項武義先生演講——

古典幾何學的綜合分析

引子：簡樸地說，幾何學就是空間的認識論，它是人類理性文明中，對於空間的本質，世代相承、精益求精的研究所得的結晶與精華。空間就是人類和萬物萬象共存於其中的所在；空間的本質既有簡樸勻稱之美，又具精深微妙之奧；它既平實近人而又引人入勝。由此可見，幾何學之所以一直是古往今來啓迪思維的佳園、治學科研的典範，實非偶然！可以說，幾何學是人類理性文明中當之無愧，理所當然的瑰寶！

我們在第一講中所討論的，其實就是**歐氏幾何學的進化論**；順着幾何學由實驗幾何進步到推理幾何，然後再進步到解析幾何，以至於到改用格氏代數（Grassmann Algebra)來系統地駕御高維定量幾何，做了一次基礎理論的逐步逐階的重新構築。在第二講所討論者則是**對稱性的解析幾何**。歐氏、球和雙曲幾何（亦即非歐幾何)（Euclidean, spherical or hyperbolic (i.e. non-euclidean) geometries ）的共同特點在於它們都具有同樣的疊合公理（Congruence axioms)，亦即它們都具有同樣豐富的對稱性（Symmetric properties ）。再者，上述三種空間的解析幾何的基礎所在都在於描述其中三角形的角邊函數相關的正、餘弦定律（ sine and cosine laws ）。由此可見，在第二講中用抽象旋轉面的解析幾何，來對於上述三種古典幾何的基礎理論提供一種統一的處理，乃是很自然的一種求同存異的做法。其好處不但貫徹了當年 János Bolyai 首創**絕對幾何學**（absolute geometry）的想法，將三種幾何學中各別的三角定律給以統一的論證；而且也直截了當地明確了三角形內角和的幾何蘊含，以及“反射對稱空間”(reflectional symmetric spaces)的存在性和唯一性。我們在第三講所討論者乃是實射影和複射影幾何（real projective and complex projective geometries）的基礎理論，也就是連結性質和射影變換的基礎理論。連結性質（ connection properties ）乃是空間的諸多

* 項武義先生演講前三講爲「從勾股到格氏代數」、「平行與三角」、「直線與圓」，此三講請見本刊第十二卷第三期～第十四卷第一期。

結構之中，最為簡樸基本者也。因此當然有必要徹底探討這種性質所具有的深層內含。在這方面的基礎理論就是通過廸氏定理（Desaurques Theorem）的反復運用所建立起來的直線段的本質性代數（intrinsic algebra)和本質性坐標化（intrinsic coordinazation）。這樣不但徹底揭示了連結結構的深刻內蘊，而且也通過這種幾何與代數的自然密切關聯，左右逢源地拓展了視野，豐富了數學思想。總之，我們在前三講中，業已對於古典幾何學中的至精至簡作了一次簡樸扼要的剖析，所着重者是古典幾何學中的思想與本質的闡述。現在讓我們再進一步對於前三講所討論的幾種古典幾何，亦即歐氏，球，雙曲，實射影和複射影幾何學，再作一番綜合分析，作為這一系列講演對於古典幾何基礎理論的全局探討的一個總結。我們將從下述三方面來對於上列五種古典幾何作一個綜合性的總結與比較分析：

㈠幾何概念的演進與發展。

㈡幾何結構的比較與分析。

㈢在古典幾何學的研討中所展現的幾何思想和所發展起來的科研方法。

第一節　幾何概念的演發

㈠歐氏幾何學（Euclidean Geometry）：

在各種各樣的幾何學之中，以歐氏幾何最為直觀實用，也最為精簡全面，而且它又是所有其他幾何學的根源之所基，歐氏幾何學本身的基礎則是直接植根於我們生活於其中的現實空間的實驗性的本質。例如兩個點之間的最短通路的唯一存在，長度、角度，形狀大小，三角形的疊合條件，三角形的內角和恆等於一個平角等等。由此可見，歐氏幾何體系其實也就是我們對於現實空間的觀察實驗的系統總結；把我們生活於其中的實在空間的各種各樣的本質，提出一種精簡實用，明確好用的系統描述。在第一講《由勾股到格氏代數》中，我們業已順着歐氏幾何學由實驗幾何，定性、定量推理幾何一直到用格氏代數來處理高維解析幾何的自然進化途徑，對於其基礎理論的來龍去脈做了一次相當徹底的結構分析。現在讓我們再次對於歐氏幾何體系的本質，來作一簡要的總結與剖析：

(1)**點**、**線**、**面**的**連結**與**交織**是空間最為基本的結構；其中點就是**位置**的抽象，直線段就是**最短通路**的抽象，它們乃是空間最為原始的本質與結構。我們生活於其中光明透亮的周遭，使得上述基本結構的認識與總結顯得更加自然易見，可以說是一目瞭然者也！

(2)直線段的**長度**是各種各樣的幾何量之中最為簡單基本者；其他各種各樣的幾何量如角度、面積、體積等等都可以由長度的組合衍生而得。例如三角形的餘弦定律以及各種各樣的面積、體積公式也就是具體地表明角度、面積、體積如何從屬於長度的基本定理。由此可見，長度的度量是定量幾何學的起點。直線段的**可公度性**（Commensurability）**是否普遍成立**則的確是整個定量幾何的根本問題。這也就是為什麼當年古希臘幾何學家們對於上述問題反覆探討世代相承地鑽研不捨，務必要徹底理解其精微至理之種切！

(3)三角形和圓是歐氏空間中的至精至簡的幾何圖形；它們的幾何性質則是歐氏幾何學的精要所在，總結三角形和圓的各種幾何性質的內部關聯的那幾個基本定理，例如面積公式、勾股定理、相似三角形定理，正、餘弦定理，圓冪定理等等其實也就是歐氏幾何基礎理論之所在。

(4)**勻稱性**（homogeneity），**對稱性**（symmetry）和**疊合公理**（congruence axioms）是同一種幾何本質的幾種表現：歐氏空間是一種極為勻稱，到處一致的一種結構。例如在歐氏空間之中，任何兩個點皆居於同等地

位；任何兩條直線皆居於同等地位；任何兩個平面皆居於同等地位。上述勻稱性的具體明確的提法是：歐氏空間的自同構變換（automorphisms)組成一個群叫做**歐氏變換群**(Euclidean transformation group) EG。對於空間中任給兩個點 p_1、p_2（或任給兩條直線 l_1、l_2；或任給兩個平面 π_1、π_2），恒有 EG 中的適當元素 g 使得 $g(p_1)=p_2$（或 $g(l_1)=l_2$；或 $g(\pi_1)=\pi_2$)。再者，歐氏空間對於其中一個給定平面 π 的反射對稱（一如日常常見常用的鏡面反射對稱）則是歐氏空間的各種各樣自同構之中，最爲簡單的一種；而且所有其他各種各樣的自同構又都可以由有限個這樣簡單的反射對稱組合而成，亦即上述反射對稱業已構成歐氏變換群的一族生成元（generator system）。由此可見，歐氏空間的反射對稱性（reflectional symmetry）其實就是用 EG 中所含的這種既簡單又基本的生成元來描述歐氏變換群 EG；而上述自同構群本身也就是歐氏空間的勻稱性的總體（the totality of its homogeneity）。

改用歐氏變換群來說明空間兩個子集 A_1，A_2 之間的疊合性（congruence)，則有 A_1，A_2 能夠相互疊合的充要條件就是存在 EG 之中的適當元素 g 使得 $g(A_1)=A_2$，由此可見，歐氏幾何中的疊合公理，其實就是通過上述變換群 EG 分別在直線段、角區和三角形這三種簡單基本的子集上的具體表現來描述表達歐氏空間的勻稱性和對稱性。（註）

〔註〕：疊合公理是歐氏幾何體系中由古希臘沿用至今的傳統敍述方式。回顧當年，當然還沒有像同構映射、變換群這種比較現代化的概念。即使像反射對稱性這種十分直觀的事物，當年也只是用它們來構造輔助線，提供解題的思路；但是避免把它們用來作正式的論證之用。究其原因，大概是因爲對於讓全空間變動的映射、變換這種事物，感到十分不自在的緣故。

(5)**平行公設，內角和定理和相似三角形定理**：“平行公設”和“內角和定理”是歐氏幾何中兩個密切相關，邏輯等價的特點；平行四邊形和平移變換（translations）則是上述平行性的具體表現，它們也就是引進位移向量將歐氏空間的幾何結構全面代數化的基礎所在。再者，相似變換（similarity homothety）其實就是我們日常常見常用的放大或縮小變換。關於它們的基本定理則是相似三角形定理；而上述相似變換的代數化就是向量的**倍積**，再者倍積的分配律則是上述相似三角形定理的代數化表達式。在第二講《平行與三角》的討論中，業已說明了平行和相似都是歐氏幾何所獨有的簡樸特色，而且在疊合公理的協助之下，兩者其實也是邏輯等價的。

(6)歐氏空間是唯一能夠全面代數化的度量型幾何體系（metric geometric system）；格氏代數則是一種全盤反映歐氏空間的定量型性質的至精至簡的代數體系，（參看第一講《從勾股到格氏代數》）。向量的內積分配律其實就是勾股定理的優化與代數化，而格氏代數的本質性要點則在於勾股定理的高維推廣，亦即高維平行體之間的內積的多線性（multilinearity，亦即分配律）。

總結上述六點，足見歐氏空間的結構簡樸全面，直觀實用；而且還可以用精簡易算的格氏代數把各種各樣的定量幾何問題，歸於向量代數的計算加以表達，並且只要有系統地運用簡簡單單的一套運算律，就能統御全局，無往不利！它是各種各樣幾何體系之中，最爲基本常用，也是最爲簡潔完美者；而且它也是其他各種幾何的發祥地和出發點。

(二)球面幾何（Spherical Geometry）和非歐幾何（Non-euclidean Geometry）：

概括地說，球面幾何和非歐幾何也就是和歐氏幾何具有同樣豐富的對稱性的另外兩種度

量型幾何；它們也都具有長度、角度概念而且滿足完全同樣的疊合公理；亦即它們也都和歐氏空間一樣具有極大可能的反射對稱性。第二講《平行與三角》中所研討的主題也就是具有對稱性的度量型空間的解析幾何。現在讓我們在此再來對於度量概念與對稱性作一簡要的剖析與總結。

(1)歐氏空間是度量型空間的至簡模式；長度則是歐氏空間各種幾何度量的基本。再者，歐氏空間還具有相似不變性（homothety invariance）這一特點。例如把一個半徑是單位長的球面放大十倍，所得者乃是半徑是10單位的球面而並非原來的單位球面。但是把歐氏空間（或平面）放大或縮小任意倍，則所得者依然是它的本身。

(2)現在讓我們以常見常用的平滑曲面為例，來剖析一下一般度量型幾何結構和歐氏空間（或平面）之間的關係：

設$\sum$是空間中的一個平滑曲面（Smooth surface），如下圖所示，T_P是其上一點P的切平面。

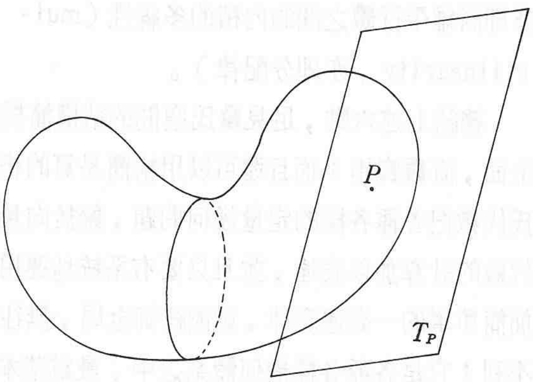


圖1

假如我們用愈高倍的顯微鏡去觀察$\sum$上P點鄰近的微片，則它愈和上述切平面T_P的P點鄰近微片，密合得難以分別！其實，我們應該根本把切平面T_P想成曲面$\sum$上P點鄰近的無限小微片的無限放大的極限模式！由此可見，一個平滑曲面在每一點的局部性質（lacal properties）都是以歐氏平面為其"無窮小逼近模式"（model of infinitesimal approximation）。把上述觀點加以抽象化，用來作為廣義空間模型的基本特徵性質，這樣所定義者，也就是通常稱之謂李曼空間（或流形）（Riemannian manifolds）的這種度量型空間。概括地來說，這種廣義度量型空間的要點就是具有局部坐標系（local coordinate systems），而且其中的平滑曲線的弧長微分的平方可以用局部坐標的正定二次微分式表達之，亦即

$$ds^2=\sum g_{ij}\,dx_i\,dx_j$$

其中g_{ij}是局部坐標的函數，而且上述二次型在dx_i不全為零時恒取正值。（其實上述弧長微分形式也就是勾股定理的無窮小形式！）例如在第二講中所討論的抽象旋轉面和常見常用的平滑曲面都是這種廣義度量型空間的實例。

(3)上述廣義度量空間的本質結構就是其中的平滑曲線的弧長具有和歐氏空間的曲線弧長同樣的積分表達式。對於這種度量空間的幾何性質的研討，很自然的要先從兩點之間的最短通路的存在性與唯一性着手。其研討的辦法則自然得由弧長的變分公式（variation formula of arclength integral）起始。從這裡也就自然地引出測地線（geodesics），它們也就是歐氏空間中的直線段的自然推廣；其特徵性質則是弧長第一變分（the first variation of arclength）恒等於零。

(4)在歐氏平面E^2上使得給定點x_0固定不動的所有保長變換(isometric transformation)構成的群叫做二階正交群$O(2)$（orthogonal group of rank 2）〔註〕；它包括所有對於一條過x_0點的直線的反射對稱，而且這種反射對稱也組成了它的一族生成元。再者，對於以x_0點為其原點的一個笛氏坐標系，則$O(2)$中的元素的坐標變換式即成下述形式：

$$\begin{cases} x' = \cos\theta x - \sin\theta y \\ y' = \pm\sin\theta x \pm \cos\theta y \end{cases}$$

〔註〕：在n-維歐氏空間E^n上使得一個給定點固定不動的所有保長變群構成的群叫做n階正交群，通常以符號$O(n)$表之。

由此可見，一個二維度量空間Σ在某一點x_0具有和歐氏平面同樣豐富的**局部對稱性**（local symmetry）的提法就是：Σ上使得x_0點固定不動的保長變換群也是$O(2)$，亦即

$$ISO(x_0, \Sigma) \simeq O(2)$$

至少具有這樣一個點x_0的二維度量空間也就是在第二講中所討論的抽象旋轉面！

(5)球面和非歐平面其實也就是那種每一個點（亦即到處）都具有和歐氏平面同樣豐富的局部對稱性的二維空間，亦即

$$ISO(x, M) \simeq O(2)$$

對於M上每一個點x皆成立。

回顧第二講《平行與三角》中的討論，我們是先用極坐標和本質函數描述這種具有$O(2)$-型局部對稱性的二維空間——抽象旋轉面。接着用其上的弧長變分公式去得出這種抽象旋轉面上測地線的解析描述，亦即測地線的微分方程。並且進而求得描述其上測地線的幾何性質的廣義正弦、餘弦定律；證明了其上的高斯—伯內公式（Gauss-Bonnet Formula）。最後再對於齊性（homogeneous）抽象旋轉面作進一步的研討，完全確定了這種和歐氏平面具有同樣豐富的對稱性的空間的**存在性**和**唯一性**。這樣不但簡潔完整地剖析了困擾幾何學界近二千年的“平行公設之困擾”，而且也透徹地揭示了度量和對稱之間的關係。再者，上面這樣一段“對稱性與度量”的解析研討的焦點在於其上的三角定律，而所得的球面、非歐三角定律則又是進一步研討球面、非歐空間的解析幾何的基礎所在！〔可以說歐氏、球面和非歐這三種空間的三角學乃是其中三角形的解析幾何，所以也就是三種空間的具體而微的解析幾何。〕

㈢實射影、複射影幾何（real projective, complex projective geometries）：

兩點連一直線乃是空間最爲原始的基本結構；點、直線、平面之間的連結與交截性質實乃是空間的諸多本質之中最爲簡樸基礎部份。射影幾何學也就是對於空間的這種至簡至精的連結與交截性質，加以深入研究的學科。在我們日常生活實踐的經驗之中，光線也就是直線的常見常用的具體表現，我們的視覺在本質上就是一種透視投影（perspection）。由此可見，射影幾何所研討的上述基本事物與本質都是十分簡樸自然者，它們顯然是最爲基礎性的一種幾何。

射影變換（projective transformations）和**射影不變量**（projective invarants）的探討，乃是整個射影幾何學的指導思想。共線四點列的交叉比（cross ratio）的射影不變性則是上述探討中的一個重大發現。迪沙久定理、巴布斯定理則是在連結交截性質上具有樞紐的重要性的基本定理。在第三講《直線與圓》對於連結交截性質的抽象化研討之中，充分地展現了上述兩個基本定理的威力；也透徹地揭示了射影空間和代數結構之間的深刻關聯；建立了抽象射影空間的代數坐標系。由此就可以把射影幾何的研究系統地歸於代數幾何和代數群的不變量理論（Theory of invariants）來研討。由此可見，射影幾何的進一步深入研究，順理成章地是代數幾何與幾何不變量馳騁的疆場；而上述射影思想和基本定理則是溝通幾何和代數的一座天然橋樑，是使得這兩種數學思想水乳交融的渠道！

複射影直線，$\mathbb{C}\cup\{\infty\}\cong S^2$，的自同構群（亦稱爲Möbius 變換群）也就是其上的保角保圓變換群；對於一個圓的反映（Inversion with respect to a circle）則是其中最爲精簡的一種元素，而且它們業已構成

Möbius 變換群的一組生成系。由此可見，圓乃是複射影直線中最為精簡的基本子集，它其實就是複數系 $\boldsymbol{C}$ 中所含的實數系 $\boldsymbol{R}$ 的“幾何化身”。例如任何一個圓都可以在上述自同構群的作用下和實數軸互相變換；四點共圓的充要條件就是它們的交叉比是一個實數；圓的反映和複數共軛是互相對應的。再者，複射影直線具有極為豐富的射影變換群（例如它可以把任給一對三點列互相變換），而且它具有極為簡單的不變量理論，亦即它的各種各樣不變量都可以歸於單個基本不變量——複交叉比——加以表達。

總結上述對於五種古典幾何的概括，可以說歐氏幾何是現實空間各種幾何性質的全面綜合和整體寫照，它是各種各樣幾何學之中，最為直觀實用，簡樸完美的體系，而且它也是其他各種幾何學的根源所基。當我們對於歐氏幾何中所包含的度量與對稱；三角與平行；點、線、面的連結與交截；以及圓與角等等再各別地作深入研究，則自然而然地又發現這些簡樸自然的幾何概念之中，又各蘊寶藏，別有洞天！那就是我們在第二，第三講的討論中所展現的球面、非歐，實射影和複射影幾何。這種精益求精的深入研究，不但加深了認識，拓展了視野，而且也大幅地豐富了幾何學的範疇，充實了幾何學的思想。其實這也就順理成章地開闢了由古典幾何學邁向近代幾何學的坦途。

我們和萬物萬象共存於其中的“空間”眞可以說是神妙無方的無縫天衣，它既有簡樸勻稱的天成麗質，又具有多彩多姿引人入勝的精微奧理。上述歐氏、球面、非歐，實射影與複射影這五種古典幾何學，其實也就是人類理性文明之中，對於這個神妙天衣世代相承精益求精所譜寫而成的五首讚歌。

第二節　幾何結構的比較分析

本節將對於前述五種幾何結構作一簡明扼要的比較分析。有鑒於在歐氏、球、非歐、實射影和複射影這五種幾何結構之中，二維的情形業已充分體現其本質和精要之所在，所以我們在此將只對於二維這種既簡又精的情形加以比較分析。

(一)歐氏平面、球面與非歐平面

歐氏平面、球面和非歐平面，三者都具同樣豐富的對稱性；亦即對於其上每一點的局部保長變換群都是極大可能的二階正交群 $O(2)$；這種對稱性在基本幾何事物如直線段、角區和三角形上的具體表現則是熟悉的疊合公理。所以上述三種幾何體系的主要共性就是它們都具有同樣的疊合公理。它們之間唯一不同之點則在於其中三角形的內角和分別是恒等於一平角，恒大於一平角和恒小於一平角。

三種幾何學的精要所在都集中在三角形的幾何性質上，尤其是總結三角形的角邊定量關係的正弦、餘弦定律。其實，這三種幾何中各別的正弦、餘弦定律，業已構成了它們各別的解析幾何的基礎；三種幾何中的各種各樣問題，都可以用相應的三角定律把它們歸於解析問題來加以解答。總之，歐氏、球面和非歐乃是三種大同小異的幾何體系。J. Bolyai 對於三種幾何的正弦定律的統一描述，即

$$\frac{\sin A}{\odot a}=\frac{\sin B}{\odot b}=\frac{\sin C}{\odot c}$$

（其中 $\odot a$ 表示以 a 為半徑的圓周周長）就是這種大同的具體表現，我們在第二講《平行與三角》中採取求大同存小異的觀點，用抽象旋轉面的解析幾何來研究**對稱性**和**度量結構**之間的密切關聯，從而不但建立起統一這三種幾何的基礎理論，而且還簡明扼要地證明了上述三種幾何結構的存在性和唯一性定理；澄清了平行公設的眞正幾何蘊含，這可以說是 J. Bolyai 和 N. Lobachevsky 當年發現非歐幾何學這一重大貢獻的一種現代化的統一處理，這樣才算眞

正地貫澈了當年Bolyai 提出絕對幾何學的想法。

(二)歐氏平面、實射影平面和複射影直線

從點集的觀點來看，實射影平面比歐氏平面多加了一條無窮遠直線，複射影直線則比歐氏平面僅僅添加了單個無窮遠點，亦即

$$RP^2 = E^2 \cup l_\infty , CP^1 = E^2 \cup P_\infty$$

實射影平面幾何的中心課題在於點、線的連結與交截和射影變換；添加一條無窮遠直線的原由和好處是這樣做就可以彌補歐氏平面中相異平行線沒有交點這種缺陷，以及由這種缺陷所導致的射影變換在歐氏平面的範圍中不能夠完整地普遍定義的缺點。由此可見，實射影平面其實就是對於歐氏平面的上述缺陷適當地做了針對性的補充，那就是添加了一條無窮遠直線。這樣所得到的實射影平面就具有完備，劃一的連結、交截性質和完整無缺的射影變換。概括地說，實射影平面乃是把歐氏平面在連結、交截方面的性質抽提出來，再加補充完備化而得到的幾何結構；它是整齊劃一地研究連結與交截的幾何內涵的理想體系。因為實射影平面僅僅只保留了歐氏平面的連結交截性質，而且平行和交截也一視同仁地加以統一；所以在射影變換之下，如長度、角度等等度量性質都不再保有，因為它們並不是屬於連結交截的性質者也！其實，一種幾何性質是否從屬於連結交截性質的“試金石”也就是它是否在所有射影變換之下保存不變。我們把這種性質叫做**射影性質**，它們也就是射影幾何研究的對象，例如一組共線的“四點列”的交叉比乃是一種射影性質；而且交叉比相同則是兩組共線四點列能夠互相射影對應的充要條件；它是射影幾何中最為簡單基本的不變量。

複射影直線僅僅只給複數平面添加了單個無窮遠點；這樣做的原由和好處是可以使得在圓的反映之下，圓心也能夠有它的對應點，即無窮遠點。再者，圓是複射影直線中的精簡基本幾何事物；角是其中的基本幾何性質而圓的反映則是其上最為簡單基本的保圓保角(亦即保構或自同構)變換。由此可見，複射影直線乃是把歐氏平面在圓與角方面的性質抽提出來，再添加一個無窮遠點使得其上的基本自同構——圓的反映——皆能完備無缺的幾何結構，它是深入研究從屬於圓與角的幾何性質的理想體系。同樣的，一種幾何性質是否從屬於“圓與角”的試金石也就是它在所有的保圓保角變換的作用之下始終保持不變。例如其上任給一個四點列的複交叉比就是一個重要的基本不變量。

(三)Möbius 幾何與歐氏、球面、非歐幾何

複射影直線上的所有保圓保角變換所構成的變換群通常稱之為Möbius 群。研討在Möbius 變換群的作用之下保持不變的幾何性質的幾何學叫做Möbius幾何。在前面業已指出，Möbius 幾何所研討者，其實也就是歐氏平面上那種從屬於圓與角的幾何性質的“專注探討”。再者，Möbius 幾何和球面幾何、非歐幾何其實也有類似的關係。例如在第三講的討論中，即已指出複射影直線和單位球面之間的極射映射(sterographic projection)乃是一個保圓保角的同構映射。由此可見，上述Möbius 幾何其實也是球面幾何中那些從屬於圓與角的幾何性質的“專注探討”。可以說歐氏、球面和非歐這三種幾何體係，它們在那種從屬於圓與角的幾何性質上又有一種統一，這就是Möbius幾何。

〔註〕：若從變換群與不變量這種幾何觀點來看，上述關係就反映成：Möbius 變換群包括歐氏平面球面和非歐平面的保長變換群為其中三種特殊的子群。在整個Möbius 變換群的作用之下，只有那種從屬於圓與角的幾何性質是保持不變者。當我們把變換群的作用局限到上述三個子群時，則就有長度這種定義於兩點組的不變量了。各別的情形所得的幾何就是

歐氏、球面和非歐幾何。

第三節　幾何思想與方法論

高度透明陽光普照的環境(大氣層)和人類天賦的視覺與腦力，使得我們對於生活於其中的空間的本質天然地具有高度的洞察力與想像力。在人類的理性文明的發展史中，幾何學和天文學是最先發展的兩門科學而幾何學則是最早成熟完備，建立起一個初步完善的理論體系的學問。可以說幾何學乃是人類理性文明中的首一科學(Number one science)，此事實非偶然，究其客觀條件，實因空間的直觀明顯易見而我們天賦的視覺、腦力又是得天獨厚，可以說人人都是天賦的研習幾何的良材。再者，空間的本質與結構，既有其簡樸勻稱之美，又有其精微巧妙之奧；所以在古典幾何學的進化歷程中，自然而然地激發了豐富的思想和精到的方法論。正因如此，自古以來幾何學一直是治學、思維方法論上的先驅與典範，由此可見，古典幾何學不但是我們認識空間的基礎理論，其本身就是人類理性文明中美妙的詩篇，它也是學習科研方法論的自然的啓蒙佳園。有鑒於此，在本講的最後一節，我們將對於古典幾何中所體現的幾何思想與方法論作一簡要的綜合分析。

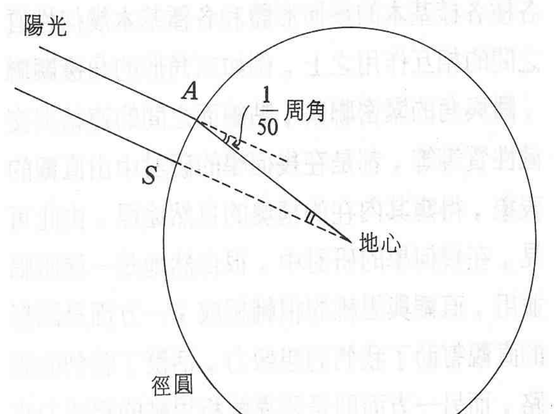
(一)抽象化(Abstraction)公理化(Axiomatization)與數理模型(Mathematical models)

在第一講中，我們對於歐氏幾何學由實驗幾何到推理幾何，然後再進步到解析幾何的逐步演進作了一次簡明扼要的逐步重構(stepwise reconstruction)、從方法論(methodology)的觀點來看，實驗幾何的治學方法乃是以實驗、歸納；分析、綜合爲主；而到了推理幾何(deductive geometry)則是以實驗幾何中所獲得的知識爲基礎，擇其精要，改用分析、綜合、推理去探討空間知識，解決幾何問題。古希腊的幾何學家們在推理幾何學上的輝煌成就，在於善用抽象化公理化這種演繹的(deductive)治學方法，從而創建了第一個完善好用的數理模型，這也就是我們所熟知的歐氏空間，歸根究底，什麼是抽象化？什麼是公理化？什麼是數理模型呢？它們的精要何在？且讓我們扼要地簡作解說如下：

抽象化(Abstraction)：科學研究的基本精神就是實事求是地去認識問題，解決問題。認識問題的要點在於抓好事物或問題的本質。當我們對於某一類事物及問題下功夫研究，就會逐步認識到該事物的種種性質之中，有些和所要研討的問題是有關緊要的，而另有些則和所要研討的問題却是無關緊要的。由此可以想到，我們應該把注意力集中到那些有關緊要者而把那些無關緊要者暫時略去不計！這顯然是一種便於達成簡明扼要地解決問題的好想法與自然的手段，數學中常用的抽象化也就是把有關緊要的性質抽提出來，然後再加以系統組織、形象表達。例如自然數系統是“個數”和“計數”(Cardinality and counting)的抽象化；點就是“位置”的抽象化，直線段就是最短通路的抽象化；一張地圖就是某一地區中各地點的相對位置和其間常用好用的通路的抽象化。

例如當年Eratosthenes(284-192 B.C.亞力山大圖書館館長)想要給人類世世代代生活於其上的地球的大小作一個數量級的估計。他把夏至正午在Syene(即現在的Aswan)和在Alexandria 這兩個地方的日照角度，用像下面所示的一張圖解，既形象又簡明扼要地表達得一目瞭然，這實在是善用抽象化來進行數理分析的好例子。

以下簡單明瞭的圖解中，用一個圓表達過Alexandria和Syene的徑線大圓的抽象化，兩條平行線表達夏至正午同時照射在上述兩地



的陽光。從這樣一個抽象化的圖解，就可以一目瞭解地看到A、S兩地之間的徑線弧在地心所張的角度應該等於在A城實測的陽光和井壁之間的夾角，大約是$\frac{1}{50}$周角，由此即可推算整個徑線大圓的周長應該是A、S兩城之間的距離的50倍，他當時以駱駝驛車一天走100希臘里（stadia），由A城到S城共要走50天來估算，即有

$$50 \times 50 \times 100 \text{ stadia} = 39{,}250\,\text{km}$$

大約比現代的實際測量的大小大了約15％。

歸根究底，抽象化的要點可以總結為**擇其精要，妥加組織，系統表達**；其目的在於便利簡明扼要地研究問題解決問題。在運用上所要注意之點是：**適度性**和**簡明性**；前者是在抓本質上要做得恰到好處，亦即有關緊要者抽提精鍊之而無關緊要者則盡量簡略之；後者則是設法把抽提、保留的要點系統編組，力求簡明好用便於思考運用。

公理化：當我們對於某一類事物的種種性質下功夫研究分析，就會發現它的各種各樣的性質之間，其實是具有縱橫交錯，互相蘊含的邏輯關聯的。由此就自然會想到應該可以運用這種邏輯上的從屬關聯來達成**性質研討上**的**系統化**和**以簡御繁**；也就是可以用簡單而基本的性質去邏輯推導其他各種各樣的從屬性質。其實，在實際的科研實踐中，當然先得要做好由繁精簡，精益求精的抓本質功夫；唯有眞正地掌握好所要研討的事物或現象的至精至簡，才能夠回過頭來以簡御繁，發揮演繹法治學的威力。

在幾何學的研究中，實驗幾何階段所做的就是實事求是地對於我們生活於其中的空間下抓本質的功夫，要由繁精簡，尋求至精至簡的基本性質；而在推理幾何階段所做的則是以一組既精且簡的基本性質為基礎，對於空間繁複多樣的性質和問題，有系統地加以研討。所做的其實就是在性質層面上的以簡御繁。當年古希臘的幾何學家，業已把這種科研方法，在幾何學的研討上發揮得洋洋大觀，體系井然。此事當然並非一蹴而成或一人所創的，而是世代相承鍥而不捨精益求精的總成果。流傳至今的歐幾里得幾何原本（Euclid's Elements）則是一部集其大成的巨著；兩千多年來，它一直是後世治學的典範。當年把選用來作為推理論證的基點的那一組基本性質叫做公理（Axioms），所以沿用其詞，把這種治學方法叫做公理化。

其實公理化的基本精神在於運用邏輯推理去達成事物本質的研討上的以簡御繁。至於公理體係（亦即選用來作為基點的那樣一組至精至簡的性質）的選取當然是並無定論的。例如在定量幾何的研討中，就以改用向量運算律為基點更加合宜簡便。其實向量運算律也就是歐氏幾何學的一組代數化的公理體係，它就是解析幾何學的基礎所在。

數理模型：在代數學中的整數系、有理數系、實數系和複數系和古典幾何學中的歐氏空間、球面、非歐空間、實射影平面和複射影直線等等都是常用的重要數理模型。它們乃是我們對於某一類事物本質精益求精的研究所得的有系統的抽象化。本質上，一個數理模型乃是具有某種精簡好用的性質與結構的抽象體系；它是我們用來反映某一類事物的精簡本質，從而能用來有效地解決一系列問題的優良工具。每一種數理模型的一組特徵性質也就叫做它的一組公理體系。

當我們要採用某一種數理模型去研討某一類事物或求解某一類問題時，首先當然得看一看是否合用？是否合用的第一個檢驗點在於所要研討的事物是否完全具有所要用的數理模型的所有特徵性質？第二個檢驗點則在於它是否恰到好處地簡明扼要地抓住了所要解決的問題的本質。前者是比較容易看得出的先決條件，但是後者則是要試了才能知道合不合用者也。誠然，對於一個善用常用數理模型的老手，他是可以由以往運用的經驗中學到不少先見之明的。其實，對於好些問題，往往還會有好幾種數理模型都是合宜可用者，則選用起來就要看那一個能夠解決得更加精到簡潔來判定孰優孰次了。

數理模型乃是精益求精地研討多種多樣基本事物的共性，總結抽提其精簡的本質，系統地妥加組織而成的體系。它是用來有系統，簡明扼要地解決一系列具有針對性的問題的有力工具。它們都是解析思維，數理研究的高度精鍊化的結晶。

總結本段的討論，抽象化是解析思維的常用，好用的基本手法，把抽象化和邏輯推理相結合，把事物的本質作精益求精的系統組織，即爲公理化；而數理模型則是抽象化的高度系統化，精鍊化所得的體系。再者，一個數理模型的一組特徵性質也就是可以用來抽象描述該數理模型的公理體系。由此可見抽象化、公理化與數理模型是三種密切相連的事物，是用解析思維（analytical thinking）來有系統地認識事物，解決問題的高度藝術的自然三合體，古典幾何學則是上述三合體的發祥地，所以當然也是學習上述解析思維的方法論的啓蒙佳園。讀者在學習古典幾何中自當把握良機去好自體會與認識它們。

(二)形與質；直觀與思維

空間的精要本質乃是幾何學所要探索研究的中心課題，而空間的本質則很自然地表現在各種各樣基本的幾何形體和各種基本幾何性質之間的相互作用之上。例如三角形的角邊關聯，圓與角的緊密聯繫，點線面之間的連結與交截性質等等，都是在幾何學的研討中由直觀的表象，得窺其內在的精奧的自然途徑。由此可見，在幾何學的研討中，很自然地是一種眼腦並用，直觀與思維的相輔相成；一方面是圖形的直觀幫助了我們的想像力，活潑了我們的思路，而另一方面則是要靠解析思維的穿透力來由表及裡洞察精奧，解析思維可以說是一種具有高度透視力的“慧眼”！只有善於並用這兩種眼力，才能探求而得空間本質的至精至簡，從而認識到像前述五種古典幾何學中所達成的精華理論。概括地來說，思考分析，邏輯思維的用場是能夠用來剖析各種性質之間的邏輯關聯與本質內蘊；再者，精簡的幾何圖形如三角形、長方形、平行四邊形、圓等等則是簡要地突出各種基本幾何性質的內在關聯的天然樞紐之所在。我們對於這些精簡幾何形體的直觀，引導我們看到，想到這種樞紐點，而思考分析則是揭示其中所蘊含的精奧至理的利器。

科學治學的一個主導思想就是由繁精簡，以簡御繁。由此可以想到，在幾何學的研討中，愈是簡樸基本的事物，愈是要精益求精地下功夫去徹底深究，它們往往就是基礎理論的發祥地！下面再用幾個在前三講中業已討論過的實例來簡要地闡述上述觀點：

(1)在歐氏平面幾何的定性理論中，全等形、對稱性和平行這幾個基本概念是所要研討的主題，它們的直觀內涵都十分明顯。再者，等腰三角形是最簡單的軸對稱平面形，平行四邊形則是最簡單的心對稱平面形；在這兩種至簡的對稱圖形上，等角、等邊這種幾何性質就自然地變得是一種緊密邏輯相關的格局，這也就是等腰三角形各種特徵性質和平行四邊形的各種特徵性質之間的邏輯等價，而它們也恰恰就是定性幾何的兩個基石之所在！

(2)在歐氏平面幾何的定量理論中，長方形

的面積公式是長乘寬和相似三角形定理是可以由直觀看得到的；而且在整數倍的情形也是不難想到可以用平行分割來加以論證的。但是當古希腊幾何學家們對於上述兩點追根究底地加以深刻探討時，却發現其中大有文章！可不可公度這個基本問題的提出，不可公度量的發現，用歐都克斯逼近原理對於上述兩個基本定理的嚴格論證，它們乃是希腊幾何發展史中重大的突破，是大半個世紀鍥而不捨精益求精的解析思維的重大成就！直觀能夠引導我們看到想到上述兩個要點所在，但是其中所蘊含着博大精深的理論却要靠邏輯思維的深究才能充分揭示。

(3)長方形的面積公式看來平淡無奇，但是用它來割補求積就可以簡單明瞭地推導而得相似三角形定理的勾股定理這兩塊定量幾何的基石。再者，由上述兩個基本定理就可以順理成章地建立起三角學、解析幾何、向量代數和格氏代數。我們在第一講後半所討論的主題，也就是以長方形面積公式爲基礎，逐步推演發展而得格氏代數的具體做法。誠然，這樣長篇大論的推理論證中逐步逐段所用的都是解析思維，但是幾何直觀其實也一直是亦步亦趨地在幕後扮演指引者的角色。

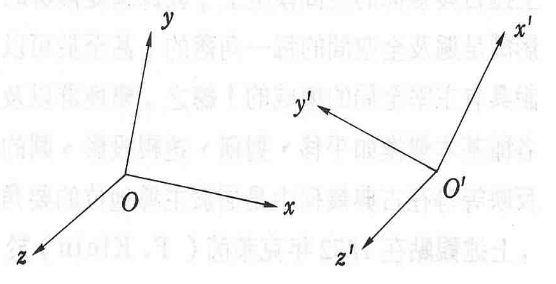
(4)用三維空間的連結與交截來推導迪氏定理是可以由直觀看到想到的，但是僅僅用迪氏定理就可以引進（抽象）射影空間的本質代數，建立本質射影坐標系則是解析思維的“力作”了！也只有這樣透徹的研討才能眞正由表及裡，看清迪氏定理和巴氏定理的深遠蘊涵。Pappus 遠在紀元三世紀即已發現的定理，一直到十九世紀末廿世紀初才充分理解其深奧之精微與重大意義。再者，三角形內角和在實驗測量誤差範圍之內恒等於一平角，是不難發現的一個簡潔的實驗定律。但是它的眞正幾何蘊涵何在？却一直困擾幾何學界達二千年之久，一直到十九世紀初才撥雲見月，得窺別有洞天之奥妙。幾何直觀之簡樸和幾何意義之深遠，發人深思，令人神往。

(三)變換與不變量，坐標系與坐標變換

勻稱性（或勻齊性）（homogeneity）乃是古典幾何空間模式的主要特點。從實驗幾何的觀點來看，在我們活動所能及的範圍之內，各處的空間局部皆具有同樣的幾何性質，亦即空間的**局部勻稱性**（一致性）是具有**實驗基礎者**；而空間的全局勻稱性則是一個在哲理上極爲自然的推廣，本質上乃是我們對於生活於其中的客觀空間的一個“大胆假設”：那就是我們在地球上實驗求知而得的幾何知識應該是放諸全宇宙而皆準的！從數理模型的觀點來看，如歐氏空間、球空間、雙曲空間、實投影空間或複投影空間等等都是勻稱的數理模型，它們都是具有某種幾何結構的點集；而且其**保構變換群**（Automorphism Group）（亦即由自同構所組成的變換群）在其上的作用是**可遞的**（transitive）（亦即空間的任給兩點都能有保構變換將它們互相變換）。由此可見，在上述古典幾何的空間模型上，其保構變換群的影響是遍及全空間的每一角落的，甚至於可以說具有主宰全局的權威的！總之，變換群以及各種基本變換如平移、對稱、透視投影、圓的反映等等在古典幾何中是居於主導地位的要角，上述觀點在 1872 年克萊茵（F. Klein）於 Erlangen 大學的著名講演中獲得系統的闡述與大力強調，此乃後世皆稱之謂 Erlangen Program 者是也。

坐標系的建立是將空間結構全盤數量化的一種具體做法，例如笛卡兒當年首創解析幾何學所用的笛氏坐標系；便於研討抽象旋轉面的極坐標系，將抽象射影空間的結構全盤代數化的本質坐標系；便於研討圓與角的幾何的複數坐標系等等，它們可以把幾何問題的研究系統地歸於相應的代數與分析問題來加以解答。坐標系是溝通幾何學與代數學、分析學的基本橋樑，它們使得數學的領域更加貫通融洽，數學

的思想更加靈活多面，當年笛卡兒和費瑪在解析幾何學上的創見，是整個數學史上的劃時代的一個突破。但是在選坐標系的過程中，不可避免地引進了不自然的特殊化，例如在建立一個笛氏坐標系時，我們得選取一點作爲原點和三個互相垂直的方向作爲坐標軸方向，這也就把上述一點和三個方向特殊化了，而這一點恰恰是和歐氏空間的勻稱性（亦即各點、各線、各面之間一律平等的本質）是背道而馳的！用一個不夠完全恰當的比喻，歐氏空間好比是一個人、人平等的民主社會，在其上選取一個坐標系好比是選舉出一個能夠有效治理這個平等社會的政府。在這樣一個政府的組織之下是各有職責，而其中原點，坐標軸是的確賦予了特殊地位的。但是勻稱性乃是空間美好的本質，當然得全力維護之！維護民主社會人人平等的作法是要立個憲法來保障之，保全空間的勻稱性的憲法就是任何一點皆可以選爲原點，任何三個互相垂直的方向都可以選爲坐標軸。換句話說，維護歐氏空間的勻稱性的大憲章也就是歐氏空間的任何兩組笛氏坐標架都居於同等地位



，其具體表現就是對於任給兩組笛氏坐標架（如上圖所示之（O；$x\ y\ z$）和（O';$x'y'z'$)）恒有一個唯一確定的保長變換互相溝通之。由此可見，坐標變換乃是消除坐標系選用上所引進的不自然的人爲特殊化，從而保全空間勻稱平等的美質的必經之途，所以坐標系和坐標變換其實是不可分割的，互相配套的。在此我們且以平面解析幾何中對於錐線的研討爲例，初步解說坐標化、坐標變換與不變量之間的關聯。

⑴在一個選定的笛氏平面坐標系中，一個錐線可以表達爲一個二元二次方程式的解點點集；反之，一個二元二次方程式的解點點集則恒爲一個錐線。再者兩個二元二次方程式：

$$A_i x^2+2B_i xy+C_i y^2+2D_i x+2E_i y+F_i=0,\ i=1,2$$

以同一條錐線爲其解點點集的充要條件是它們的係數成比例，亦即

$$A_1:A_2=B_1:B_2=C_1:C_2=D_1:D_2=E_1:E_2=F_1:F_2$$

⑵上述錐線和二元二次方程式的等價類之間的相互對應是隨着坐標系的選定而定的！同一條錐線對於相異的兩個平面笛氏坐標系，其所對應的方程式是可以截然不同的！但是我們所要研討的錐線的幾何性質當然不會因爲坐標系的不同而有所改變。例如一個橢圓的長、短軸的長度和面積等等，假若能用它所對應的方程式的係數加以表達，則這種表達式顯然應該在坐標變換之下保持不變！由此可見，要採用坐標系把錐線的幾何性質有系統地歸於二元二次方程式的代數形式來加以研討，就先得要澈底撑握上述對應中，係數的坐標變換中所含的“不變量”（invariants）。

⑶設（O；e_x，e_y）和（O'，e_x'，e_y'）是平面上任給兩個笛氏坐標架，則同一點P在上述兩個笛氏平面坐標系中的坐標（x，y）和（x'，y'）之間的坐標關係式是：

$$\overrightarrow{OP}=x\cdot e_x+y\,e_y=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P'}$$
$$=\overrightarrow{OO'}+x'e_y'+y'e_y'$$

由此即得坐標變換式：

$$\begin{cases} x=\overrightarrow{OP}\cdot e_x \\ \quad=\overrightarrow{OO'}\cdot e_x+x'e_x'e_x+y'e_y'\cdot e_x \\ \quad=h+x'\cdot\cos\theta\mp y'\sin\theta \\ y=\overrightarrow{OP}\cdot e_y \\ \quad=\overrightarrow{OO'}\cdot e_y+x'e_x'\cdot e_y+y'e_y'\cdot e_y \\ \quad=k+x'\sin\theta\pm y'\cos\theta \end{cases}$$

再者，設某一錐線Γ在（x，y）－坐標系中的方程式是

$$f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

則Γ在(x',y')-坐標系中的方程式就是將上述坐標變換式代入上式，然後再展開集項之所得者，亦即有恒等關係式：

$$A'x'^2+2B'x'y'+C'y'^2+2Dx'+2E'y'+F'\equiv f(h+x'\cos\theta\mp y'\sin\theta,\ k+x'\sin\theta\pm y'\cos\theta)$$

由此可得方程係數之間的坐標變換式如下：

$$\begin{cases} A'=A\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+C\sin^2\theta \\ B'=\mp A\cos\theta\sin\theta\pm B(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \\ \qquad +C\sin\theta\cos\theta \\ C'=A\sin^2\theta-2B\cos\theta\sin\theta+C\cos^2\theta \\ D'=Ah\cos\theta+B(h\sin\theta+k\cos\theta) \\ \qquad +Ck\sin\theta+D\cos\theta+E\sin\theta \\ E'=\mp Ah\sin\theta\pm B(h\cos\theta-k\sin\theta) \\ \qquad \pm Ck\cos\theta\mp D\sin\theta\pm E\cos\theta \\ F'=Ah^2+2Bhk+Ck^2+2Dh \\ \qquad +2Ek+F \end{cases}$$

(4)關於上述係數坐標變換式，值得驚喜的是它們具有下述三個基本不變量，亦即

$$H=A'+C'\equiv A+C,$$

$$\delta=B'^2-A'C'\equiv B^2-AC,$$

$$\triangle=\begin{vmatrix} A' & B' & C' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix}\equiv\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

而且所有其他不變量都可以用上述三個基本不變量加以表達！

例1：試用上述基本不變量表達一個橢圓的面積。

解：我們可以選取最佳坐標系使得一個橢圓的方程式成下述標準形式，即

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

則有其面積爲πab。再者，上述基本不變量爲

$$\begin{cases} H=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\ (\text{係數的一次式}) \\ \delta=-a^{-2}\cdot b^{-2}\ (\text{係數的二次式}) \\ \triangle=a^{-2}\cdot b^{-2}\ (\text{係數的三次式}) \end{cases}$$

因爲幾何量應該在係數遍乘常數之下不變，所以必然是係數的零次齊次式。由此可見

$$\pi ab=\pi\cdot\triangle|\delta|^{-\frac{3}{2}}$$

就是所求的表達式！

例2：設Γ：$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$是一個橢圓，亦即$\delta=B^2-AC<0$。試用上述基本不變量表達其長、短軸的長度。

解：通過適當的平移、轉軸，我們可以使得坐標系(x',y')的原點位於橢圓的對稱中心，其x',y'軸則是其對稱軸。亦即在(x',y')-坐標系下，Γ的方程式是

$$\Gamma:\quad A'x'^2+C'y'^2+F'=0$$

由此可見

$$H=A+C=A'+C'$$

$$\delta=B^2-AC=-A'C'$$

$$\triangle=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A' & O & O \\ O & C' & O \\ O & O & F' \end{vmatrix}=A'C'F'$$

再者，由$\delta<0$得知A'、C'同號，所以上述解點非虛的充要條件是F'和A'、C'異號，亦即$\triangle<0$，由上述聯立方程式，容易解得

$$A',C'=\frac{1}{2}(H\pm\sqrt{H^2+4\delta}),$$

$$F'=-\frac{\triangle}{\delta}$$

所以其長短軸分別就是

$$\left(\frac{F'}{A'}\right)^{\frac{1}{2}}\text{和}\left(\frac{F'}{C'}\right)^{\frac{1}{2}}$$

由上面這個大家所熟知的實例，即可初步體現坐標化、坐標變換和不變量之間的相互配合之一斑。要充分開展所謂Erlangen 計劃，就先得要研究代數不變量的理論，而且還要把它和幾何研究密切配合起來，此事說來話長，且聽下回分解吧。（本文作者現任教於美國加州大學柏克萊校區數學系）