阿呆的問題：「爲什麼虛數無大小」？

陸思明

阿呆在上國中的時候，曾經聽說「虛數無大小」，這樣的話，當時他對“虛數”還莫測高深，所以這句話對他像耳邊風一樣，未曾留下任何“痕跡”。

現在他上了高中，學了不等式，也學了些複數，在課堂上又偶爾聽到老師說「虛數無大小」這句似曾相識的話，他開始認眞起來。產生了「爲什麼？」這樣的疑問。

他自己想了想，覺得 $3i$ 比 $2i$ 大應該是明顯的事；$5+3i$ 比 $5-i$ 大也不會讓人難懂，爲什麼老師偏要說「虛數無大小呢？」

他憋了很久，想去問老師，又怕問題太淺薄，會讓老師看不起，只好退而求其次，去找阿智問個究竟吧！

*　*　*　*　*

首先，阿智對阿呆所說的「$3i>2i$」持保留態度。阿呆憤憤地說：『難道一個東西的3倍大於它的2倍，你都搞不懂？』阿智說：『我懂，這道理在自然數理說得通，但是在整數系裡就不一定了！』，呆：『爲什麼？』，智『-1 的3倍會比 -1 的2倍大嗎？』這一下阿呆楞了，半天答不出話來，他知道自己錯啦！

*　*　*　*　*

可是「爲什麼虛數無大小？」這問題並沒有解決，阿智也想過這個問題，他曾經在一本書裡，看到有人把複數的大小，作了如下的規定：

> (i) 二複數的實部不相等時，實部大的複數大。
> (ii) 二複數的實部相等時，虛部大的複數大。

用符號來表示，就是：

> 設 $a_1, b_1, a_2, b_2 \in R$，若 $a_1 > a_2$，
> 或 $\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 > b_2 \end{cases}$，
> 則 $a_1 + b_1 i > a_2 + b_2 i$。

在這個規定下，任意兩個複數 Z_1，Z_2 必定滿足且僅滿足下列三種情形之一：

三一律：$Z_1 > Z_2$，$Z_1 = Z_2$，$Z_1 < Z_2$。

如：1 $3-i>2+5i$。（因爲實部3，大於實部2）。

2 $2+5i>2-3i$。（因實部相等，而虛部5，大於虛部 -3）。

3 $3i>2i$。（因爲實部都是0，而虛部3，大於虛部2）。

因此，要說「虛數無大小」，顯然是老師睜着眼睛說瞎話。阿智怎麼肯輕易“盲從”？

*　*　*　*　*

阿呆有了阿智壯膽，兩個人就去找□老師問個明白。

□：『由阿智所說的道理，可知「虛數不能比大小」這句話是不正確的』，阿呆與阿智聽了□老師這樣一說，他們對自己的判斷力增加了信心。

□：老師呷了一口茶接着說：『按着阿智所說的規定，任意兩個複數都可以比大小，固然令人可喜。但是它卻帶來一個“不完善”的後遺症。』

阿智驚訝地問『怎麼會？』

□：假若只規定了大小，而表示大小的式子之間，沒有辦法建立加、乘的演算規則，那麼，大小的規定只是虛幌一招，發揮不了運算的大功用』。說到這裡，□老師看了阿呆一眼，說：『你把實數裡的不等性質扼要的說一說吧！』阿呆一聽，不免有些緊張，好在他也是有備而來，就扯下一片活頁紙，寫着…………………

> 若 $x, y, z \in R$，則
> (1)下列三式中恰有一個成立：（三一律）
> $x > y$，　$x = y$，　$x < y$。
> (2)若 $x<y$，$y<z$，則 $x<z$，（遞移律）
> (3) $x<y \Longleftrightarrow x+z<y+z$。
> （加法保序性）
> (4)若 $z>0$，則 $x<y \Longleftrightarrow xz<yz$。
> （乘正保序性）
> (5)若 $z<0$，則 $x<y \Longleftrightarrow xz>yz$。

□老師很高興，知道阿呆是個肯用功的學生，他嘉勉性地點了點頭，接着說：『其實第(5)條可由第(4)條推演出來（怎麼推？）。所以只要前四條也就夠了！現在請阿智來檢查檢查，看看你們對複數所作的大小規定，能不能也合乎這四條性質呢？』

阿智早已經檢驗過「三一律」是成立的，所以他只要驗「遞移律」、「加法保序性」和「乘正保序性」就行了。

他先假設三個複數 $Z_1=a_1+b_1 i$，$Z_2=a_2+b_2 i$，$Z_3=a_3+b_3 i$，其中 a_1，a_2，a_3，b_1，b_2，b_3 都是實數，然後開始檢驗「遞移律」：

▩若 $Z_1<Z_2$，則 $a_1<a_2$………①

或 $\begin{cases} a_1=a_2 \cdots\cdots\cdots ② \\ b_1<b_2 \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$

又若 $Z_2<Z_3$，則 $a_2<a_3$………①′，

或 $\begin{cases} a_2=a_3 \cdots\cdots\cdots ②' \\ b_2<b_3 \cdots\cdots\cdots ③' \end{cases}$

討論：1°）若①，①′成立，則由實數系的遞移律得 $a_1<a_3$，故 $Z_1<Z_3$。

2°）若①，②′成立，則由實數系的遞移律仍得 $a_1<a_3$，故 $Z_1<Z_3$。

3°）若②，①′成立，仍得 $a_1<a_3$，故 $Z_1<Z_3$。

4°）若②，②′成立，則③，③′也成立，於是由②，②′得 $a_1=a_3$，由③，③′得 $b_1<b_3$，$\therefore Z_1<Z_3$。

綜合上述四種情形，可知「若 $Z_1<Z_2$，$Z_2<Z_3$，則恒有 $Z_1<Z_3$」，故複數大小的規定合於遞移律。

*　*　*　*　*

▩接着阿智又檢驗了「加法保序性」：

若 $Z_1<Z_2$，則 $a_1<a_2$………①

或 $\begin{cases} a_1=a_2 \cdots\cdots\cdots ② \\ b_1<b_2 \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$

而 $Z_1+Z_3=(a_1+b_1 i)+(a_3+b_3 i)$
$=(a_1+a_3)+(b_1+b_3)i$ …………④
$Z_2+Z_3=(a_2+b_2 i)+(a_3+b_3 i)$
$=(a_2+a_3)+(b_2+b_3)i$ …………⑤

故若①式成立，則由實數系的「加法保序性」得

$a_1+a_3<a_2+a_3$ ………①′，由④，⑤，①′知 $Z_1+Z_3<Z_2+Z_3$。

又若②，③式成立，則

$$\begin{cases} a_1+a_3=a_2+a_3 & ,\cdots\cdots\cdots\text{②}' \\ b_1+b_3<b_2+b_3 & ,\cdots\cdots\cdots\text{③}' \end{cases}$$

由④，⑤，②′，③′知 $Z_1+Z_3<Z_2+Z_3$，所以「加法保序性」也能適合。

這時阿智的心情非常振奮，他只要再驗明「乘正保序性」，那麼「複數不能比大小」的“神話”，就要被他拆穿了！

阿智正要接着驗下去的時候，□老師開口說話了：『阿智，由你的檢驗過程，可以顯出你的思考細密，功力確實不差。至於「乘正保序性」的檢驗，我先拿一個“反例”來證明它的不能成立。好節省一些寶貴的時間。』

智：『怎樣的反例？』

□：『按你所講的規定，$0+1i>0+0i$，即 $i>0$ ……………………………①

又 $0+3i>0+2i$，即 $3i>2i$ ………②

假定「乘正保序性」在複數系裡可以成立，則由①，②（以 i 乘②式兩邊）得 $(3i)i>(2i)i$，即 $-3>-2$ …………③

但③式顯然是矛盾的結果，所以反證了「乘正保序性」在複數系裡不能成立。』

智：『好可惜，我的努力竟然功虧一簣！』阿呆在旁邊也不禁同聲一嘆。

□：『因此，你們對複數大小所作的規定，會使不等式的乘法運算失去規律，使實數系經營完備的次序世界受到破壞，正所謂“利未蒙，而害先至”，損多得少，所以數學家無法接受這樣的規定。』

智：『我們的規定，在不等式的乘法中產生了矛盾，可能是因為我們的水準太低，經驗不夠，設想不周。或許有一天，有個頭腦特別聰敏的數學天才，能夠設計出一套複數大小的規定，同時適合實數原有的運算規則。這種想法，總會有實現的時候吧?』

□：『不可能！』

呆：『為什麼？』

□：『因為要定義複數的大小，首先我們希望它仍能保有實數系中的「三一律」。現在我們已經知道 $i\neq 0$，所以 $i>0$ 或 $i<0$ 二者必定要決定一個。

(i)假若你規定 $i>0$，則兩邊乘以 i，得 $-1>0$，造成矛盾。

(ii)假若你規定 $i<0$，則兩邊同加一 i，得 $i+(-i)<0+(-i)$ 即 $0<-i$。然後兩邊再乘以 $-i\ (>0)$，又得到 $0<-1$。還是矛盾。所以，即使令高斯復生，他也無法定出 i 的正負，而使「乘正保序性」仍能運作無礙』。

智：『這麼說，為複數定義大小是沒希望了?!』

□：『不是「沒希望」，而是「沒樂用」，所以不規定它的大小。』□老師夾雜了一句諧音的「閩南語」，樂了他的學生。

*　*　*　*　*

阿呆、阿智滿意地向□老師稱謝告辭，□老師送到門口，看他們漸漸走遠，口中自言自語地說「好可愛的學生！」，欣慰與希望溢滿在他的目光裡。…………

（上接第 130 頁）

故 $\dfrac{3}{\cos\theta}+\dfrac{2}{\sin\theta}\geqq 4\sqrt{3}$

$\therefore \dfrac{3}{\cos\theta}+\dfrac{2}{\sin\theta}$ 之最小值為 $4\sqrt{3}$，這就是謬解了！（稍花工夫可算出 $4\sqrt{3}<(3^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$）

讀者試自行指出錯誤所在。

結語：數學眞是一門奇妙的學問，您用很少的公式就能解出很多的問題，而且妙招百出、趣味叢生，眞是題目人人會解各有巧妙不同。但運用之妙存乎您平常努力培養出來的功力上，否則妙解不成反成謬解，豈不畫虎不成反類犬了。（本文作者任教於省立嘉義女子高中）