想到從前在某一課上聽過一個有關這方面的論文，我忘了當時講什麼課，但我記得大概在那裏可以找這方面的文章，所以我花了2天的時間在圖書館，結果給我找到差不多是我所要的文章。假如當初不去聽這門課的話，我完全沒有這個機會，所以有時候聽一門不懂的課，有很多不同的幫助，所以很多研究生我跟他們講，你們去聽課不一定要懂，你坐在那邊總比不坐在那邊好，你不坐在那邊的話，你完全不可能知道有其它的方法。

我想最後還是你對整個學問有多大興趣的問題，假如你對這個學問興趣不大的話，你沒辦法長年累月的坐在圖書館，坐在辦公廳裏，或是坐在一個課堂上聽課，所以你一定要先決定你對這學問的興趣有多大，當然做研究還有許多其它方面比較複雜的原因，以後有機會我們再講下去。我想現在你們在大學的階段，最要緊的是決定以後你要做什麼東西，其它的可能就容易做到了。