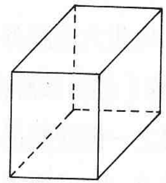
15302　六面體配號問題(二)

優勝名單

優良：陳啓良（僑忠國小）

參考答案：（張國男提供）



在解題過程中，提及四邊形區域時，均指六面體側面原有之四邊形區域，提及稜時，均指上述區域中相鄰二者之公共邊（共有四條），先此敍明。

任一解經過適當變換，均可產生 128 個解（包括該解在內），說明如下：

設ㄅ爲已予任一解，而ㄆ爲該六面體之一個複製品，其頂點猶待配號。注意ㄅ中經過 1 之二個四邊形區域所具有之三條稜，設此三條稜爲 A，B與 C，其中A經過 1 。首先，可將A之二個端點之號數配與ㄆ中任一稜之二個端點，故此二號數之配點法共有 8 種。若此二號數配予ㄆ中之稜甲，而ㄆ中包含甲之二個四邊形區域所具有之三條稜爲甲，乙與丙，則可將 B之二個端點之號數配予乙之二個端點，或配予丙之二個端點，故此二個號數之配點法有 4 種，並將 C之二個端點之號數配予甲,乙與丙三條稜中未配號之二個端點,其配點法有 2 種，最後將所剩之二個號數配予ㄆ中所剩之二個頂點，其配點法亦有 2 種。由是可知：任一解經如此變換，均可產生 $8\times4\times2\times2=128$ 個解（包括該解在內）；如此 128 個解，可併爲一類。爲方便計，對於同一類 128 個解，以下均僅列出一解以爲代表。（附記：故若某解中經過 1 之二個四邊形區域所具有之三條稜所配之三對號數，與另一解中經過 1 之二個四邊形區域所具有之三條稜所配之三對號數完全相同，則此二解同屬一類；否則

分屬二類。）

此後，對於四數組，均限定其數全異，且由小而大排之。

因任一解之四邊形區域四頂點之號數和均爲18，故任一解中經過1之二個四邊形區域二組頂點可配之四數組必爲（1，2，7，8），（1，3，6，8），（1，4，5，8）與（1，4，6，7）中之二個，遂知僅有下列六種可能情形：

⑴若經過1之二個四邊形區域二組頂點所配之四數組爲（1，2，7，8）與（1，3，6，8），則可得圖1（爲代表）。

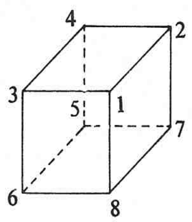
⑵若經過1之二個四邊形區域二組頂點所配之四數組爲（1，2，7，8）與（1，4，5，8），則可得圖2（爲代表）。

⑶若經過1之二個四邊形區域二組頂點所配之四數組爲（1，2，7，8）與（1，4，6，7），則可得圖3（爲代表）。

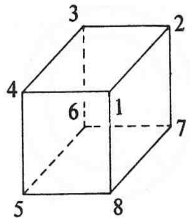
⑷若經過1之二個四邊形區域二組頂點所配之四數組爲（1，3，6，8）與（1，4，5，8），則可得圖4（爲代表）。

⑸若經過1之二個四邊形區域二組頂點所配之四數組爲（1，3，6，8）與（1，4，6，7），則可得圖5（爲代表）。

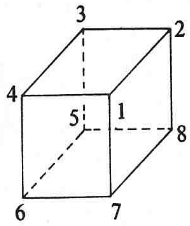
⑹若經過1之二個四邊形區域二組頂點所配之四數組爲（1，4，5，8）與（1，4，6，7），則可得圖6（爲代表）。



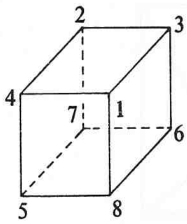
圖一



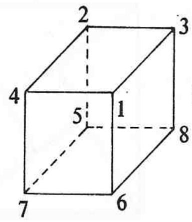
圖二



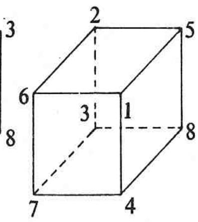
圖三



圖四



圖五

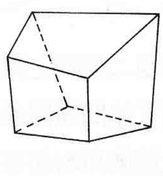


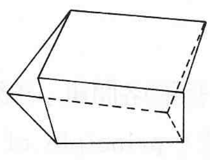
圖六

綜上所論，遂知共有768種配號法。

評 註

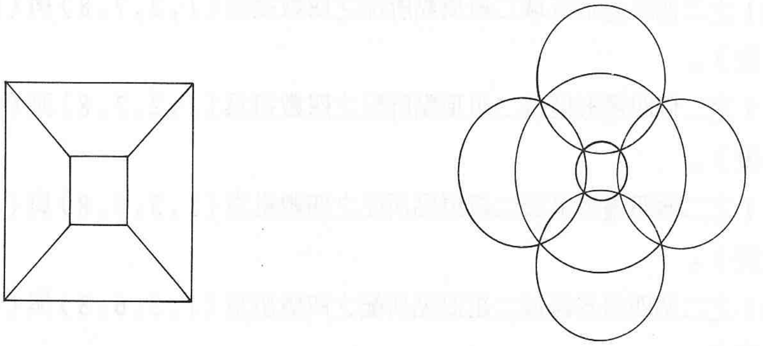
若平行六面體易以更一般之六面體，其外表爲六個四邊形區域，有十二條稜，八個頂點，每條稜恰有二個四邊形區域包含，每個頂點恰有三條稜及三個四邊形區域經過，如下列二圖所示，亦可考慮問題一，且本文之解法仍然適用。再者，若將如此六面體之外表某二個不相鄰之四邊形區域置之度外，亦可以其餘四個四邊形區域所構成之曲面替代問題二中所謂之側面而考慮問題二，且本文之解法仍然適用。





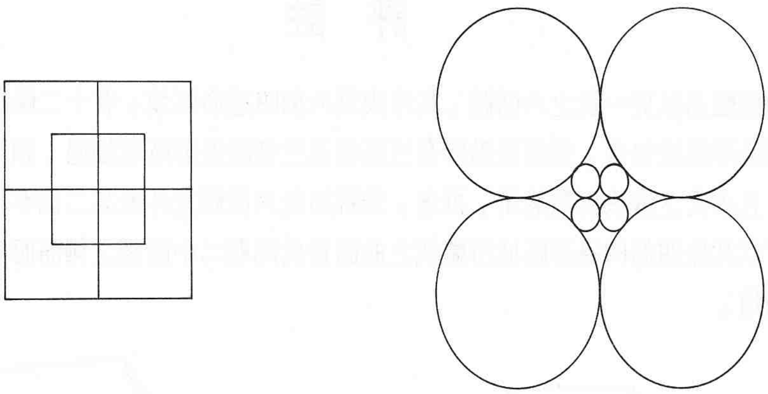
事實上，問題二及其解法，更可推廣至下列二圖所示之（美術燈罩）曲面以及其他類似曲面。

略作比較，可知本文所處理之問題一與下述問題相當：㈠將下左（右）所示平面圖形之八個交點由 1 至 8 配號，使每一個四邊形四頂點（每一個圓上四交點）之號數和均相等，試求所有配號法。



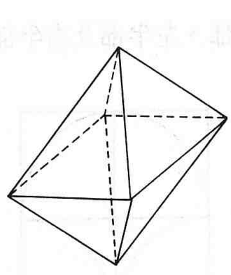
㈡將下左（右）所示平面圖形之八個交點由 1 至 8 配號，使每一個三角形（四分圓環區域）邊界上四點之號數和以及二個正方形（圓盤）邊界上四點之號數和均相等，試求所有配號法。

㈢將下左（右）圖所示八個平面區域（圓盤）由 1 至 8 配號，使上半部、下半部、左半部、右半部、外圍以及內部四個區域（圓盤）之號數和均相等，試求所有配號法。（註：亦可將圓盤改為圓周）

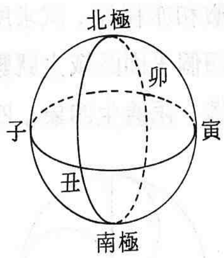


顯然，可由上述㈠至㈢各問題，扣除去適當之條件，而得與問題二相當之問題。

應用對偶原理（ principle of duality ），可知問題一與下述問題同義：將下圖所示八面體之外表八個三角形區域由 1 至 8 配號，使共點四個三角形區域之號數和均相等，試求所有配號法。



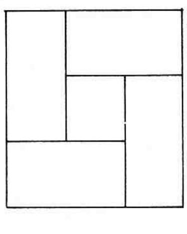
當然，亦可知問題二與下述問題同義：將下圖所示球面上八個區域由 1 至 8 配號，使經過（赤道上）子，丑，寅，卯各點四個球面區域之號數和均相等，試求所有配號法。



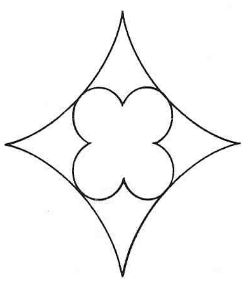
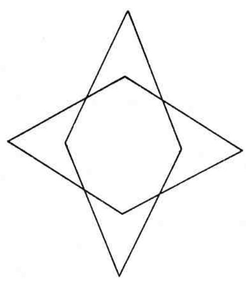
習 題

㈠試先求問題二之解，而後篩選出問題一之解；並將此種解法，與本文對問題一所用之解法，就繁簡程度作比較。

㈡ (i) 將構成下圖之八條線段由 1 至 8 配號，使能圍出四邊形區域之四條線段之號數和均相等，試求所有配號法。(ii) 將構成下圖之八條線段由 1 至 8 配號，使能圍出長方形區域之四條線段之號數和均相等，試求所有配號法。

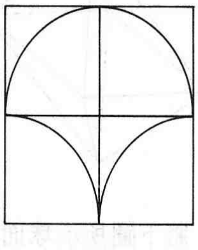


㈢ (i) 將構成下左（右）圖之八條圓弧（線段）由 1 至 8 配號，使能圍出平面區域之四條圓弧（線段）之號數和均相等，試求所有配號法。(ii) 將構成下左（右）圖之八條圓弧（線段）由 1 至 8 配號，使能圍出全等平面區域（菱形區域以外之四邊形區域）之四條圓弧（線段）之號數和均相等，試求所有配號法。

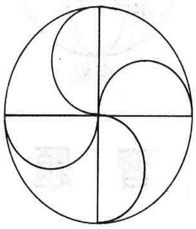



㈣ (i) 將下圖所示八個平面區域由 1 至 8 配號，使上半部、下半部、左半部及右半部四個平面區域之號數和均相等，且全等四個區域之號數和亦相等，試求所有配號法。(ii) 將下圖所示八個平

面區域由 1 至 8 配號，使上半部、下半部、左半部及右半部四個平面區域之號數和均相等，試求所有配號法。



(五) (i) 將下圖（太極圖）所示八個平面區域由 1 至 8 配號，使聯集呈 形之四個平面區域之號數和均相等，且全等四個區域之號數和亦相等，試求所有配號法。(ii) 將下圖所示八個平面區域由 1 至 8 配號，使聯集呈 形之四個平面區域之號數和均相等，試求所有配號法。〔註：周易繫辭上傳：「是故易有太極，是生兩儀，兩儀生四象，四象生八卦。」〕



(六) (i) 將下左（右）所示大四角錐體（平面圖形）之九個交點由 1 至 9 配號，使外表每一個四邊形區域（每一個等腰梯形及正方形）四頂點之號數和均相等，試求所有配號法。(ii) 將下左（右）所示大四角錐體（平面圖形）之九個交點由 1 至 9 配號，使側面每一個四邊形區域（每一個等腰梯形）四頂點之號數和均相等，試求所有配號法。