—中學數學漫談—

妙解與謬解

洪鋕雄

從一個問題談起：

某年高中聯考，數學試題有底下這個問題：

師傅對徒弟說：我在你這個年齡時，你祗有2歲，等你到了我這個年齡時，我就41歲了，問師徒現年各幾歲？

這個問題可用代數一元一次方程式來解或二元一次方程式來解，也可用算術方法不用任何未知數來解，但都沒有底下這個"圖解法"來得方便迅速！

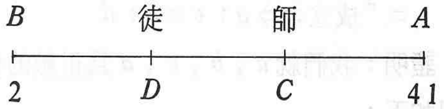

圖1

圖1中$\overline{AB}$是數線的一部分，C，D是師徒現在年齡的位置，當師移至D時，徒移至B（2歲），當徒移至C時，師移至A（41歲），可見C，D是$\overline{AB}$的三等分點，3段距離均爲13（(41－2)÷3＝13），因此師現年41－13＝28（歲），徒現年2＋13＝15（歲）

這眞是妙解！

"圖解"的方便常在於能由直觀，迅速看出問題解法的徵結所在，因而能一舉解出該問題。

各位可能已在課本中欣賞過很多藉圖解來闡釋的代數問題，最有名的是：兩正數的算術平均大於或等於其幾何平均，且等於的充要條件是兩數相等。即：設$a>0$，$b>0$則$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$且"＝"成立$\Longleftrightarrow a=b$，可圖解如下：

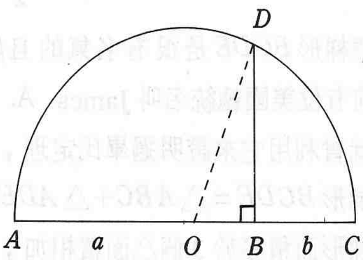

圖2

1.作$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=b$，以$\overline{AC}$爲直徑作半圓。

2.過B作$\overline{AC}$的垂直線交半圓於D，則$\overline{BD}=\sqrt{ab}$。

3.取$\overline{AC}$中點O（半圓圓心）則$\overline{OD}=\frac{a+b}{2}$，由直角$\Delta$斜邊最大可看出$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$，而且"＝"成立$\Longleftrightarrow \overline{OD}=\overline{BD}\Longleftrightarrow O=B$，也就是$a=b$。

跟以上相類似的，有下列這個不等式：設$a>0$，$b>0$則$\frac{a^2+b^2}{2}\geqq(\frac{a+b}{2})^2$且"＝"成立$\Longleftrightarrow a=b$。

證明：

1.如圖3，直角ΔABC三邊長爲a，b，c。

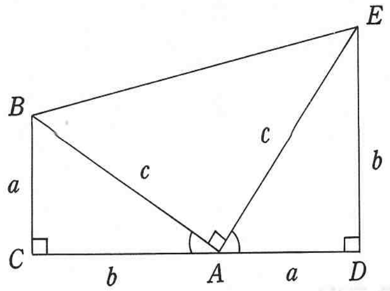

圖 3

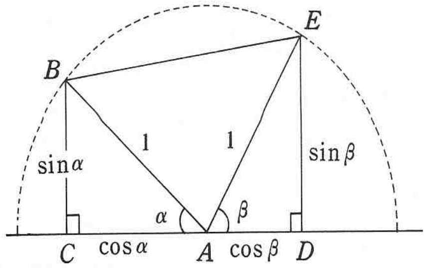

圖 4

2. 延長 $\overline{CA}$ 至 D 使 $\overline{AD}=a$，作 $\overline{DE}\perp\overline{CD}$ 於 D，且 $\overline{DE}=b$，連接 $\overline{AE}$ 與 $\overline{BE}$ 則 $\overline{AE}=c$ 且 $\angle BAE=90^\circ$ $\therefore BE=\sqrt{2}c=\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$。

3. $\because \overline{BE}\geqq\overline{CD}$ 即 $\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}\geqq a+b$，兩邊平方得 $2(a^2+b^2)\geqq(a+b)^2$，再兩邊除以 4，即得 $\frac{a^2+b^2}{2}\geqq(\frac{a+b}{2})^2$，且"＝"成立 $\Longleftrightarrow \overline{BE}=\overline{CD}$，即 $a=b$。

上面這個不等式也可寫爲 $a^2+b^2\geqq\frac{(a+b)^2}{2}$。

圖 3 這個梯形 $BCDE$ 是很有名氣的且妙用多多，以前有位美國總統名叫 James A. Garfield 就曾利用它來證明過畢氏定理，他的證明是：梯形 $BCDE=\triangle ABC+\triangle ADE+\triangle ABE$（指梯形面積等於 3 個△面積相加，以下同此）

$$\therefore \frac{1}{2}(a+b)^2=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2$$

兩邊消去 $\frac{1}{2}$，整理可得 $a^2+b^2=c^2$，證畢。

這個妙證出自總統先生之手，不禁令人覺得：妙解人人有，連國家元首也會露一手！

將圖 3 的梯形稍作變化，我們再來導出兩個公式如下：

一、正弦兩角和公式：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

證明：我們就 α，β 均爲銳角的情形證明如下：

1. 在線段 $\overline{CD}$ 上任取一點 A，以 A 爲圓心，1 爲半徑作圓弧分別交過 C，D 且與 $\overleftrightarrow{CD}$ 垂直之直線於 B，E（如圖 4）

2. 令 $\angle BAC=\alpha$，$\angle EAD=\beta$ 則 $\angle BAE=\pi-(\alpha+\beta)$，於是 $\overline{BC}=\sin\alpha$，$\overline{AC}=\cos\alpha$，$\overline{DE}=\sin\beta$，$\overline{AD}=\cos\beta$。

3. 梯形 $BCDE=\triangle ABC+\triangle ADE+\triangle ABE$

$$\therefore \frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)(\cos\alpha+\cos\beta)=$$
$$\frac{1}{2}\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\beta\cdot\cos\beta$$
$$+\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin(\pi-(\alpha+\beta))$$

即 $(\sin\alpha+\sin\beta)(\cos\alpha+\cos\beta)$
$$=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\beta\cdot\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)$$
$$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta。$$

二、柯西不等式：

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqq(ac+bd)^2$ 且"＝"成立 $\Longleftrightarrow a:c=b:d$

證明：我們就 a，b，c，d 爲正數的情形證明如下：

1. 圖 5 中 ABC 與 ADE 是任意的兩個直角△。

令 $\angle BAE=\theta$ 則 $\triangle ABE=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\sin\theta$。

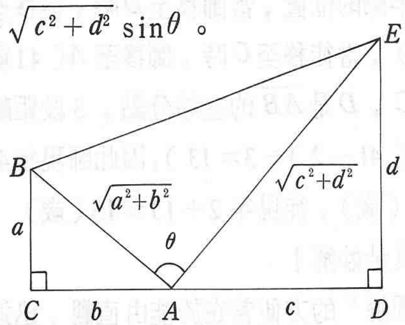

圖 5

2. 梯形 $BCDE=\triangle ABC+\triangle ADE+\triangle ABE$

即 $\frac{1}{2}(a+d)(b+c)=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}cd$

$+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\sin\theta$

3. $\because 0<\sin\theta\leqq 1$ $\quad\therefore \frac{1}{2}(a+d)(b+c)$

$\leqq\frac{1}{2}(ab+cd+\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2})$。

$\therefore ac+bd\leqq\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$。

即 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqq(ac+bd)^2$

此中“＝”號成立的充要條件為 $\sin\theta=1$ 即 $\theta=90^\circ$，此時 $\triangle ABC\sim\triangle EAD$ 即 $a:c=b:d$

看了以上的證明真不禁令人驚嘆：寥寥的3個三角形組成的梯形竟然有這麼多的妙用，把幾個式子就這樣輕巧的證明出來了，您能不感受它的魅力！?

在以上的證明中我們也可以看出來幾乎都用到了面積，原來面積也有它的妙用，舉二個大家比較熟悉的例子：

例1：在圖6中，$\angle BAC=120^\circ$，$\overline{AB}=x$，$\overline{AC}=y$，分角線 $\overline{AD}=z$ 求證：

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$。

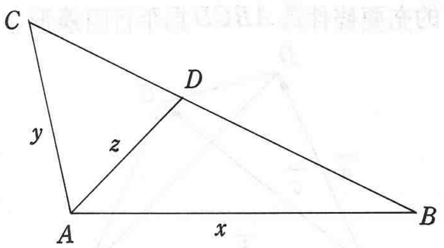

圖6

證明：$\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ACD$，

即 $\frac{1}{2}xy\sin 120^\circ=\frac{1}{2}xz\sin 60^\circ+\frac{1}{2}yz\sin 60^\circ$，兩邊消去 $\frac{1}{2}\sin 120^\circ$（即 $\frac{1}{2}\sin 60^\circ$）得

$xy=xz+yz$。

再兩邊同除以 xyz 即得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$，

證畢——這又是一個妙解！

例2：P 是正 $\triangle ABC$ 內部任一點，自 P 向三邊作垂線，垂足分別為 D，E，F，令 $\overline{AM}$ 是 $\overline{BC}$ 上的高，則 $\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF}=\overline{AM}$，試證之。

證明：連接 $\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$ 則 $\triangle PAB+\triangle PBC+\triangle PCA=\triangle ABC$，

即 $\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PD}+\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{PE}+\frac{1}{2}\overline{CA}\cdot\overline{PF}=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AM}$，

$\because \overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$，

$\therefore \overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF}=\overline{AM}$。

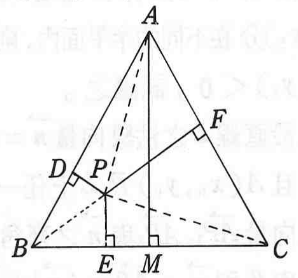

圖7

以上若 P 在△之邊上則上述結果顯然仍然成立，但若 P 在△之外部則上述結果就不成立了，您能仿上導出它們的關係式嗎？

大家都曉得向量的內積很有用，現在舉三個用內積求解的妙解如下，以與大家共享：

例1：求 $4\cos\theta-3\sin\theta$（$0\leqq\theta<2\pi$）之最大、最小值。

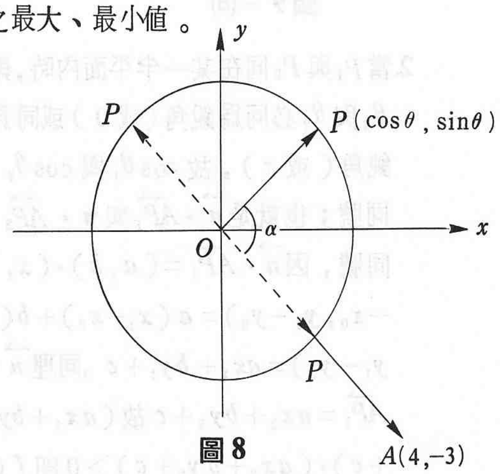

圖8

解：令 $P(\cos\theta,\sin\theta)$，$A(4-3)$，

且向量$\overrightarrow{OP}$與$\overrightarrow{OA}$之夾角爲α。

則$4\cos\theta-3\sin\theta=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OP}|\cos\alpha=5\cos\alpha$。

當$\alpha=0$時(即$\overrightarrow{OP}$與$\overrightarrow{OA}$同向),

則原式$=5\cos o=5$爲最大值。

當$\alpha=\pi$時(即$\overrightarrow{OP}$與$\overrightarrow{OA}$反向),

則原式$=5\cos\pi=-5$爲最小值。

用上述方法我們可證明$a\cos\theta+b\sin\theta$($\leqq\theta<2\pi$)之最大值爲$\sqrt{a^2+b^2}$,最小值爲$-\sqrt{a^2+b^2}$。

例2:設直線L: $f(x,y)=ax+by+c=0$將坐標平面分割爲兩個半平面H_1與H_2,若$P_1(x_1,y_1)$與$P_2(x_2,y_2)$同在某一半平面內則$f(x_1,y_1)\cdot f(x_2,y_2)>0$。若$P_1(x_1,y_1)$與$P_2(x_2,y_2)$分在不同的半平面內,則$f(x_1,y_1)\cdot f(x_2,y_2)<0$,試證之。

證:1.設直線L之法線向量$\vec{n}=(a,b)$且$A(x_0,y_0)$爲L上任一點,又令向量$\overrightarrow{AP_1}$,$\overrightarrow{AP_2}$與$\vec{n}$之夾角分別爲θ_1與θ_2則$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP_1}=|\vec{n}||\overrightarrow{AP_1}|\cos\theta_1$, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP_2}=|\vec{n}||\overrightarrow{AP_2}|\cos\theta_2$。

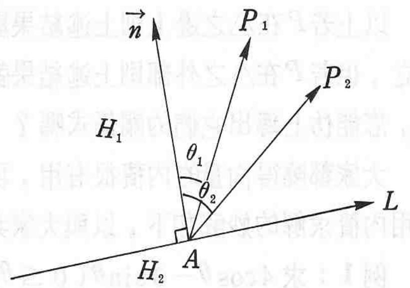

圖9-(a)

2.當P_1與P_2同在某一半平面內時,則θ_1與θ_2必同爲銳角(或0)或同爲鈍角(或π),故$\cos\theta_1$與$\cos\theta_2$同號;也就是$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP_1}$與$n\cdot\overrightarrow{AP_2}$同號,因$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP_1}=(a,b)\cdot(x_1-x_0,y_1-y_0)=a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)=ax_1+by_1+c$。同理$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP_2}=ax_2+by_2+c$故$(ax_1+by_1+c)\cdot(ax_2+by_2+c)>0$即$f(x_1,y_1)\cdot f(x_2,y_2)>0$(圖9-(a)所示$P_1$與$P_2$同在$H_1$內且$0<\theta_1$, $\theta_2<\frac{\pi}{2}$)

3.當P_1與P_2不在同一半平面時,則θ_1與θ_2必一爲銳角(或0),另一爲鈍角(或π),故$\cos\theta_1$與$\cos\theta_2$異號,也就是$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP_1}$與$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP_2}$異號,故$(ax_1+by_1+c)\cdot(ax_2+by_2+c)<0$即$f(x_1,y_1)\cdot f(x_2,y_2)<0$(圖9-(b))所示,$P_1$, P_2分在H_1與H_2內且$0<\theta_1<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\theta_2<\pi$)。

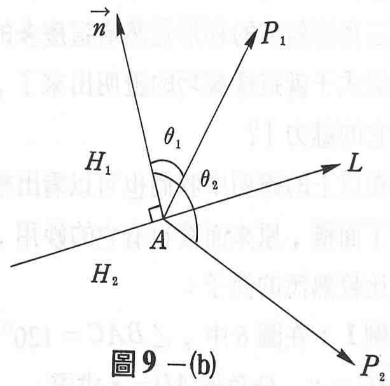

圖9-(b)

例3:設$ABCD$爲任意四邊形,試證$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2\geqq\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$且“=”成立的充要條件爲$ABCD$爲平行四邊形。

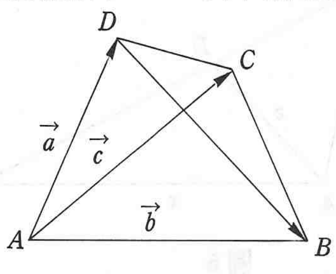

圖10

證:1.令$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$則$\overrightarrow{BC}=c-b$, $\overrightarrow{BD}=\vec{d}-\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{d}-\vec{c}$。於是$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2-\overline{AC}^2-\overline{BD}^2$

$=|\vec{b}|^2+|\vec{c}-\vec{b}|^2+|\vec{d}-\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2-|\vec{c}|^2-|\vec{d}-\vec{b}|^2$

$=|\vec{b}|^2+(|\vec{c}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c})+$

$(|\overrightarrow{d}|^2+|\overrightarrow{c}|^2-2\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d})+|\overrightarrow{d}|^2-$
$|\overrightarrow{c}|^2-(|\overrightarrow{d}|^2+|\overrightarrow{b}|^2-2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{d})$
$=|\overrightarrow{b}|^2+|\overrightarrow{c}|^2+|\overrightarrow{d}|^2-2(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})-$
$2(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d})+2(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{d})$
$=|\overrightarrow{b}+\overrightarrow{d}-\overrightarrow{c}|^2\geqq 0$
$\therefore \overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2\geqq\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$

2.“＝”成立時$\Longleftrightarrow \overrightarrow{b}+\overrightarrow{d}-\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$
$\Longleftrightarrow \overrightarrow{c}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{d}$
$\Longleftrightarrow ABCD$爲平行四邊形。

以上例 3 這個證明是非常漂亮的（希望您能欣賞），其中用到了向量內積的性質：

$|\overrightarrow{a}\pm\overrightarrow{b}|^2=(\overrightarrow{a}\pm\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}\pm\overrightarrow{b})$
$=|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2\pm 2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})$

以上所列舉的都是妙解，但也有初學者功力不夠，卻想一步登天因而導致錯誤，這就變成謬解了，舉例如下：

一、設 $x^2y=8$，$x>0$，$y>0$，求 $x+y$ 的最小值。

解：由A.M.≧G.M.得 $x+y\geqq 2\sqrt{xy}$，“＝”號成立的充要條件爲 $x=y$。而當 $x=y$ 時代入 $x^2y=8$ 中得 $x=y=2$，因而 $x+y=2\sqrt{xy}=4$ 爲最小值。

以上解法是錯誤的，雖然 $x=y$ 時 $x+y=2\sqrt{xy}$，但此式的右邊 $2\sqrt{xy}$ 仍含變數 x，y 並非定值，故不是 $x+y$ 的最小值。

正確的解法應爲：

$$x+y=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+y\geqq 3\sqrt[3]{(\frac{x}{2})^2\cdot y}=3\sqrt[3]{2}$$

，因 $3\sqrt[3]{2}$ 爲定值，故爲 $x+y$ 的最小值。

注意：在上題中產生 $x+y$ 之最小值的 x, y 爲 $x=2\sqrt[3]{2}$，$y=\sqrt[3]{2}$，此時 $x=2y$ 而非 $x=y$。

二、某奶粉工廠欲訂購一批容積一定之圓柱形的鐵罐，問應如何設計才最節省材料？

解：設圓柱的高度爲 h，底半徑爲 r，則其容積 $V=\pi r^2h$ 爲定值，表面積 $S=2\pi r^2+2\pi rh$，現欲求 r，h 之關係使 s 最小。

有同學馬上猜說 $h=r$，錯了！正確應是 $h=2r$，理由如下：

由A.M.≧G.M.得 $S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+\pi rh+\pi rh\geqq 3\sqrt[3]{2\pi^3r^4h^2}=3\sqrt[3]{2\pi}\sqrt[3]{(\pi r^2h)^2}=(3\sqrt[3]{2\pi})\sqrt[3]{V^2}$ 爲定值。

故當 $2\pi r^2=\pi rh$ 即 $h=2r$ 時，表面積 S 最小即材料最省！

本題若由 $S=2\pi r^2+2\pi rh\geqq 2\sqrt{4\pi^2r^3h}=4\sqrt{\pi\cdot\pi r^2h}\sqrt{r}=4\sqrt{\pi\cdot V}\sqrt{r}$ 說 $2\pi r^2=2\pi rh$ 時，即 $r=h$ 時 S 最小則爲錯誤，因上式右端之 $4\sqrt{\pi\cdot V}\sqrt{r}$ 並非定值（猶含變數 r）。

三、在教幾何問題時，常會發現有同學易犯下列“一廂情願”的毛病：

設△ABC爲任意△，自頂點 A 作底邊 $\overline{BC}$ 的垂直平分線 $\overline{AD}$（垂直 $\overline{BC}$ 且平分 $\overline{BC}$——很貪心），則△ABD≅△ACD（S.A.S.）可得 $\overline{AB}=\overline{AC}$。於是得到了“任意三角形爲等腰三角形”的謬論。

下面這個例子跟上面的情形有“異曲同工”之“謬”：

設△ABC爲任意三角形，作∠A的分角線 $\overline{AD}$ 和 $\overline{BC}$ 的中垂線 $\overline{DE}$ 相交於 D 點，則有下列兩種情形：

1. D在△ABC內部：連接 $\overline{BD}$、$\overline{CD}$ 並自 D 作 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的垂線，令垂足分別爲 F、G，則

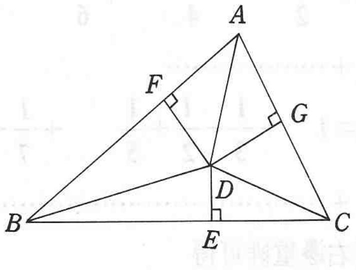

圖11

$\overline{DB}=\overline{DC}$，$\overline{DF}=\overline{DG}$，$\angle BFD=90°=\angle CGD$。

$\therefore \triangle BDF \cong \triangle CDG$ 故 $\overline{BF}=\overline{CG}$ ………(1)

又 $\overline{DF}=\overline{DG}$，$\overline{AD}$ 爲公共邊。

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle ADG$ 故 $\overline{AF}=\overline{AG}$……(2)

由(1)(2)我們得到下列結論：

$\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{FB}=\overline{AG}+\overline{GC}=\overline{AC}$，

即$\triangle ABC$爲等腰三角形。

2. D在$\triangle ABC$外部：依第1 種情形的討論，我們亦可得下列結論：

$\overline{AB}=\overline{AF}-\overline{FB}=\overline{AG}-\overline{CG}=\overline{AC}$，

亦即$\triangle ABC$爲等腰三角形。

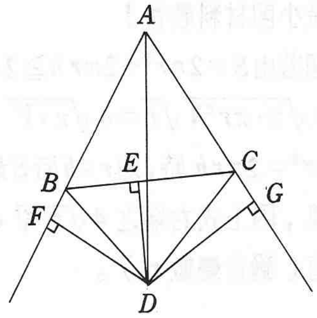

圖 12

綜合以上 1，2，我們均得“任意△爲等腰△”之謬論。

讀者試自行找出以上謬誤之所在！

四、考慮下列交錯級數 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots\cdots$

這個級數是收斂的且收斂於一正數A（證明從略）但下面的推演卻可導出$A=0$，您說怪不怪：

$$A=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

於是 $\frac{1}{2}A=\quad\frac{1}{2}\quad-\frac{1}{4}\quad+\frac{1}{6}\quad-\frac{1}{8}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

相加得 $\frac{3}{2}A=1\quad+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\quad+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

將(1)式右邊重排可得

$$\frac{3}{2}A=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$=A$$

故$\frac{3}{2}A=A \therefore A=0$，這是不可能的！爲什麼會這樣？仔細推敲，問題是出在將(1)式右端重排得到(2)式之右端，也就是用到了交換律。因爲無窮級數用了交換律會導致錯誤的結果，因此可知交換律對無窮級數是不成立的。

這是一個很不錯的例子，它告訴我們交換律並不是對所有情形都能成立，因此我們現在複數系裡加法與乘法滿足交換律實在是非常珍貴，連帶使它有很多性質很完美。

最後再舉一個妙解但也會謬解的例子：求 $\frac{3}{\cos\theta}+\frac{2}{\sin\theta}$（$0<\theta<\frac{\pi}{2}$）之最小值

解：將柯西不等式推廣可得$(a_1^3+b_1^3)(a_2^3+b_2^3)(a_3^3+b_3^3)\geqq(a_1a_2a_3+b_1b_2b_3)^3$，

於是$\left(\sqrt[3]{\frac{3}{\cos\theta}}^{\,3}+\sqrt[3]{\frac{2}{\sin\theta}}^{\,3}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{3}{\cos\theta}}^{\,3}+\sqrt[3]{\frac{2}{\sin\theta}}^{\,3}\right)\left(\sqrt[3]{\cos^2\theta}^{\,3}+\sqrt[3]{\sin^2\theta}^{\,3}\right)$

$\geqq\left(\sqrt[3]{\frac{3}{\cos\theta}}^{\,2}\cdot\sqrt[3]{\cos^2\theta}+\sqrt[3]{\frac{2}{\sin\theta}}^{\,2}\cdot\sqrt[3]{\sin^2\theta}\right)^3=(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4})^3$，

即$\left(\frac{3}{\cos\theta}+\frac{2}{\sin\theta}\right)^2\geqq(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4})^3$。

$\therefore \frac{3}{\cos\theta}+\frac{2}{\sin\theta}\geqq(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4})^{\frac{3}{2}}$

$=(3^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$，

即$\frac{3}{\cos\theta}+\frac{2}{\sin\theta}$之最小值爲$(3^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$，這眞是妙解！

但假如把這個問題解成下列結果，那就不妙了：由 A.M.$\geqq$G.M. 得

$$\frac{3}{\cos\theta}+\frac{2}{\sin\theta}\geqq 2\sqrt{\frac{6}{\sin\theta\cos\theta}}$$

$$=2\sqrt{\frac{12}{\sin 2\theta}}\geqq 2\sqrt{12}=4\sqrt{3}。$$

（下轉第 133 頁）