級數求和法

余文卿

偶然的一次談話中，台大數學系的康明昌教授提到二次多項式相關的級數和問題；如

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}，\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}；$$

是否級數 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)^2}$ 的和也是 $r\pi^2$（$r\in Q$）的形式？當時我給的答案是否定的，並提供了一求和公式。其實對任意多項式 $P(x)$，級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P(n)}$$

的和可用階乘函數 $\Gamma(s)$（$\Gamma(n+1)=n!$）及其高階導函數的數值表示出來，所用的基本原理只是部分分式的理論與有名的Kronecker極限式（Kronecker limit formula）；故在此借用「數學傳播」一角，導出這類級數的求和公式。

1.部份分式與級數求和

對一般高中程度的學生，應能夠計算下列級數的和。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ $(=1)$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ $(=\frac{3}{4})$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ $(=\frac{1}{4})$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ $(=\frac{1}{18})$

這類級數的求和是透過適當的部份分式分解，將級數寫成兩級數（可能發散）的差，經由消去而得出級數的和；如

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)\\&+\cdots\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\\&+\cdots\cdots=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

上面的方法對於 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}$ 一類級數的求和就失效了。要想得出 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}$ 的和，一則可利用三角級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nu}{n^2}=\pi^2\left(u^2-u+\frac{1}{6}\right),\ 0\leq u\leq 1,$$

另外也可利用複變上的方法；這類方法也只能針對某些特殊形式的級數，並不能解決我們現有的問題。

2. Kronecker 極限式

有名的 Riemann zeta 一函數 $\zeta(s)$ 的定義是

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\ ,\ \mathrm{Re}\,s>1$$

視爲 s 的解析函數，$\zeta(s)$ 在 $s=1$ 有一單純極點（simple pole）；且 $\zeta(s)$ 在 $s=1$ 的展開式是

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\gamma+a_1(s-1)+a_2(s-1)^2+\cdots$$

其中 γ 是有名的 Euler 常數，定義是

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)$$

像上面求出

$$\lim_{s\to\infty}\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right)=\gamma$$

的式子一般通稱爲 Kronecker 極限式；如 Hurwitz zeta 函數

$$\zeta(s;\delta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+\delta)^s}\ ,$$

$$\mathrm{Re}\,s>1\ ,\ \delta>-1$$

的 Kronecker 極限式是

$$\lim_{s\to\infty}\left(\zeta(s;\delta)-\frac{1}{s-1}\right)=-\frac{\Gamma'(1+\delta)}{\Gamma(1+\delta)}\ 。$$

亦即 $\zeta(s;\delta)$ 在 $s=1$ 附近的展開式是

$$\zeta(s;\delta)=\frac{1}{s-1}-\frac{\Gamma'(1+\delta)}{\Gamma(1+\delta)}+b_1(s-1)+b_2(s-1)^2+\cdots$$

這裏的 $\Gamma(s)$ 是階乘函數；對任意正整數 n，$\Gamma(n+1)=n!$；又 $\Gamma(s)$ 滿足泛函方程式 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$；把這方程式兩邊取對數而對 s 微分，則得出

$$\frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)}=\frac{1}{s}+\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$$

利用 $\Gamma'(1)=-\gamma$，可導出

$$\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\gamma\ ,\ n\in N$$

3. 求和公式

設 $P(x)=(x+\delta_1)\cdots\cdots(x+\delta_k)$ 是一多項式，而 $\delta_1,\cdots\cdots,\delta_k$ 都是大於 -1 的實數，如此 $P(n)>0$，考慮級數

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P(n)}\ 。$$

現先考慮一簡單的特例；即 $k\geq 2$，且 $\delta_1,\cdots\cdots,\delta_k$ 兩兩相異時，則

$$\frac{1}{P(x)}=\frac{A_1}{x+\delta_1}+\cdots\cdots+\frac{A_k}{x+\delta_k}\ ,$$

而 $$A_j=\lim_{x\to-\delta_j}\frac{x+\delta_j}{P(x)}=\frac{1}{P'(-\delta_j)}\ 。$$

因此 $$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P(n)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{P'(-\delta_j)(n+\delta_j)}\ ,$$

即級數 S 可寫成 k 個級數的和；利用

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+\delta_j)^s}$$

$$=\frac{1}{s-1}-\frac{\Gamma'(1+\delta_j)}{\Gamma(1+\delta_j)}+a_{j1}(s-1)+a_{j2}(s-1)^2+\cdots\cdots$$

得出

$$S=\lim_{s\to1^+}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{P'(-\delta_j)}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+\delta_j)^s}\right)$$

$$=-\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{P'(-\delta_j)}\frac{\Gamma'(1+\delta_j)}{\Gamma(1+\delta_j)}\ 。$$

在此我們用到等式

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{P'(-\delta_j)}=0\ 。$$

這式子很容易由等式

$$1=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{P'(-\delta_j)}\cdot\frac{P(x)}{(x+\delta_j)}$$

比較x^{k-1}的係數而得出。現利用上面的式子來計算一些較複雜級數的和。

例題1：

求級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)(n+5)(n+7)}$

的和。

解答：

$$\frac{1}{(x+1)(x+4)(x+5)(x+7)}$$

$$=\frac{1}{72}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{x+4}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x+5}$$

$$-\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{x+7}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)(n+5)(n+7)}$$

$$=-\frac{1}{72}\frac{\Gamma'(2)}{\Gamma(2)}+\frac{1}{9}\frac{\Gamma'(5)}{\Gamma(5)}-\frac{1}{8}\frac{\Gamma'(6)}{\Gamma(6)}$$

$$-\frac{1}{36}\frac{\Gamma'(8)}{\Gamma(8)}$$

$$=-\frac{1}{72}(1-\gamma)+\frac{1}{9}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\gamma)$$

$$-\frac{1}{8}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\gamma)$$

$$+\frac{1}{36}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\gamma)$$

$$=\frac{227}{30240}\text{。}$$

當$P(x)=0$有重根時，則可取$\epsilon_1\geq 0$，……，$\epsilon_k\geq 0$，使得

$$P_\varepsilon(x)=(x+\delta_1+\epsilon_1)\cdots(x+\delta_k+\epsilon_k)$$

有k個相異的零位，利用

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P_\varepsilon(n)}$$

的求和公式以及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P(n)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P_\varepsilon(n)}$$

可導出級數的和；如

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)^2}$$

$$=\frac{1}{9}\lim_{\delta\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1/3)(n+\delta+1/3)}$$

$$=\frac{1}{9}\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\left(\frac{\Gamma'(1/3+\delta)}{\Gamma(1/3+\delta)}-\frac{\Gamma'(1/3)}{\Gamma(1/3)}\right)$$

$$=\frac{1}{9}\left[\frac{\Gamma''(1/3)}{\Gamma(1/3)}-\left(\frac{\Gamma'(1/3)}{\Gamma(1/3)}\right)^2\right]$$

4. $\Gamma'(S)/\Gamma(S)$的值

在$P(x)=0$沒有重根時出現在$\sum_{n=1}^{\infty}P(n)^{-1}$的和只是$\Gamma'(1+\delta)/\Gamma(1+\delta)$與$P(-\delta)^{-1}$的組合；在$\delta$是有理數時，$\Gamma'(1+\delta)/\Gamma(1+\delta)$的數值可明確的表現出來，當然這數值不一定是有理數，有時會有根數或π跑出來。設$\delta=q/p$，$p,q\in N$，$0<\delta<1$，將已知的等式

$$\log\Gamma(1+\delta)=-\gamma\delta+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-\delta)^n\zeta(n)}{n}$$

對δ微分，即得出

$$\frac{\Gamma'(1+\delta)}{\Gamma(1+\delta)}+\gamma=-\sum_{n=1}^{\infty}(-\delta)^n\zeta(n+1)\text{。}$$

另一方面，由

$$\zeta(n+1)\Gamma(n+1)=\int_0^\infty\frac{t^n}{e^t-1}dt$$

也得出

$$\int_0^\infty\frac{1-e^{-\delta t}}{e^t-1}dt$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\delta)^n}{n!}\int_0^\infty\frac{t^n}{e^t-1}dt$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\delta)^n}{n!}\zeta(n+1)\Gamma(n+1)$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}(-\delta)^n\zeta(n+1)\text{。}$$

故 $$\frac{\Gamma'(1+\delta)}{\Gamma(1+\delta)}+\gamma=\int_0^\infty \frac{1-e^{-\delta t}\,dt}{e^t-1}$$
$$=\int_0^\infty \frac{(1-e^{-qt/p})\,dt}{e^t-1}。$$

經由 $u=e^{-t/p}$ 的變數變換，得出

$$\frac{\Gamma'(1+q/p)}{\Gamma(1+q/p)}+\gamma$$
$$=p\int_0^1 \frac{(u^{-1}-u^{q-1})\,du}{u^{-p}-1}$$
$$=p\int_0^1 \frac{u^{p-1}(1-u^q)\,du}{1-u^p}$$
$$=p\int_0^1 \left[\frac{u^{p-1}-u^{q-1}}{1-u^p}+u^{q-1}\right]du$$
$$=\frac{p}{q}+p\int_0^1 \frac{(u^{p-1}-u^{q-1})\,du}{1-u^p}。$$

移項得出

$$\frac{\Gamma'(q/p)}{\Gamma(q/p)}+\gamma=p\int_0^1 \frac{(u^{p-1}-u^{q-1})\,du}{1-u^p}。$$

注意到

$$\frac{u^{p-1}-u^{q-1}}{1-u^p}=\sum_{j=1}^{p-1}\frac{B_j}{u-e^{2\pi ij/p}},$$

其中 $B_j=-\frac{1}{p}(1-e^{2\pi ijq/p})$

因而

$$\frac{\Gamma'(q/p)}{\Gamma(q/p)}+\gamma$$
$$=-\sum_{j=1}^{p-1}(1-e^{2\pi ijq/p})\log(1-e^{-2\pi ij/p})。$$

注意到

$$1-e^{2\pi ij/p}=2\sin^2\frac{\pi jq}{p}-i\sin\frac{2\pi jq}{p},$$

$$\log(1-e^{-2\pi ij/p})$$
$$=\log\left(2\sin\frac{\pi j}{p}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi j}{p}\right)i,$$

取實部即得出

$$-\frac{\Gamma'(q/p)}{\Gamma(q/p)}-\gamma=\sum_{j=1}^{p-1}\left(2\sin^2\frac{\pi jq}{p}\right)\log\left(2\sin\frac{\pi j}{p}\right)$$
$$+\sum_{j=1}^{p-1}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi j}{p}\right)\sin\frac{2\pi jq}{p},$$

特別在 $p=2$，3時，由上式得出

$$-\frac{\Gamma'(1/2)}{\Gamma(1/2)}-\gamma=2\log 2,$$
$$-\frac{\Gamma'(1/3)}{\Gamma(1/3)}-\gamma=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+3\log\sqrt{3},$$
$$-\frac{\Gamma'(2/3)}{\Gamma(2/3)}-\gamma=-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+3\log\sqrt{3},$$

運用到級數 $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$ 上面，則得出

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$$
$$=\frac{1}{9}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1/3)(n+2/3)}$$
$$=\frac{1}{9}\left[-3\frac{\Gamma'(1/3)}{\Gamma(1/3)}+3\frac{\Gamma'(2/3)}{\Gamma(2/3)}\right]$$
$$=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

又 $$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)(3n+1)}$$
$$=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1/2)(n+1/3)}$$
$$=\frac{\Gamma'(1/2)}{\Gamma(1/2)}-\frac{\Gamma'(1/3)}{\Gamma(1/3)}$$
$$=-2\log 2+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+3\log\sqrt{3}$$

5. 關於 $\Gamma''(S)/\Gamma(S)$

把積分式

$$\frac{\Gamma'(1+\delta)}{\Gamma(1+\delta)}+\gamma=\int_0^\infty \frac{(1-e^{\delta t})\,dt}{e^t-1}$$

對 δ 微分，則得出

$$\frac{\Gamma''(1+\delta)}{\Gamma(1+\delta)}-\left[\frac{\Gamma'(1+\delta)}{\Gamma(1+\delta)}\right]^2=\int_0^\infty \frac{te^{-\delta t}\,dt}{e^t-1}$$

用來求出$\Gamma'(1+\delta)/\Gamma(1+\delta)$ ($\delta=q/p$) 的方法已不再適用，經由$u=e^{-t/p}$ 的變數變換後，會有 $\log u$ 出現在積分裏，故除了一些特別數值外，這類數值並不易求出，爲方便起見，定

$$F(\delta)=\frac{d}{d\delta}\left[\frac{\Gamma'(\delta)}{\Gamma(\delta)}\right]$$

$$=\frac{\Gamma''(\delta)}{\Gamma(\delta)}-\left[\frac{\Gamma'(\delta)}{\Gamma(\delta)}\right]^2 。$$

由等式

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s},$$

兩邊取對數且對 s 連續微分兩次，則得

$$F(s)+F(1-s)=\pi^2\csc^2\pi s$$

特別是 $F(\frac{1}{2})=\frac{\pi^2}{2}$

$$F(\frac{1}{3})+F(\frac{2}{3})=\frac{4\pi^2}{3}$$

故 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{1}{4}F(\frac{1}{2})=\frac{\pi^2}{8}$ 。

例題2：

求級數 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)^2(3n+2)^2}$ 的和。

解答：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)^2(3n+2)^2}$$

$$=\frac{1}{9}\lim_{\delta\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1/3)(n+1/3+\delta)}\times\frac{1}{(n+2/3)(n+2/3+\delta)}$$

$$=\frac{1}{9}\left[F(\frac{1}{3})+F(\frac{2}{3})\right]+\frac{2}{3}\left[\frac{\Gamma'(1/3)}{\Gamma(1/3)}-\frac{\Gamma'(2/3)}{\Gamma(2/3)}\right]$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{4\pi^2}{3}+\frac{2}{3}(-\frac{\pi}{\sqrt{3}})$$

$$=\frac{4\pi^2}{27}-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

6. 結　論

對任意多項式$P(x)=(x+\delta_1)\cdots\cdots(x+\delta_k)$，所對應的級數 $\sum_{n=1}^{\infty}P(n)^{-1}$的和均可用 $\log\Gamma(1+x)$ 的導函數與高階導函數的函數值表示出來，特別是

結論一：若 $\delta_1,\cdots\cdots,\delta_k$ 是相異正整數，則級數和是一有理數，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P(n)}=-\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{P'(-\delta_j)}(\sum_{m=1}^{\delta_j}\frac{1}{m})。$$

結論二：若 $\delta_1,\cdots\cdots,\delta_k$ 是相異正有理數，則級數和可表示爲

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P(n)}=-\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{P'(-\delta_j)}\frac{\Gamma'(1+\delta_j)}{\Gamma(1+\delta_j)},$$

而 $\frac{\Gamma'(q/p)}{\Gamma(q/p)}+\gamma$

$$=-\sum_{j=1}^{\infty}(2\sin^2\frac{\pi jq}{p})\log(2\sin\frac{\pi j}{p})$$

$$-\sum_{j=1}^{p}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi j}{p})\sin\frac{2\pi jq}{p}。$$

由多項式所定出的級數林林總總，自不能盼望能寫出每一級數的和；即使是最簡單的 Riemann zeta －函數 $\zeta(s)$；$\zeta(2n+1)$ ($n\in N$) 的值到底是有理數或無理數都無法清楚（只證出$\zeta(3)$ 是無理數），更別想將級數和表示出來；像康教授提出的簡單級數 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)^2}$，和雖能表示爲

$$\frac{1}{9}F(\frac{1}{3})=1+\frac{1}{9}\int_0^{\infty}\frac{te^{-t/3}dt}{e^t-1}$$

但無法進一步將這積分的值求出。底下我們列出一些經由上面方法所計算出來的級數和，有興趣的讀者可動手驗證

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(2n+1)^2}=\frac{7\pi^2}{24}+8\log 2-12$,

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{57}{16}$,

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)^2(4n+3)^2} = \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{16}$,

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2(3n+1)(3n+2)}$

$= \frac{\pi^2}{12} + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{4}$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(5n+1)^2(5n+4)^2}$

$= \frac{\pi^2}{225} \csc^2 \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{45} \cot \frac{\pi}{5}$ 。

參考資料

1. Minking Eie, On a Dirichlet series associated with a polynomial, Proceedings of AMS, vol. 110, no. 3, 1990 (583～590).

2. Minking Eie, On special values of Dirichlet series associated with polynomials of several variables, manuscript 1991.

（本文作者現為中央研究院數學所研究員，借調至中正大學應數所）